MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXVI. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1890.

Inhalt des sechsunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Anknüpfend an die Untersuchungen über hyperelliptische Functionen beliebig vieler Variabler, über die in Bd. 32 dieser Annalen berichtet ist, habe ich in den Specialvorlesungen der letzten drei Semester *die Theorie der Abel'schen Functionen* in Betracht gezogen und bei ihnen die vom algebraischen Gebilde ausgehende Definition der Thetafunctionen bis zu demselben Punkte zu führen gesucht, der bei den hyperelliptischen erreicht ist. Dies gelang, wenigstens in der Hauptsache, hinsichtlich aller derjenigen Fragen, bei denen die Moduln des algebraischen Gebildes als fest gegeben angesehen werden; sollen die Moduln als veränderlich gelten (eine Auffassung, die ich im Falle der hyperelliptischen Functionen in Bd. 32 auch nur erst gestreift habe), so erwies sich die Beschränkung auf den Fall $p = 3$ einstweilen als nothwendig. Hiermit ist die Eintheilung des folgenden Berichtes in zwei Hauptabschnitte gegeben, die sich nach Inhalt und Methode unterscheiden. Ich war leider durch äussere Verhältnisse verhindert, einzelne Punkte so ausführlich zu behandeln, wie ich dies gewünscht hätte. Neben meinen Abhandlungen über hyperelliptische Sigmafunctionen in den Bänden 27 und 32 wird zum Verständnisse die Bearbeitung eines Theiles meiner hyperelliptischen Vorlesungen nützlich sein, welche Hr. Burkhardt neuerdings in Bd. 35 dieser Annalen veröffentlicht hat*). Uebrigens wird man bemerken, dass vermöge meiner neuen Darstellung die Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen selbst an vielen Punkten eine weitere Durchbildung bez. neue Grundlegung erfährt. Ueber die Gliederung der nach-

*) Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. — Uebrigens vergleiche man auch Hrn. Burkhardt's Abhandlung: Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen (Math. Ann. t. 32, 1888); der Leser wird daselbst eine Reihe von Entwickelungen finden, die ihm als Ergänzung der von mir im Texte gegebenen Darstellung willkommen sein werden.

folgenden Betrachtungen wird das folgende Verzeichniss den besten Aufschluss geben:*)

Inhalts-Verzeichniss.

---

*) Was die neu in denselben abzuleitenden Resultate angeht, so habe ich dieselben grossentheils schon in vorläufigen Mittheilungen bekannt gemacht; vergl. drei Noten in den Göttinger Nachrichten (Ueber irrationale Covarianten, März 1888, Zur Theorie der Abel'schen Functionen I, II, März und Mai 1889), zwei Noten in den Comptes Rendus der Pariser Academie (Formes principales sur les surfaces de Riemann, Jan. 1889, des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann, Febr. 1889), endlich eine Note in den Proceedings der London Mathematical Society (Febr. 1889).

Erster Abschnitt.

Von den Functionen auf gegebener Riemann'scher Fläche.

§ 1.

Die Riemann'sche Fläche als Grundlage der Theorie. Integrale erster und dritter Gattung.

Bei den hyperelliptischen Gebilden ist von vorneherein eine einfachste algebraische Darstellung bekannt, die man zweckmässiger Weise allen auf sie bezüglichen Untersuchungen zu Grunde legt und von der selbstverständlicherweise auch in Bd. 32 ausgegangen wurde. Nicht so bei den allgemeinen algebraischen Gebilden*). Von den zahlreichen bei ihnen in Vorschlag gebrachten Normalgleichungen bietet für die hier in Betracht kommenden Fragestellungen keine solch besonderen Vortheile, dass es nützlich schiene, gerade sie zum Ausgangspunkte der Entwickelung zu nehmen. Vielmehr finde ich es am zweckmässigsten, mit der Riemann'schen Auffassung zu beginnen und erst aus ihr diejenige Form der algebraischen Darstellung, welche für uns die dienlichste sein dürfte, zu entwickeln. Als Riemann'sche Auffassung schlechtweg bezeichne ich dabei diejenige, bei der das algebraische Gebilde geradezu durch eine Riemann'sche *Fläche* gegeben wird, auf der dann erst hinterher die Functionen, die uns interessiren mögen, insbesondere die algebraischen Functionen, construirt werden. Ich habe die wesentlichen Momente dieser Auffassung, so wie ich dieselben verstehe, 1881 in einer besonderen Schrift dargestellt**); im folgenden Jahre gab ich in Bd. 21 dieser Annalen Erläuterungen über die dabei in Betracht kommenden Existenzbeweise***). Nachdem inzwischen Hr. Carl Neumann eine ausführliche Darlegung der letzteren publicirt hat†), darf ich die betreffenden Anschauungen im Folgenden als bekannt voraussetzen. Es sei hier nur daran erinnert, dass vermöge derselben die Integrale erster und dritter

*) Ich bediene mich dieses aus den Weierstrass'schen Vorlesungen stammenden Ausdruckes (den man ev. noch durch das Wort „eindimensional" näher umgrenzen kann) überall da, wo die Benennungen „Riemann'sche Fläche" oder „algebraische Curve" störende Nebenvorstellungen mit sich führen würden; wo diese Nebenvorstellungen wesentlich sind, werden letztere Benennungen herangezogen.

**) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale (Teubner). — Ich citire im Folgenden möglichst unter Beifügung der Jahreszahlen, wobei ich mich, wo es anging, an die vom Verf. selbst gegebene Datirung halte.

***) Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie; vergl. insbesondere daselbst p. 155 ff.

†) Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Zweite Auflage (Teubner, 1884).

Gattung das prius sind, aus welchem die Integrale zweiter Gattung und insbesondere die algebraischen Functionen erst hinterher abgeleitet werden. Ich will gleich hier die Bezeichnungen zusammenstellen, die ich für die Integrale erster und dritter Gattung weiterhin gebrauche:

Irgend p linear unabhängige Integrale erster Gattung nenne ich

(1) $$w_1, w_2, \ldots w_p,$$

oder ausführlicher, wenn die obere Grenze x und die untere Grenze y in Betracht kommen:

$$w_1^{xy}, w_2^{xy}, \ldots w_p^{xy}.$$

Die $2p$ Perioden von w_α an den Querschnitten A_β, B_β einer kanonischen Zerschneidung heissen

(2) $$\omega_{\alpha,\beta} \text{ bez. } \omega_{\alpha,\beta+p}.$$

Mit Hülfe derselben setzen wir uns aus den w die „transcendent normirten" Integrale erster Gattung

(3) $$v_1, v_2, \ldots v_p$$

zusammen; die Perioden derselben sind durch das Schema gegeben:

(4)

	A_1 ... A_p	B_1 ... B_p
v_1	$1\ 0 \ldots 0$	$\tau_{11} \ldots \tau_{1p}$
v_2	$0\ 1 \ldots 0$	$\tau_{21} \ldots \tau_{2p}$
v_p	$0\ 0 \ldots 1$	$\tau_{p1} \ldots \tau_{pp}$

Ein Integral dritter Gattung mit den „Grenzen" x, y und den „Parametern" $\xi\eta$ heisst allgemein

(5) $$P_{\xi\eta}^{xy}.$$

Dasselbe kann insbesondere so specialisirt werden, dass es als Function von x (oder y) an den Querschnitten A, B die folgenden Perioden darbietet:

(6)

A_1 ... A_p	B_1 ... B_p
$0 \ldots 0$	$2\pi i v_1^{\xi\eta} \ldots 2\pi i v_p^{\xi\eta}$;

wir bezeichnen dasselbe dann mit

(7) $$\Pi_{\xi\eta}^{xy}$$

und benennen es als „transcendent normirtes" Integral dritter Gattung. Aus dem $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ (oder irgend einem anderen speciell gewählten Integral dritter Gattung) ergiebt sich das allgemeinste $P_{\xi\eta}^{xy}$, wenn man irgend eine bilineare Verbindung der v_α^{xy}, $v_\beta^{\xi\eta}$ hinzufügt:

(8) $$P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum c_{\alpha\beta}\, v_\alpha^{xy}\, v_\beta^{\xi\eta}.$$

Nimmt man hier $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, so hat man insbesondere diejenigen Integrale dritter Gattung, welche, wie das Π selbst, Vertauschung von Parameter und Argument zulassen.

§ 2.

Einführung der Formentheorie auf Grund der φ.

Wir schreiben jetzt, indem wir die Differentiale der überall endlichen Integrale in Betracht ziehen:

$$(9) \qquad dw_1 : dw_2 : \cdots dw_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \cdots \varphi_p.$$

Die Herren Weber*) und Nöther**) haben bereits die so eingeführten $\varphi_1, \ldots \varphi_p$ als homogene Coordinaten der Punkte eines Raumes von $(p-1)$ Dimensionen interpretirt, innerhalb dessen dann, unserer Riemann'schen Fläche entsprechend, eine Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (C_{2p-2}), die *Normalcurve der* φ, liegt***). Wir adoptiren den hiermit gegebenen Gedanken, indem wir ihn weiter entwickeln. Die Functionen, welche man in der Theorie der Abel'schen Functionen bisher ausschliesslich zu betrachten pflegt, sind nur von den Verhältnissen der φ abhängig, sie sind *homogene Functionen nullten Grades* der $\varphi_1 \ldots \varphi_p$. Wir werden Veranlassung nehmen überhaupt homogene Functionen der $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ in Betracht zu ziehen. Wir bezeichnen dieselben im Gegensatze zu jenen nur von den Verhältnissen der φ abhängigen Functionen als *Formen.*

Der hiermit bezeichnete Schritt von den Functionen zu den Formen wird mehr oder minder bewusst immer vollzogen, wenn man irgendwelche algebraische Gebilde analytisch-geometrisch im Sinne projectiver Auffassung behandelt. Inzwischen hat sich eben hierdurch, wenn ich nicht irre, eine gewisse Unklarheit festgesetzt. Man möchte dieselbe zu dem Satze verdichten: Functionen, d. h. Formen nullter Dimension, haben an sich eine geometrische Bedeutung, Formen höherer Dimension aber nur, insofern sie gleich Null oder Unendlich gesetzt werden. Dieser Satz ist bei der gewöhnlichen Darstellung in der That völlig richtig, aber doch nur in Folge der willkürlichen Verabredung, vermöge deren man von vorneherein nur die Verhältnisse der homogenen

*) Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle, Math. Ann. t. 13 (1878).

**) Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Ann. t. 17 (1880).

***) Im hyperelliptischen Falle artet dieselbe bekanntlich in die doppeltzählende rationale C_{p-1} aus; dies hindert aber nicht, dass wir die C_{2p-2} auch im hyperelliptischen Falle in Betracht ziehen, den wir überhaupt im Folgenden immer als miteingeschlossen betrachten, sofern wir nicht, wie in § 7, ausdrücklich das Gegentheil bemerken.

Variabelen geometrisch interpretirt hat. Letzteres ist ja in der That für viele Zwecke ausserordentlich nützlich, wie es denn im Folgenden durchweg in der herkömmlichen Weise geschehen soll. Aber es steht doch nichts entgegen, die homogenen Variabelen in einem mit einer Dimension mehr ausgestatteten Raume als absolute Coordinaten zu interpretiren. Dann gewinnen sofort die Formen irgend welchen Grades selbst ihre geometrische Bedeutung. Man nehme das Beispiel unserer $\varphi_1, \ldots \varphi_p$. Wenn wir, in Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Ansatze, wie wir es gerade sagten, die Verhältnisse $\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots \varphi_p$ als Coordinaten eines im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegenen Punktes interpretiren, wo dann jeder Stelle der Riemann'schen Fläche ein solcher Punkt entspricht und der Riemann'schen Fläche selbst, als den Inbegriff ihrer Stellen, die gerade erwähnte C_{2p-2} correspondirt, dann ist es freilich unmöglich, bei einer von den φ nicht im nullten Grade abhängenden Form etwas Anderes als die Null- und die Unendlichkeitsstellen geometrisch aufzufassen. Aber wir können doch die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ ebensowohl als gewöhnliche (Cartesische) Coordinaten des Raumes von p Dimensionen deuten. Dann erheben wir uns zu einem höheren Standpunkte: einer jeden Stelle der Riemann'schen Fläche entspricht dann ein ganzer, durch den Coordinatenanfangspunkt laufender *Strahl;* dieser Strahl beschreibt, wenn die Stelle die Riemann'sche Fläche überstreicht, einen *Kegel* der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, und auf diesem Kegel finden dann alle die in den nächsten Paragraphen einzuführenden Formen: das Differential $d\omega$, die Primform Ω, etc. ihre vollwerthige geometrische Interpretation.

Noch ein paar Worte über den Gebrauch homogener Variabler überhaupt. Ich entschliesse mich zu demselben nicht irgend welcher Tradition oder Gewöhnung zu liebe, sondern um das Wesen der Sache, so wie ich dasselbe verstehe, klarer herauszustellen. Um nur von den nächstfolgenden Paragraphen zu reden, so ist es der Zielpunkt derselben, gewisse complicirtere Functionen der bisherigen Theorie, die Integrale dritter Gattung, die Thetafunctionen etc. aus einfacheren Elementen aufzubauen; dies würde ohne homogene Variable unmöglich sein, denn diese einfacheren Elemente existiren eben nur im Bereich der homogenen Variabelen. Dabei wolle man sich, was die Formulirung der Sätze angeht, immer gegenwärtig halten, dass beim Gebrauch homogener Variabler nicht nur unendlich grosse Werthe der Veränderlichen ausgeschlossen sind, sondern auch das gleichzeitige Verschwinden sämmtlicher Veränderlichen. Nur hierdurch werden die im Folgenden immer wiederkehrenden Sätze möglich, dass gewisse Formen niemals unendlich werden etc.

Die Erläuterungen, welche ich hiermit über das Wesen der homogenen Variabelen und ihre geometrische Interpretation insbesondere

gegeben habe, machen keinen Anspruch auf Neuheit. Trotzdem schien es im Interesse besserer Verständlichkeit der folgenden Entwickelungen nützlich, dieselben hierher zu setzen. In der That hat mich die Erfahrung belehrt, dass selbst solche Mathematiker, die an den Gebrauch homogener Variabeler im Gebiete rationaler algebraischer Operationen durchaus gewöhnt sind, einen Augenblick stutzen, wenn sie die gleiche Art des Ansatzes im transcendenten Gebiete handhaben sollen.

§ 3.

Das Differential $d\omega$. Die Integrale zweiter Gattung.

Der erste Erfolg, der aus der Einführung der φ resultirt, ist der, dass wir in einfachster Form einen Differentialausdruck (eine *Differentialform*) construiren können, welcher nirgendwo auf dem algebraischen Gebilde (oder besser gesagt: auf der für uns in Betracht kommenden Mannigfaltigkeit der φ) Null oder Unendlich wird. Derselbe lautet, unter α eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots p$ verstanden:

$$d\omega = \frac{dw_\alpha}{\varphi_\alpha}. \tag{10}$$

Dass hier der Werth des α durchaus gleichgültig ist, ergibt sich sofort aus (9); wir könnten, unter den c_α irgendwelche Constante verstanden, ebensowohl schreiben:

$$d\omega = \frac{\Sigma c_\alpha \, dw_\alpha}{\Sigma c_\alpha \varphi_\alpha}. \tag{10a}$$

Aber ebensowohl folgt aus (9), unter Berücksichtigung unserer Festsetzungen über den Bereich, innerhalb dessen sich die homogenen Variabelen φ zu bewegen haben, dass $d\omega$ keine Null- oder Unendlichkeitsstellen besitzt: in Formel (10a) kann, bei gegebenen c_α, allerdings Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, aber wir gehen dann jedesmal sofort zu einem bestimmten endlichen Werthe des $d\omega$ über, indem wir die c_α durch irgendwelche andere Constante ersetzen.

Das so gewonnene $d\omega$ erweist sich nun in der Folge als ganz besonders nützlich. Ich werde dasselbe hier zunächst zur Definition der Integrale zweiter Gattung anwenden. Man führt diese Integrale in die Riemann'sche Theorie allgemein so ein, dass man ein Integral dritter Gattung nach einem seiner Parameter differentiirt. Aber was heisst nach einem Parameter (überhaupt nach einer Stelle der Riemann'schen Fläche) differentiiren? Die gewöhnliche Darstellung benutzt dazu irgend eine Function der Stelle und differentiirt nach dieser Function; sie führt damit in die Definition der Integrale zweiter Gattung eine unnöthige Particularisirung ein. Für uns ist in allen solchen Fällen unmittelbar die Benutzung des $d\omega$ gegeben. *Eine Function*

auf der Riemann'schen Fläche differentiiren heisst, das Differential der Function durch $d\omega$ *dividiren.* Ist also Y_ξ^{xy} ein Integral zweiter Gattung mit den Grenzen x, y und der Unstetigkeitsstelle ξ, so setzen wir:

$$(11) \qquad Y_\xi^{xy} = \frac{\partial P_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_\xi}.$$

Hier ist $d\omega_\xi$ von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension in den φ der Stelle ξ; *es ist also Y eine Form $(1)^{\text{ter}}$ Dimension in den φ der Unstetigkeitsstelle.* Natürlich wechselt das Y mit dem zu Grunde gelegten Integral dritter Gattung. Indem wir in (11) statt P das Normalintegral Π setzen, wollen wir insbesondere schreiben:

$$(12) \qquad \Upsilon_\xi^{xy} = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_\xi}.$$

Formel (8) gibt dann:

$$(13) \qquad Y_\xi^{xy} = \Upsilon_\xi^{xy} + \sum c_{\alpha\beta}\, v_\alpha^{xy}\, \psi_\beta^{(\xi)},$$

Andererseits ergeben sich aus (6) als Perioden des Integrals Υ_ξ:

(14)

	$A_1 \ldots A_p$	$B_1 \ldots B_p$
Υ_ξ	$0 \ldots 0$	$2\pi i \psi_1^{(\xi)} \ldots 2\pi i \psi_p^{(\xi)}$

Ich habe dabei diejenigen linearen Verbindungen der φ, die, vermöge (9), den Differentialen $dv_1 \ldots dv_p$ der Normalintegrale v entsprechen, mit $\psi_1, \ldots \psi_p$ bezeichnet.

Ich schliesse einige Folgerungen an, welche man aus der so verschärften Definition der Integrale zweiter Gattung ohne Mühe ableitet.

Seien $t', t'', \ldots t^m$ irgend m Stellen des algebraischen Gebildes. Wir haben dann in

$$(15) \qquad c'\Upsilon_{t'}^{xy} + c''\Upsilon_{t''}^{xy} + \cdots + c^m\Upsilon_{t^m}^{xy} + C$$

die allgemeinste Integralfunction vor uns, welche an den Stellen $t', t'', \ldots t^{(m)}$ je einfach algebraisch unendlich wird und dabei an den Querschnitten $A_1 \ldots A_p$ durchaus verschwindende Periodicitätsmoduln aufweist. Bestimmen wir jetzt vermöge (14) die $c', c'', \ldots c^{(m)}$ so, dass auch noch die Perioden zweiter Art verschwinden, so haben wir die allgemeinste auf dem Gebilde eindeutige algebraische Function der Stelle x vor uns, welche für $x = t', t'', \ldots t^{(m)}$ einfach unendlich wird. Dies gibt sofort den Riemann'-Roch'schen Satz über die Zahl der in einer solchen Function noch willkürlichen Constanten $c', c'', \ldots c^m$: *die Zahl dieser Constanten ist*

$$(16) \qquad m - p + \tau,$$

wo τ die Zahl der linear unabhängigen linearen Verbindungen der φ ist, die für $t', t'', \ldots t^m$ verschwinden.

Wir betrachten ferner $(p+1)$ Stellen des Gebildes: $t, t', \ldots t^{(p)}$ und bilden die Determinante:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \Upsilon_t^{xy} & \Upsilon_{t'}^{xy} & \Upsilon_{t^{(p)}}^{xy} \\ \psi_1(t) & \psi_1(t') & \psi_1(t^p) \\ & & \\ \psi_p(t) & \psi_p(t') & \psi_p(t^p) \end{vmatrix}.$$

Wir schliessen sofort, dass dies eine algebraische Function der Stelle x (bez. y) ist, welche für $x = y$ verschwindet, dagegen einfach unendlich wird, wenn x (oder y) mit $t, t', \ldots t^{(p)}$ zusammenfällt. Wir wollen diese Function mit dem Zeichen

$$(18) \qquad \mathrm{Alg}(x, y;\ t, t', \ldots t^p)$$

bezeichnen; in den $\varphi(t), \varphi(t'), \ldots$ ist sie beziehungsweise von der $+1^{\text{ten}}$ Dimension. Jetzt wird (17) nach Formel (13) nicht geändert, wenn wir die Υ durch beliebige Y ersetzen; sie ändert sich nur um einen constanten Factor, indem wir statt der ψ die anfänglichen φ einführen. Indem wir diesen constanten Factor mit in die Definition der algebraischen Function (18) aufnehmen, haben wir die Gleichung:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} Y_t^{xy} & Y_{t'}^{xy} & Y_{t^{(p)}}^{xy} \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \varphi_1(t^p) \\ & & \\ \varphi_p(t) & \varphi_p(t') & \varphi_p(t^p) \end{vmatrix} = \mathrm{Alg}(x, y;\ t, t', \ldots t^p).$$

Hier entwickele man jetzt linker Hand nach den Elementen der ersten Verticalreihe und dividire durch den Coefficienten von Y_t^{xy}. Indem wir dann noch der Kürze wegen für die auftretenden linearen Verbindungen der $Y_{t'}^{xy}, \ldots Y_{t^p}^{xy}$ die Zeichen $-Y_1^{xy}, \ldots -Y_p^{xy}$ einführen, erhalten wir:

$$(20) \qquad Y_{(t)}^{xy} = \varphi_1(t) \cdot Y_1^{xy} + \varphi_2(t) \cdot Y_2^{xy} + \cdots + \varphi_p(t) \cdot Y_p^{xy} + \frac{\mathrm{Alg}(x, y;\ t, t_1', \ldots t^p)}{\begin{vmatrix} \varphi_1(t') \ldots \varphi_1(t^p) \\ \\ \varphi_p(t') \ldots \varphi_p(t^p) \end{vmatrix}}.$$

Die hiermit erhaltene Formel ist, von unwesentlichen Aenderungen abgesehen, dieselbe, welche in den Vorlesungen von Hrn. Weierstrass eine bekannte wichtige Rolle spielt [sie wird dort nur in ganz anderer Weise gewonnen, indem die algebraische Function (18) in directer Weise hergestellt und dann in Aggregate von Integralen zweiter Gattung gespalten wird]. Man könnte die von den p Stellen $t', t'', \ldots t^{(p)}$ ab-

hängigen $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ *Normalcombinationen von Integralen zweiter Gattung* nennen. Um ihre Perioden zu erforschen, bilden wir uns zunächst die der Determinantenform (17) entsprechenden Normalcombinationen $\mathsf{Y}_1 \ldots \mathsf{Y}_p$. Für die Perioden der letzteren ergiebt (14) sofort folgendes Schema:

$$(21)\qquad \begin{array}{c|cc|cc} & A_1 \ldots & A_p & B_1 \ldots & B_p \\ \hline \mathsf{Y}_1 & 0 & 0 & 2\pi i & 0 \\ \mathsf{Y}_p & 0 & 0 & 0 & 2\pi i \end{array}$$

Wir schliessen, *dass die Perioden der Normalcombinationen $Y_1, \ldots, Y_p$ von der Auswahl der p Stellen $t', \ldots, t^{(p)}$ unabhängig sind, und also nur von der Wahl des Integrals dritter Gattung P (Formel* (11)), *beziehungsweise der p Integrale erster Gattung w_α, durch welche wir die φ_α bestimmt haben, abhängen. Diese Perioden sind es jetzt, die wir Perioden zweiter Gattung nennen werden.* Der Formel (2) entsprechend bezeichnen wir die Perioden von Y_α an den Querschnitten A_β, B_β mit

$$(22)\qquad -\eta_{\alpha,\beta}, \quad \text{bez.} \quad -\eta_{\alpha,\beta+p}\,.$$

Die Perioden von Y_t werden dann beziehungsweise, nach Formei (20):

$$(23)\qquad -\sum^{\alpha} \varphi_\alpha(t)\,\eta_{\alpha,\beta}, \quad \text{und} \quad -\sum^{\alpha} \varphi_\alpha(t)\,\eta_{\alpha,\beta+p}\,.\text{*)}$$

§ 4.

Die Primform $\Omega(x, y)$.

In den vorigen beiden Paragraphen war $p > 1$ vorausgesetzt. Wir betrachten einen Augenblick die Fälle $p = 0$ und $p = 1$. Es ist sehr leicht, bei ihnen Differentialausdrücke anzugeben, die insofern dem $d\omega$ des vorigen Paragraphen entsprechen, als sie gleichfalls auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werden und dabei, von einem etwaigen constanten Factor abgesehen, den wir nach Belieben zufügen mögen, völlig bestimmt sind. Bei $p = 1$ ist dies das Differential des einen in diesem Falle überhaupt vorhandenen überall endlichen Integrals selbst:

$$(24)\qquad d\omega = dw.$$

Bei $p = 0$ werden wir uns auf dem algebraischen Gebilde zunächst eine solche algebraische Function x construiren, die jeden Werth nur

---

*) Ich habe die Definition der η im Texte um so lieber ausführlich gegeben, als ich in Bd. 32, p. 365 ff. bei den entsprechenden Entwickelungen für den Fall der hyperelliptischen Functionen unnöthige Particularisationen einführte. Die dort benutzten $Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}, \cdots, Z_p^{(t)}$ sind solche Normalverbindungen von Integralen zweiter Gattung, deren sämmtliche Unstetigkeitsstellen in die eine mit t benannte Stelle des hyperelliptischen Gebildes zusammengerückt sind.

einmal annimmt, dieses $x = \frac{x_1}{x_2}$ setzen und endlich $d\omega$ gleich der Determinante $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ wählen:

(25) $$d\omega = (x\,dx).$$

Ich werde jetzt umgekehrt ein wesentliches Element der allgemeinen Theorie einführen, indem ich mit den Fällen $p = 0$ und $p = 1$ beginne.

Bei $p = 0$ und $p = 1$ kann man nämlich einen einfachen nur von zwei Stellen des Gebildes, x und y, abhängigen Ausdruck $\Omega(x, y)$ aufbauen, der nur verschwindet, und zwar wie $d\omega$, wenn die beiden Stellen x, y zusammenrücken, und der nirgends unendlich wird; mit Hülfe dieses Ω lassen sich die zum Gebilde gehörigen Integrale in einfachster Weise darstellen.

Bei $p = 0$ ist einfach

(26) $$\Omega(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Dabei wird die Definition des zum Gebilde $p = 0$ gehörigen Integrals dritter Gattung:

(27) $$P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{(x\xi)\,(y\eta)}{(x\eta)\,(y\xi)}.$$

Bei $p = 1$ ist die Sache ein wenig complicirter. Sei $\vartheta_1(w)$ Jacobi's ungerade Thetafunction, gebildet für das Integral erster Gattung w und seine beiden Perioden ω_1, ω_2. Ich schreibe dann, unter c eine beliebige Constante verstanden:

(28) $$\Theta_1(w) = e^{cw^2} \cdot \vartheta_1(w) : \vartheta_1'(0).$$

Unser Ω entsteht, indem wir in die so definirte „allgemeine" Thetafunction Θ_1 für w den Werth w^{xy} substituiren:

(29) $$\Omega(x, y) = \Theta_1(w^{xy}).$$

Auch hier brauche ich die in Aussicht gestellten Eigenschaften von $\Omega(x, y)$ nicht ausführlich darzulegen. Ich will nur daran erinnern, dass in der That

(30) $$P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{\Theta_1(w^{x\xi}) \cdot \Theta_1(w^{y\eta})}{\Theta_1(w^{x\eta}) \cdot \Theta_1(w^{y\xi})}$$

ein zum Gebilde $p = 1$ gehöriges Integral dritter Gattung definirt (und zwar ein solches, welches Vertauschung von Parameter und Argument gestattet); — den unendlich vielen Formen, welche die Function Θ_1 in (28) der Willkür des c entsprechend annehmen kann, entsprechen die verschiedenen Definitionen, die bei einem solchen Integral dritter Gattung noch möglich sind. Lässt man x auf dem algebraischen Gebilde einen Periodenweg beschreiben, bei welchem w um ω, das zu P und w gehörige Integral zweiter Gattung Y um $-\eta$ zunimmt, so erhält $\Omega(x, y)$, nach (29), den Factor

(31) $$-e^{\eta\left(w^{xy} + \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Gelten hier η und ω als bekannt, so giebt uns dies eine Definition der Grösse w^{xy}. Man kann also in der That sämmtliche Integrale von Ω beginnend definiren.

Ich sage nun, dass sich diese Theorie vermöge des im vorigen Paragraphen für $p > 1$ eingeführten Differentialausdrucks $d\omega$ ungeändert auf den Fall eines grösseren p überträgt.

Wir müssen zu dem Zwecke die Formelgruppen (26), (27) und (29), (30) umkehren. Dies gelingt, wie man sofort nachrechnet, durch die gemeinsame Formel:

$$(32) \qquad \Omega(x, y) = \left(\sqrt{d\omega_x \cdot d\omega_y \cdot e^{-P_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}}\right)_{\lim dx=0,\, dy=0},$$

wo $d\omega$ durch (25), bez. (24) definirt ist und natürlich das Vorzeichen der Quadratwurzel durch passende Verabredung festzulegen ist.

Eben diese Formel, in der wir $d\omega$ durch (10) erklären, unter P aber irgend ein zum algebraischen Gebilde gehöriges Integral dritter Gattung verstehen, ist uns jetzt die Definition des $\Omega(x, y)$ in den höheren Fällen.

In der That verificirt man sofort, dass das durch (32) gegebene Ω auch bei höherem p nur für $x = y$ verschwindet, und zwar bei geeigneter Wahl der Quadratwurzel wie $d\omega_x$ selbst, niemals aber unendlich wird. Eine Formel, ganz ähnlich gebaut wie (27) oder (30), giebt uns sodann eine Definition des P durch Ω*). Um von Ω aus die Integrale erster Gattung zu definiren, bestimmen wir wieder den Factor, um den Ω wächst, wenn x auf dem algebraischen Gebilde einen geschlossenen Weg durchläuft, der für die w_α die Perioden ω_α, für die Y_α die Perioden $-\eta_\alpha$ liefert; wir finden:

$$(33) \qquad \pm e^{\sum^\alpha \eta_\alpha \left(w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_\alpha}{2}\right)};$$

hier ist das Zeichen $\pm$ an sich unbestimmt, weil Ω eine Form $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Dimension in den $\varphi(x)$ bez. den $\varphi(y)$ ist. — Ich werde das Ω, welches mit dem Integral dritter Gattung Π gebildet ist, im Folgenden gelegentlich Ω_Π nennen; für das allgemeine Ω_P hat man dann nach Formel (8):

$$(34) \qquad \Omega(x, y)_P = \Omega(x, y)_\Pi \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{xy}}.$$

*) Dabei ist vorausgesetzt, dass P Vertauschung von Parameter und Argument gestattete; ist dies nicht der Fall, so wird durch (32) nach wie vor ein brauchbares $\Omega(x, y)$ definirt, die Anwendung von (27), (30) führt aber nicht zu $P_{\xi\eta}^{xy}$ sondern zu $\frac{1}{2}\left(P_{\xi\eta}^{xy} + P_{xy}^{\xi\eta}\right)$ zurück.

Das so gewonnene $\Omega(x, y)$ ist nun diejenige *Primform*, deren allgemeine Einführung ich bereits in Bd. 32, p. 363 (Fussnote) in Aussicht nahm. Ich kann nicht zweifeln, dass dieselbe für die allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde nach den verschiedensten Richtungen hin Bedeutung gewinnen wird. Wenn ich dieselbe im Folgenden nur erst zur Construction der Thetafunctionen benutze, so ist das eben nur eine von den verschiedenen möglichen Anwendungen. Vorbehaltlich der Ergänzungen, welche der folgende Paragraph bringt, denke ich mir den Fortschritt, der in der Einführung der von zwei Stellen des algebraischen Gebildes abhängigen Primform statt des von vier Stellen abhängenden Integrals dritter Gattung liegt, genau so, wie den Fortschritt von der projectiven Geometrie der geraden Linie, welche nur Doppelverhältnisse von vier Punkten kennt, bez. (bei der Lehre von der projectiven Massbestimmung) mit Logarithmen solcher Doppelverhältnisse operirt, zur binären Invariantentheorie, welche die Determinante (xy) als einfachstes Gebilde zu Grunde legt. Ich habe in Bd. 32 l. c. der nahen Beziehung gedacht, welche zwischen der *Primform* $\Omega(x,y)$ und der von Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzten *Primfunction* $E(x, y)$ besteht: Weierstrass würde ohne Zweifel das $\Omega(x, y)$ selbst eingeführt haben, wenn er sich hätte entschliessen können, bei Fragen dieser Art in der hier benutzten Weise mit homogenen Variabelen zu operiren. Noch näher kommt dem $\Omega(x, y)$ vermöge seines besonderen Ausgangspunktes Herr Schottky in seiner Abhandlung „Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt" (Journal für Mathematik, Bd. 101, 1887). Herr Schottky behandelt daselbst die Darstellung algebraischer Gebilde durch solche eindeutige Functionen einer Variabelen η mit linearen Transformationen in sich, welche auf der ganzen η-Kugel existiren (eben die Darstellung, welche nach dem von mir in Band 19 dieser Annalen (1881) aufgestellten Satze allgemein gültig ist). Dabei erscheint ihm (pag. 242 l. c.) ein von zwei Stellen des Gebildes abhängiges unendliches Product fundamental, das er, der Weierstrass'schen Bezeichnung entsprechend, mit E benennt:

$$E(\xi, \eta) = (\xi - \eta) \cdot \prod \frac{(\xi - \eta_n)(\eta - \xi_n)}{(\xi - \xi_n)(\eta - \eta_n)};$$

mit seiner Hülfe erzeugt er alle anderen für ihn in Betracht kommenden Functionen. Hier sind ξ, η die transcendenten Argumente, durch welche die beiden Stellen des algebraischen Gebildes, die wir x, y nennen, gegeben werden; $E(\xi, \eta)$ *ist in Folge dessen mit unserer Primform* $\Omega(x, y)$ *so gut wie identisch.* Man hat nur, um letztere zu erhalten, ξ in geeigneter Weise gleich $\xi_1 : \xi_2$, η gleich $\eta_1 : \eta_2$ zu setzen, worauf

$$\Omega(x, y) = \xi_2 \eta_2 E(\xi, \eta)$$

ist, sich also durch ein unendliches Product darstellt, dessen einzelne Factoren Determinanten vom Typus $(\xi\eta) = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$ sind:

$$\Omega(x, y) = (\xi\eta) \cdot \prod \frac{(\xi\eta_n)\,(\eta\xi_n)}{(\xi\xi_n)\,(\eta\eta_n)}.$$

Die hiermit gegebene formal ganz unbedeutende Modification des Schottky'schen Ansatzes ist für die Auffassung von fundamentaler Bedeutung. Indem das E des Hrn. Schottky für $\xi = \infty$ oder $\eta = \infty$ selbst unendlich wird, verhält es sich auf dem ursprünglichen algebraischen Gebilde durchaus complicirt und lässt in keiner Weise das einfache Verhalten erkennen, welches das $\Omega(x, y)$ thatsächlich besitzt*).

§ 5.

Von den Mittelformen.

Wir betrachten jetzt auf unserem algebraischen Gebilde für einen Augenblick algebraische Functionen, die auf dem Gebilde eindeutig sind, dieselben, die wir oben (§ 3) aus Integralen zweiter Gattung zusammensetzten. Die Primform Ω ergiebt bei beliebigem p eine Darstellung dieser Functionen, die für $p = 0$ wie für $p = 1$ sehr bekannt ist. In der That, seien die a_i die Nullpunkte, die b_i die Unendlichkeitspunkte einer solchen Function R, so hat man

$$R = \frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{\prod_i \Omega(x, b_i)}. \tag{35}$$

Wie aber steht es mit der analogen Darstellung algebraischer *Formen?* Wir müssen, ehe wir diese Frage beantworten, die Bedeutung des

---

*) Für eine specielle Art algebraischer Gebilde, nämlich die ebenen Curven n^{ter} Ordnung, welche keine singulären Punkte besitzen, wird Herr Pick in Bd. 29 der Mathematischen Annalen in der noch wiederholt zu nennenden Arbeit „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (1886) ebenfalls ganz in die Nähe der Primform $\Omega(x, y)$ geführt. In der That ist, für den dort vorliegenden Fall, der p. 267 l. c. gegebene Ausdruck:

$$\frac{(hxy)^2}{a_h a_x^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}} \cdot e^{\mathrm{H}(xy)}$$

geradezu das Quadrat unseres Ω. Herr Pick bemerkt auch die ausgezeichnete Eigenschaft dieses Ausdrucks, nirgends unendlich zu werden und nur bei $x = y$ zu verschwinden; er zieht daraus aber keine allgemeine Folgerung betr. die Bedeutung seines Ausdrucks, wie er denn insbesondere nicht entwickelt, dass auch noch die Quadratwurzel aus dem Ausdrucke (eben unser Ω) auf dem algebraischen Gebilde unverzweigt ist.

Wortes Form noch erst genauer festlegen. Im allgemeineren Sinne wird dies erst weiter unten (§ 7) geschehen. Indem wir den Fall $p=1$ vorläufig ausschliessen, wollen wir uns hier mit einer vorläufigen Definition für $p=0$ und $p>1$ begnügen. Im Falle $p=0$ verstehen wir hier unter einer algebraischen Form eine homogene rationale ganze Function der im vorigen Paragraphen eingeführten x_1, x_2. Im Falle $p>1$ wollen wir als algebraische Form eine homogene rationale ganze Function der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ bezeichnen, durchaus den Erläuterungen des § 2 entsprechend. Möge nun eine solche Form F an den Stellen a_i des algebraischen Gebildes verschwinden. Wir werden dann für $p=0$ bei geeigneter Wahl der absoluten Werthe der den a_i zugehörigen homogenen Coordinaten sofort schreiben können:

$$F = \prod_i (x\, a_i).$$

Ist aber $p>1$ und wir bilden das entsprechende Product

$$\prod_i \Omega(x, a_i),$$

so wird dasselbe, weil transcendent, keineswegs mit F übereinstimmen. *Den Quotienten*

$$\frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{F} \tag{36}$$

betrachte ich als Definition einer neuen, auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werdenden Form. Ich bezeichne alle so entstehenden Formen als *Mittelformen*, weil sie, sozusagen, zwischen den transcendenten Ω-Producten und den algebraischen Formen in der Mitte stehen.

In der hiermit gegebenen Definition liegt noch, was man wohl beachten möge, eine gewisse Unbestimmtheit. Eine jede der im Zähler von (36) auftretenden Primformen kann nach (33), unabhängig von jeder anderen, um einen Factor

$$\pm e^{\sum_\alpha \eta_\alpha^{(i)} \left(w_\alpha^{x a_i} + \frac{\omega_\alpha^{(i)}}{2}\right)}$$

modificirt werden. Ich werde einen solchen Factor, der Ausdrucksweise von Weierstrass folgend, eine *Einheit* nennen. Dann kann also unser Quotient um das folgende Product von Einheiten modificirt werden:

$$\pm e^{\sum_i \sum_\alpha \eta_\alpha^{(i)} \left(w_\alpha^{x a_i} + \frac{\omega_\alpha^{(i)}}{2}\right)}.$$

Aber unter den so entstehenden Werthen hängen augenscheinlich nur diejenigen analytisch zusammen, die sich um einen Einheitsfactor folgender Form unterscheiden:

$$e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\sum_i w_\alpha^{x a_i} + \frac{n \omega_\alpha}{2}\right)},$$

unter n die (nothwendig gerade) Zahl der Nullstellen a_i verstanden. *Unser Quotient* (36) *schliesst also unendlich viele unter einander analytisch nicht zusammenhängende Werthereihen in sich.* Wenn wir also unseren Quotienten als ein analytisch wohlbestimmtes Gebilde behandeln, so ist dabei die Voraussetzung, dass wir irgend eine dieser unendlich vielen Werthereihen fest gewählt haben. Von der einen Werthereihe können wir hernach zu jeder anderen durch Zufügung geeigneter Einheitsfactoren übergehen.

Wir überzeugen uns jetzt, *dass wir, von solchen Einheitsfactoren abgesehen, alle Mittelformen* (36) *auf eine einzige* $m(x)$ *zurückführen können.* Wir definiren dieses $m(x)$, indem wir in (36) für F irgend eine Linearform $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_p\varphi_p$ einführen, deren $2p-2$ Nullpunkte wir c_i nennen wollen:

$$(37) \qquad m(x) = \frac{\prod_i \Omega(x, c_i)}{C_1\varphi_1 + \cdots + C_p\varphi_p}.$$

In der That wird (36), für irgend eine Form ν^{ten} Grades der φ gebildet, von der ν^{ten} Potenz des so gewonnenen $m(x)$ nur um Einheitsfactoren verschieden sein können. Um dies zu sehen genügt es, den betreffenden Quotienten (36) durch $m(x)^\nu$ zu dividiren und die entstehende Function von x auf der Riemann'schen Fläche, auf der sie keinerlei Null- oder Unendlichkeitsstellen hat, auf ihre Periodicitätseigenschaften zu untersuchen.

Das durch (37) eingeführte $m(x)$ ist in dem allgemeinen Sinne des § 2 eine Form $(-p)^{\text{ten}}$ Grades in den φ der Stelle x. Beschreibt x einen Periodenweg, bei welchem die w_α um ω_α, die Y_α um $-\eta_\alpha$ wachsen, so erhält $m(x)$ einen Factor, den ich folgendermassen schreiben will:

$$(38) \qquad e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(W_\alpha^x + (p-1)\omega_\alpha\right)}.$$

Hier bedeutet W_α^x die Integralsumme:

$$(39) \qquad W_\alpha^x = w_\alpha^{x c_1} + w_\alpha^{x c_2} + \cdots + w_\alpha^{x c_{2p-2}};$$

ich habe dieselbe mit einem besonderen Zeichen belegt, weil dieselbe, dem Abel'schen Theorem zufolge, von der besonderen Linearform C_φ, deren Verschwindungspunkte die c_i sind, unabhängig ist.

Wir könnten $m(x)$ die *fundamentale Mittelform* nennen. Inzwischen bestimmt uns die Rücksicht auf die folgenden Entwickelungen des § 6 und 9, diesen Namen lieber für die $(2p-2)^{\text{te}}$ Wurzel aus $m(x)$ in Anwendung zu bringen:

$$\mu(x) = \sqrt[2p-2]{m(x)}. \tag{40}$$

Hierdurch wird ja zunächst, bei der Vieldeutigkeit des Wurzelzeichens, eine neue Unbestimmtheit eingeführt. Allein diese Unbestimmtheit ist weiterhin ohne Belang, insofern in den späteren Formeln immer so viele Factoren μ mit einander multiplicirt auftreten, dass alle Vieldeutigkeit wegfällt, sobald man an der selbstverständlichen Regel festhält, dass man für neben einander stehende Factoren μ immer nur die gleiche Definition in Anwendung bringt. Es ist dies mit Absicht etwas ungenau ausgedrückt. In der That zeigt sich, dass in den bald zu betrachtenden speciellen Fällen statt $\mu(x)^{2p-2}$ schon $\mu(x)^m$, wo m ein Theiler von $2p-2$ ist, durch eine Formel vom Typus (36), (37) definirt werden kann, so dass dann zur Weghebung der in Rede stehenden Unbestimmtheit nur eine kleinere Zahl von Factoren $\mu(x)$ zusammenzutreten braucht.

Die Mittelformen sind meines Wissens bislang in der Literatur nicht aufgetreten. In Band 32 der Annalen konnte ich die Darstellung des dort zu behandelnden hyperelliptischen Falles so wenden, dass es noch nicht nöthig war, von Mittelformen zu sprechen. Anders verfuhr ich in einer vorher über denselben Gegenstand in den Göttinger Nachrichten publicirten Note (Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente, Nov. 1887). Dort benutzte ich einen Ausdruck $X(x)$, der dem $\mu(x)$ sehr nahe steht. Es ist nämlich im Sinne der damals gebrauchten Bezeichnung:

$$\mu(x) = \left(\frac{X(x)}{\sqrt{f(x)}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

§ 6.

Fälle besonders einfacher algebraischer Darstellung.

Die bisher gegebenen Definitionen knüpften, wie dies in § 1 in Aussicht genommen war, durchaus an die Grundvorstellungen der Riemann'schen Theorie an, sie machten keinerlei Voraussetzungen oder Angaben darüber, wie das in Betracht zu ziehende algebraische Gebilde algebraisch dargestellt sein sollte. Wir wenden uns jetzt zu der Frage, ob es nicht eine solche Darstellung giebt, die für unsere Zwecke besonders geeignet ist. Um in dieser Hinsicht bestimmte Ideen zu gewinnen, betrachten wir vorab zwei Fälle algebraischer Darstellung, die zu besonders einfachen Resultaten führen, so dass sie für die höheren Fälle einen Fingerzeig abzugeben scheinen. Das eine Mal handelt es sich um die hyperelliptischen Gebilde, betreffs deren ich zumal auf die in Bd. 32 gegebenen Formeln verweisen will, das andere

Mal um die ebenen Curven ohne Doppelpunkt, wegen deren man neben den Arbeiten von Clebsch insbesondere die bereits genannte Abhandlung von Pick im 29ten Bande der Annalen vergleichen mag.

Im hyperelliptischen Falle gestalten sich die Verhältnisse folgendermassen. Wir haben eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche, die durch die Quadratwurzel aus einer Binärform $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\sqrt{f_{2p+2}(z_1\, z_2)} \tag{41}$$

definirt ist. Das zugehörige $d\omega$ wird:

$$d\omega_z = \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1 z_2)}}. \tag{42}$$

In Folge dessen decken sich die φ mit den rationalen ganzen Formen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades der z_1, z_2; wir können insbesondere setzen:

$$\varphi_1(z) = z_1^{p-1},\ \varphi_2(z) = z_1^{p-2} z_2, \ldots, \varphi_p(z) = z_2^{p-1}, \tag{43}$$

woran sich die weiteren Formeln schliessen:

$$w_1^{xy} = \int_y^x \varphi_1(z)\,d\omega_z,\ w_2^{xy} = \int_y^x \varphi_2(z)\,d\omega_z, \cdots, w_p^{xy} = \int_y^x \varphi_p(z)\,d\omega_z. \tag{44}$$

Aber auch die Definition der Integrale dritter Gattung wird einfach. Dieselben erscheinen als Doppelintegrale algebraischer Ausdrücke von übersichtlicher Bauart. Invariantentheoretische Betrachtungen, auf deren Einzelheiten ich hier nicht einzugehen habe, lassen dabei unter allen möglichen Integralen dritter Gattung eines, Q, als besonders bevorzugt erscheinen. Sei $f(z)$ symbolisch gleich a_z^{2p+2} gesetzt, so ist Q durch folgende Formel gegeben

$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z d\omega_\zeta \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{f\zeta} + a_z^{p+1} a_\zeta^{p+1}}{2(z\zeta)^2}; \tag{45}$$

aus ihm entsteht das allgemeine $P_{\xi\eta}^{xy}$, indem man eine beliebige bilineare Combination der w^{xy} und $w^{\xi\eta}$ hinzufügt (oder, was dasselbe ist, unter dem doppelten Integralzeichen eine beliebige bilineare Combination der $\varphi(z)$ und $\varphi(\zeta)$). — Des Ferneren ergiebt sich eine Darstellung der Primform, bei welcher der in Formel (32) postulirte Grenzübergang vollzogen ist. Bezeichnet man nämlich mit $\bar{x}$, $\bar{y}$ die Stellen, welche zu x, y conjugirt sind (d. h. sich von den Stellen x, y nur durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel $\sqrt{fx}$, $\sqrt{fy}$ unterscheiden), so kommt:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt{fx \cdot fy}} \cdot e^{\frac{1}{2} P_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}. \tag{46}$$

Endlich wird die Definition der Mittelform $\mu(x)$ jetzt besonders einfach,

indem wir auf dem hyperelliptischen Gebilde neben den algebraischen Formen, die wir im vorigen Paragraphen ausschliesslich betrachteten, nämlich den rationalen ganzen Formen der $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, die sich in den z_1, z_2 vermöge (43) als rationale ganze Formen von einem durch $(p-1)$ theilbaren Grade darstellen, überhaupt rationale ganze Formen der z_1, z_2 betrachten können. Wir werden insbesondere eine lineare Form dieser Art in Betracht ziehen: $C_1 z_1 + C_2 z_2$; ihre Verschwindungsstellen sollen $c, \bar{c}$ heissen. Statt (37), (40) können wir dann schreiben

$$(47) \qquad \mu(x)^2 = \frac{\Omega(x,c)\cdot\Omega(x,\bar{c})}{C_1 x_1 + C_2 x_2},$$

so dass also jetzt, entsprechend der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Andeutung, die 2^{te} Potenz von $\mu(x)$ ebenso definirt erscheint, wie früher, im allgemeinen Falle, die $(2p-2)^{\text{te}}$.

Bei den ebenen Curven m^{ter} Ordnung, welche keinen Doppelpunkt (d. h. überhaupt keinen singulären Punkt) besitzen und also dem Geschlecht

$$(48) \qquad p = \frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{2}$$

angehören, kommen Formeln ganz ähnlicher Art vor. Um diesen Formeln volle Symmetrie zu ertheilen, muss man in dieselben bekanntlich, da es sich um ternäre Bildungen handelt, Reihen willkürlicher Grössen einführen. Herr Pick benutzt zu dem Zwecke, wie es zumeist üblich ist, die Coordinaten eines Hülfspunktes h. Inzwischen ist es im Interesse der späteren Verallgemeinerung zweckmässig, statt des Punktes h die Coordinaten zweier sich in ihm kreuzender gerader Linien α, β einzuführen. Sei jetzt

$$(49) \qquad f(z_1 z_2 z_3) = 0$$

die Gleichung der Curve, $\alpha_z = 0$, $\beta_z = 0$ sind die beiden willkürlichen Geraden, $(f\alpha\beta)$ die Functionaldeterminante von $f(z)$, α_z, β_z. Dann hat man vor allen Dingen die folgende Darstellung des zur Curve gehörigen Differentials $d\omega$:

$$(50) \qquad d\omega_z = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{(f\alpha\beta)}.$$

Es ergeben sich sodann die φ als identisch mit den rationalen ganzen Formen $(m-3)^{\text{ten}}$ Grades der z_1, z_2, z_3, also etwa:

$$(51) \qquad \varphi_1(z) = z_1^{m-3},\ \varphi_2(z) = z_1^{m-2} z_2,\ \ldots,\ \varphi_p(z) = z_3^{m-3},$$

womit die zugehörigen Integrale erster Gattung $w_1, w_2, \ldots, w_p$ definirt sind. Die Integrale dritter Gattung wird man wieder als Doppelintegrale darzustellen suchen. Abermals sind es invariantentheoretische Ueberlegungen, die in dieser Hinsicht zu einer bestimmten einfachsten Normalform Q führen. Sei $f(z)$ symbolisch gleich a_z^m; α_z, β seien

wieder zwei willkürliche Linearformen (die übrigens von den in (50) benutzten ganz unabhängig zu denken sind). Dann lautet das von Herrn Pick aufgestellte Q folgendermassen*):

$$(52) \qquad Q_{\xi\eta}^{xy} =$$

$$= \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z \, d\omega_\zeta \cdot \frac{\sum_1^m \left((a\alpha\beta) a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu} \cdot (a\alpha\beta) a_z^{m-\nu} a_\zeta^{\nu-1} \right) - \sum_1^{m-1} \left((a\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu-1} \cdot a_z^{m-\nu} a_\zeta^{\nu} \right)}{m(\alpha_z \beta_\zeta - \beta_z \alpha_\zeta)^2};$$

aus ihm ergiebt sich wieder das allgemeine $P_{\xi\eta}^{xy}$ durch Hinzufügung einer bilinearen Verbindung der w^{xy}, $w^{\xi\eta}$. Wir haben ferner eine explicite Darstellung der Primform. Zu dem Zwecke muss man die $(m-1)$ von der Stelle x verschiedenen Stellen

$$x', x'', \ldots, x^{(m-1)}$$

der Curve $f=0$ einführen, für welche (ebenso wie für x selbst)

$$\alpha_x \beta_z - \beta_x \alpha_z = 0,$$

desgleichen die $(m-1)$ Stellen

$$y', y'', \ldots, y^{(m-1)},$$

die sich in entsprechender Weise aus y ableiten lassen. Man hat dann**):

$$(53) \qquad \Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y}{\sqrt{(a\alpha\beta) a_x^{m-1} \cdot (a\alpha\beta) a_y^{m-1}}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_1^{m-1} P_{xy}^{x^i y^i}}.$$

Für die Mittelform $\mu(x)$ ergiebt sich dem allgemeinen Anzatze des vorigen Paragraphen gegenüber wieder eine Vereinfachung. In der That können wir jetzt alle homogenen rationalen ganzen Verbindungen der $x_1\, x_2\, x_3$ als Formen auf der Curve betrachten. Sei nun C_x eine Linearform dieser Art; ihre Nullstellen heissen $c', c'', \ldots, c^{(m)}$. Wir setzen dann einfach:

$$(54) \qquad \mu(x)^m = \frac{\prod_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}.$$

Ich will noch ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass die Formeln dieses Paragraphen ungeändert in Geltung bleiben auch wenn

---

*) Man kann dasselbe für $f(z) = a_z^m = b_z^m = c_z^m$ in die folgende Gestalt symbolisch umrechnen;

$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z \, d\omega_\zeta \cdot \frac{(abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=m-2} a_z^\varkappa b_z^\lambda c_z^\mu a_\zeta^{\lambda+\mu} b_\zeta^{\mu+\varkappa} c_\zeta^{\varkappa+}}{6 m a_\zeta^{m-1} a^z},$$

wo im Zähler eine aus der Theorie der Doppeltangenten bekannte Covariante steht.

**) Vergl. die Fussnote auf pag. 14.

$p = 0$ oder $p = 1$ ist. Damit sind also, der Beschränkung des vorigen Paragraphen entgegen, Mittelformen auch im Falle $p = 1$ definirt. Nur haben dieselben keine absolute Bedeutung, sondern hängen von der besonderen Gleichungsform ab, in der wir das elliptische Gebilde als gegeben voraussetzen.

§ 7.

Allgemeines über algebraische Formen auf einer Curve.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir den Begriff der *algebraischen Form* auf einer algebraischen Curve noch in allgemeinerem Sinne festlegen, als dies im vorigen Paragraphen geschehen ist, wobei wir gleich Gelegenheit nehmen den wichtigen Begriff des *vollen Formensystems* einzuführen.

Von den beiden im vorigen Paragraphen betrachteten Fällen betrifft der eine (der hyperelliptische) eine solche Curve, die den eindimensionalen Raum der $z_1 : z_2$ doppelt überdeckt, der andere eine Curve des zweidimensionalen Raumes der $z_1 : z_2 : z_3$, welche nur der einen Beschränkung unterliegt, keine singulären Punkte zu besitzen.

Indem wir diese beiden Fälle umfassen, denken wir uns jetzt im $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume der $z_1 : z_2 : \cdots : z_n$ eine Curve m^{ter} Ordnung gegeben, welche keinerlei singuläre Punkte (Doppelpunkte, Spitzen etc.) besitzen soll, die aber gerne in eine mehrfache Ueberdeckung einer Curve niederer Ordnung ausgeartet sein kann (wo wir uns dann diese verschiedenen Ueberdeckungen durch Verzweigungspunkte in irgendwelcher Weise verbunden denken mögen).

Was wollen wir im allgemeinsten Sinne unter einer *algebraischen Form δ^{ten} Grades* auf dieser Curve verstehen? Sicher wird uns eine rationale ganze homogene Function δ^{ten} Grades der $z_1, z_2, \ldots, z_n$, G_δ, ein Beispiel hierfür sein. Wir haben uns im vorigen Paragraphen auf dieses Beispiel beschränkt. Wir knüpfen jetzt an den allgemeinen Begriff der auf der Curve eindeutigen algebraischen *Function* an. Wir werden verabreden, *dass wir jede solche homogene, ganze, algebraische Verbindung δ^{ten} Grades der $z_1, z_2, \ldots, z_n$, Γ_δ, eine algebraische Form δ^{ten} Grades nennen wollen, die durch eine Form G_δ dividirt eine auf der Curve eindeutige algebraische Function ergiebt.* Die $m\delta$ Nullstellen einer Form Γ_δ sind also schlechtweg solche Punkte der Curve, welche zu irgend $m\delta$ Punkten $G_\delta = 0$ äquivalent sind*).

---

*) Nach der Ausdrucksweise von Dedekind und Weber im 92^{ten} Bande des Journals für Mathematik (Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, 1880); Brill und Nöther gebrauchen für denselben Begriff das Wort „corresidual", welches aber im Zusammenhange des Textes weniger zweckmässig scheint.

Die so gegebene allgemeine Definition ist mit den Entwickelungen des vorigen Paragraphen nicht im Widerspruche, aber sie erweitert dieselbe für den Fall des hyperelliptischen Gebildes. Sie lässt uns nämlich die Quadratwurzel $\sqrt{f_{2p+2}(z_1 z_2)}$ als eine zum Gebilde gehörige algebraische Form $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades erscheinen. Bei der ebenen Curve $f=0$ tritt eine solche Erweiterung nicht ein: die zu $f=0$ gehörigen Γ decken sich einfach, auf Grund bekannter Sätze der analytischen Geometrie, mit den rationalen ganzen Formen der z_1, z_2, z_3. Bei dem hyperelliptischen Gebilde setzt sich die Gesammtheit der Γ erst aus $z_1, z_2, \sqrt{f_{2p+2}}$ zusammengenommen rational und ganz zusammen.

Wir haben mit diesen letzten Bemerkungen thatsächlich bereits den Begriff des vollen Formensystems berührt. *Allgemein werde ich als ein zu unserer Curve gehöriges volles Formensystem jede solche Zusammenstellung zugehöriger algebraischer Formen $\Gamma', \Gamma'', \ldots$ bezeichnen, durch deren Formen sich alle anderen zur Curve gehörigen algebraischen Formen rational und ganz darstellen.*

Die hiermit besprochenen Ideenbildungen finden sich in der Literatur von zwei Seiten her bearbeitet, von geometrischer und von arithmetischer Seite.

In ersterer Hinsicht will ich insbesondere auf die bereits oben genannte Arbeit von Herrn Nöther verweisen, in welcher derselbe die Normalcurve der φ untersucht (Math. Ann. Bd. 17: Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, 1880). Herr Nöther entwickelt daselbst ein Resultat, welches für uns besonders wichtig ist. In unsere Ausdrucksweise übersetzt besagt dasselbe, *dass für die Normalcurve der φ* (sofern wir den hyperelliptischen Fall ausnehmen, der hier in der That eine Sonderstellung einnimmt) *die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ selbst ein volles Formensystem bilden.*

In letzterer Hinsicht habe ich auf die gerade genannte Arbeit der Herren Dedekind und Weber, sowie auf die im 91^{ten} Bande des Journ. für Mathematik veröffentlichte Abhandlung von Hrn. Kronecker zu verweisen (Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabelen, 1881). Es seien α_z, β_z zwei lineare Formen der z, welche für keinen Punkt unserer Curve gemeinsam verschwinden. Wir setzen:

$$\alpha_z : \beta_z = x = x_1 : x_2$$

(projiciren also unsere Curve m^{ter} Ordnung durch das Büschel linearer Mannigfaltigkeiten

$$\alpha_z - x \cdot \beta_z = 0$$

auf die x-Axe, wodurch letztere m-fach überdeckt wird). Ist nun eine Form Γ_δ vorgelegt, so wird $\frac{\Gamma_\delta}{x_2^\delta}$ eine auf unserem Gebilde eindeutige algebraische Function sein, welche nur bei $x=\infty$ unendlich wird.

Dies ist aber gerade, was die genannten Herren schlechtweg als eine zum Gebilde gehörige *ganze* algebraische Function bezeichnen. Ist umgekehrt eine solche ganze algebraische Function gegeben, die bei $x = \infty$ höchstens δ-fach unendlich wird, so wird ihr Product mit x_2^δ eine Form Γ_δ vorstellen. „Ganze algebraische Functionen" und „algebraische Formen" stehen einander also sehr nahe; der Unterschied liegt in der Hauptsache darin, dass wir homogene Veränderliche einführen und uns dadurch von der dem Wesen der Sache fremden Bevorzugung des Werthes $x = \infty$ freimachen. In der That können wir denn auch den genannten Arbeiten ein für uns wichtiges Resultat entnehmen. Es wird dort nämlich gezeigt, dass man allemal ein System von $(m-1)$ ganzen Functionen

$$F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$$

so aussuchen kann, dass jede andere ganze Function sich in der Form darstellen lässt:

$$g + g_1 F_1 + g_2 F_2 + \cdots + g_{m-1} F_{m-1},$$

unter den g rationale ganze Functionen von x verstanden. Das heisst, in unsere Sprache übertragen, dass allemal $(m-1)$ algebraische Formen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-1}$$

mit x_1, x_2 zusammen ein volles Formensystem bilden, durch welches sich alle anderen algebraischen Formen besonders einfach ausdrücken lassen. Im hyperelliptischen Falle ist dieses Formensystem von dem bei uns benutzten nicht verschieden, im Falle der ebenen Curve aber, wie in dem der Normalcurve der φ, dürfte es für die Anwendung complicirter sein als das von uns angegebene System der x_1, x_2, x_3, beziehungsweise der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Ich gebe diese Erläuterungen über volle Formensysteme übrigens wesentlich nur zur allgemeinen Orientirung. Ich werde die folgende Darstellung so wählen, dass ich betreffs derselben keinerlei allgemeine Kenntniss voraussetze; vielmehr dienen mir die vollen Systeme nur zur Exemplicificirung in einzelnen Fällen.

§ 8.

Kanonische Curven.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen und die anderen, von denen wir in §§ 2, 5 ausgingen, widersprechen einander gewissermassen: damals definirten wir Formen auf dem algebraischen Gebilde ganz allgemein von den φ aus, jetzt knüpfen wir zu demselben Zwecke an eine bestimmte Art algebraischer Darstellung des Gebildes an, indem wir uns dasselbe als Curve m^{ter} Ordnung im Raume von $(n-1)$ Dimensionen gelegen denken. Die zweierlei Festsetzungen stimmen

nur in einem einzigen Falle überein, wenn nämlich die C_m mit der Normalcurve der φ identisch ist (wobei wir dann noch, um den Nöther'schen Satz anwenden zu können, den hyperelliptischen Fall bei Seite lassen müssen). Inzwischen zeigen die beiden Beispiele des § 6, dass doch auch noch auf andere Weise eine Verträglichkeit der zweierlei Auffassungen herbeigeführt werden kann. Beim hyperelliptischen Gebilde sind die linearen Verbindungen der φ mit den Verbindungen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades der z_1, z_2, bei den ebenen Curven m^{ter} Ordnung, die wir betrachteten, mit den Verbindungen $(m-3)^{\text{ten}}$ Grades der z_1, z_2, z_3 identisch; *dadurch wird erreicht, dass alle rationalen ganzen homogenen Verbindungen der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ in den beiden Fällen algebraische Formen auch im Sinne des § 7 sind.* Ich werde alle Curven, bei denen etwas Aehnliches Statt hat, *kanonische Curven* nennen.

Kanonische Curven sind also unter den in § 7 betrachteten Curven solche, bei denen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ algebraische Formen, sagen wir vom d^{ten} Grade, der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind. Es ist dies auf Grund bekannter Aequivalenzbetrachtungen dasselbe, als wenn wir sagten, dass die Gesammtheit der linearen Verbindungen der φ mit der Gesammtheit der algebraischen Formen d^{ten} Grades der z identisch ist.

Auf Grund dieser Definition ergeben sich sofort zwei Eigenschaften, welche für die kanonischen Curven charakteristisch sind.

Erstlich beachte man, dass eine φ in $2p-2$ Punkten verschwindet; es ist daher

$$2p-2 = md; \tag{55}$$

die Ordnung m der kanonischen Curve ist ein Theiler von $2p-2$.

Zweitens seien α_z, β_z irgend zwei lineare Formen der $z_1, \ldots, z_n$, welche für keinen Punkt der kanonischen Curve gemeinsam verschwinden. Der Differentialausdruck

$$\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz} \tag{56}$$

verschwindet dann in

$$2m + 2p - 2 = m(d+2)$$

Punkten der Curve. *Ich sage, dass diese $m(d+2)$ Punkte die Nullstellen einer algebraischen Form Γ_{d+2} sind.* In der That, sei vorübergehend dW dasjenige überall endliche Differential, welches durch die Gleichung:

$$dW = \beta_z^d \cdot d\omega$$

definirt ist. Der Differentialquotient

$$-d\left(\frac{\alpha_z}{\beta_z}\right) : dW$$

ist dann eine auf der Curve eindeutige algebraische Function, welche

in den genannten $m(d+2)$ Punkten verschwindet. Aber die Unendlichkeitspunkte dieser Function liegen $(d+2)$-fach zählend in den Punkten $\beta_z = 0$; sie sind also die Nullstellen einer $G_{d+2}(z)$ [um diese im vorigen Paragraphen gelegentlich gebrauchte Bezeichnung wieder aufzunehmen]. Daher sind die Nullstellen der Function nach der Definition der Γ durch das Verschwinden einer Γ_{d+2} gegeben. Wir könnten geradezu schreiben:

$$(57) \qquad \Gamma_{d+2}(z_1 \cdots z_n) = \frac{-d\left(\frac{\alpha_z}{\beta_z}\right)}{dW} \cdot \beta_z^{d+2}.$$

Für $d\omega$ ergiebt sich dann der Ausdruck

$$(58) \qquad d\omega = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1 \ldots z_n)} \cdot \text{—}$$

Die beiden hiermit genannten Eigenschaften der kanonischen Curven, die in der Formel (58) zusammengefasst erscheinen, sind, wie gesagt, für die kanonischen Curven charakteristisch. Denn sobald man für $d\omega$ die Formel (58) hat, werden die Integrale

$$(59) \qquad \int \Gamma_d(z_1 \ldots z_n) \cdot d\omega$$

überall endliche Integrale vorstellen, die Formen Γ_d sind also lineare Verbindungen der φ und die Gesammtheit der Γ_d deckt sich, wieder vermöge der bekannten Aequivalenzbetrachtungen, mit der Gesammtheit der linearen Verbindungen der φ. —

Wir haben bei den letzten Erläuterungen (indem wir von den φ handelten) p selbstverständlich > 1 genommen. Unser letzter Satz gestattet uns, die Definition der kanonischen Curven auch auf die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ auszudehnen. *Wir werden, bei beliebigem p, eine Curve kanonisch nennen, wenn das zugehörige $d\omega$ durch eine Formel vom Typus* (58) *gegeben ist.*

Dies giebt für $p = 1$ ein besonders einfaches Resultat. In der That können wir die Formeln (57), (58) sofort für $p = 1$ gelten lassen, indem wir in denselben $d = 0$ nehmen und dW mit dem einen in diesem Falle vorhandenen Differential erster Gattung identificiren. Wir haben also: *Sämmtliche Curven des* § 7, *die $p = 1$ aufweisen, sind kanonische Curven.*

Für $p = 0$ ergeben sich als kanonische Curven: die einfach überdeckte Gerade $z_1 : z_2$, die m-fach überdeckte Gerade, welche durch das Wurzelzeichen

$$\sqrt[m]{a_z \cdot b_z}$$

definirt wird, der einfache Kegelschnitt der Ebene.

Jedenfalls lässt sich also jedes algebraische Gebilde in kanonische Form setzen. Für $p > 1$ ist ja in allen Fällen die Normalcurve der φ

eine kanonische Curve (auch im hyperelliptischen Falle, trotzdem dort der Satz vom vollen Formensystem der φ nicht gilt). Um zu untersuchen, ob neben ihr gegebenen Falles noch niedere kanonische Curven existiren, hat man nur nachzusehen, ob für irgend einen Theiler d der Zahl $2p-2$ eine Schaar überall $(d-1)$-fach berührender linearer Verbindungen der φ existirt:

$$\left(c_1\sqrt[d]{\varphi_1}+c_2\sqrt[d]{\varphi_2}+\cdots+c_n\sqrt[d]{\varphi_n}\right)^d;$$

ist dies der Fall — und es muss sich jeweils mit algebraischen Mitteln entscheiden lassen — so hat man vermöge der Formeln:

$$z_1=\sqrt[d]{\varphi_1},\ z_2=\sqrt[d]{\varphi_2},\ldots,\ z_n=\sqrt[d]{\varphi_n}$$

eine kanonische Darstellung des algebraischen Gebildes im Raume der z. Es müsste interessant sein, für beliebige Werthe des p alle Möglichkeiten aufzuzählen, welche in dieser Hinsicht existiren.

*Die kanonischen Curven sind nun diejenige Darstellung der algebraischen Gebilde, die wir im Folgenden ausschliesslich zu Grunde legen**). In der That zeigt sich, dass sich für sie die Verhältnisse immer am einfachsten gestalten. Ich werde in dieser Hinsicht jetzt zunächst entwickeln, dass sich die Formeln des § 6 fast ohne Aenderung auf beliebige kanonische Curven übertragen.

§ 9.

Grundformeln der kanonischen Darstellung.

Ich werde die in Betracht kommenden Formeln in derselben Reihenfolge geben, wie in § 6, so dass fortwährender Vergleich möglich ist.

Zunächst noch eine genauere Festlegung der unter (58) gegebenen Formel für $d\omega$. Indem wir die in (58) vorkommenden willkürlichen Constanten α, β in geeigneter Weise particularisiren, erhalten wir specielle Formeln:

$$d\omega=\frac{z_i\,dz_k-z_k\,dz_i}{\Gamma^{(ik)}_{d+2}(z_1\cdots z_n)},$$

wo i, k irgend zwei verschiedene der Indices $1\ldots n$ sind; indem wir

*) Entsprechend dem Umstande, dass wir mit der Riemann'schen Theorie beginnen, gelten im Texte die φ und die aus ihnen herzustellenden Ausdrücke von vornherein als bekannt; es bleibt also die Frage durchaus unberührt, wie wir dieselben herzustellen haben, wenn uns das algebraische Gebilde irgendwie durch Gleichungen definirt vorliegt. Ich will aber doch ausdrücklich darauf hinweisen, dass diese Frage längst von anderer Seite erledigt ist (so dass also, theoretisch zu reden, wirklich die Möglichkeit vorliegt, von dem irgendwie algebraisch gegebenen Gebilde bis zu jeder zulässigen kanonischen Darstellung desselben vorzudringen). Man vergl. z. B. Nöther in Bd. 23 der Annalen (Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, 1883).

sodann die einzelnen der so gewonnenen Formeln im Zähler und Nenner mit $(\alpha_i\beta_k - \beta_i\alpha_k) = (\alpha\beta)_{ik}$ multipliciren und die sämmtlichen so entstehenden Ausdrücke vereinigen, kommt:

$$d\omega = \frac{(\alpha_z\beta_{dz} - \beta_z\alpha_{dz})}{\Sigma(\alpha\beta)_{ik}\,\Gamma^{ik}_{d+2}(z_1\cdots z_n)},$$

womit die Abhängigkeit des in (58) auftretenden Nenners Γ_{d+2} von den Constanten α, β klargelegt ist. Wir wollen diese Formel abkürzender Weise so schreiben:

$$(60)\qquad d\omega = \frac{(\alpha_z\beta_{dz} - \beta_z\alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1\cdots z_n;\ \alpha\beta)}.$$

Wir wenden uns zur Definition der φ und der Integrale erster Gattung. Dieselbe ist bereits in (59) enthalten: *die linearen Verbindungen der φ decken sich mit den algebraischen Formen $\Gamma_d(z_1\ldots z_n)$; unter den Formen Γ_d giebt es genau p linear unabhängige.*

Sei ferner $P^{xy}_{\xi\eta}$ ein Integral dritter Gattung. Wir bilden uns

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\omega_x\,\partial\omega_\xi},$$

multipliciren mit $(\alpha_x\beta_\xi - \beta_x\alpha_\xi)^2$, wo die α, β willkürliche Grössen sind, die übrigens mit den unter (60) benutzten durchaus nicht identisch zu sein brauchen, und erhalten einen Ausdruck

$$\Psi(x, \xi;\ \alpha\beta),$$

der sich linear aus den Verbindungen zweiten Grades der Determinanten $(\alpha\beta)_{ik}$ zusammensetzt. Dieser Ausdruck erweist sich in den $x_1\ldots x_n$, wie in den $\xi_1\ldots\xi_n$, als algebraische Form $(d+2)^{\text{ten}}$ Grades, verschwindet doppelt, wenn $\alpha_x\beta_\xi - \beta_x\alpha_\xi = 0$ ist ohne dass x mit ξ zusammenfällt, und geht für $\xi = x$ in das Quadrat von $\Gamma_{d+2}(x_1\ldots x_n, \alpha\beta)$ über. Wir schliessen, *dass es jedenfalls möglich sein muss, bei der vorgelegten C_m Formen Ψ dieser Art zu bilden.* Das Integral P erscheint dann in der Form

$$(61)\qquad P^{xy}_{\xi\eta} = \int_y^x\!\!\int_\eta^\xi d\omega_z\,d\omega_\zeta\cdot\frac{\Psi(z, \zeta;\ \alpha\beta)}{(\alpha_z\beta_\zeta - \beta_z\alpha_\zeta)^2}.$$

Umgekehrt wird jedes Ψ, welches die angegebenen Eigenschaften besitzt, in (61) eingesetzt ein Integral dritter Gattung definiren. Wir schliessen, dass der Ausdruck Ψ durch die von uns angegebenen Eigenschaften soweit definirt ist, wie das Integral dritter Gattung selbst: *aus einem speciellen Werthe des Ψ werden wir den allgemeinen erhalten, indem wir den mit willkürlichen c_{ik} ausgestatteten Ausdruck*

$$(62)\qquad (\alpha_z\beta_\zeta - \beta_z\alpha_\zeta)^2\cdot\sum c_{ik}\,\varphi_i(z)\,\varphi_k(\zeta)$$

hinzuaddiren.

Wir ziehen jetzt die Definition (32) der Primform in Betracht. Wieder können wir den daselbst angedeuteten Grenzübergang mit Hülfe des Abel'schen Theorems ausführen, indem wir diejenigen Stellen

$$x', x'', \ldots, x^{m-1}$$

beziehungsweise

$$y', y'', \ldots, y^{m-1}$$

unserer kanonischen Curve einführen, welche die Gleichungen

$$\alpha_x \beta_z - \beta_x \alpha_z = 0, \quad \text{bez.} \quad \alpha_y \beta_z - \beta_y \alpha_z = 0$$

befriedigen, ohne doch mit x, bez. y identisch zu sein. Wir erhalten:

$$(63) \qquad \Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y}{\sqrt{\Gamma_{d+2}(x, \alpha\beta) \cdot \Gamma_{d+2}(y, \alpha\beta)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\sum P_{xy}^{x^i y^i}}.$$

Uebrigens bemerken wir: $\Omega(x, y)$ *ist in den Coordinaten des Punktes* x, *bez.* y *vom Grade* $-\frac{d}{2}$.

Wir beschäftigen uns endlich mit der Mittelform $\mu(x)$. Zu ihrer Definition werden wir selbstverständlich nicht eine lineare Verbindung der φ, sondern eine solche der x heranziehen. Wir gewinnen dadurch die m^{te} Potenz von $\mu(x)$ in der Form:

$$(64) \qquad \mu(x)^m = \frac{\prod_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n}.$$

Wir sehen: $\mu(x)$ *ist in den Coordinaten* x *vom Grade* $-\frac{p}{m}$.

Hiermit sind in der That die Formeln des § 6 auf den Fall einer beliebigen kanonischen Curve übertragen, abgesehen allerdings von einem einzigen Punkte: wir haben in (61), (62) die zur kanonischen Curve gehörigen Integrale dritter Gattung nur im Allgemeinen definirt, während wir in § 6 für jeden der beiden dort in Betracht kommenden Fälle ein ganz bestimmtes Integral dritter Gattung, das wir Q nannten, als das einfachste von allen festgelegt hatten. Ich bin einstweilen nicht in der Lage, die Theorie dieses Q auf beliebige kanonische Curven zu übertragen. In § 26 unten wird für ebene Curven ohne Doppelpunkt die Eigenart des Q noch näher erläutert; es handelt sich dabei aber um solche Betrachtungen, bei denen die *Constanten* der Riemann'schen Fläche (die *Moduln* derselben) als veränderlich gelten, und diese Betrachtungen entziehen sich zur Zeit, wie schon in der Einleitung angedeutet, der Verallgemeinerung.

§ 10.

Von den Lösungen des Umkehrproblems.

Wir werden jetzt das Umkehrproblem der Integrale erster Gattung einführen, bez. diejenigen auf seine Lösungen bezüglichen Sätze kurz zusammenstellen, die sogleich gebraucht werden. Die allgemeinste Formulirung des Umkehrproblems ist jedenfalls die, dass wir für $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ die Gleichungen anschreiben

$$(65) \qquad w_\alpha^{x'y'} + w_\alpha^{x''y''} + \cdots + w_\alpha^{x^\nu y^\nu} = W_\alpha,$$

wo ν irgend welche Zahl, und nun verlangen, den aus den Werthen der W_α folgenden algebraischen Zusammenhang zwischen den $x', \ldots x^\nu$, $y', \ldots, y^\nu$ anzugeben. Inzwischen wollen wir diese Fragestellung hier gleich so particularisiren, dass wir die y als gegebene Grössen und nur die x als veränderlich, bez. als unbekannt betrachten. Wir haben dann jedenfalls den Satz:

Ist $x', x'', \ldots, x^\nu$ irgend eine Lösung der Gleichungen (65), *so ist auch jedes zu den $x', x'', \ldots, x^\nu$ im Sinne des* § 7 *äquivalente Punktsystem eine Lösung.*

Aber diesen Satz können wir unmittelbar umkehren. Sind $x', \ldots, x^\nu$ und $\bar{x}', \ldots, \bar{x}^\nu$ zwei Lösungssysteme derselben Gleichungen (65), so erweist sich der Primformenquotient:

$$\frac{\Omega(xx') \cdots \Omega(xx^\nu)}{\Omega(x\bar{x}') \cdots \Omega(x\bar{x}^\nu)}$$

als algebraische, auf unserer Curve eindeutige Function von x. Wir schliessen:

Je zwei Lösungssysteme $x', \ldots, x^\nu$ und $\bar{x}', \ldots, \bar{x}^\nu$ von (65) *sind äquivalent.*

Hiernach gestattet der Riemann-Roch'sche Satz, unter der Voraussetzung, dass überhaupt ein Lösungssystem der Gleichungen (65) existire, die Zahl dieser Lösungen anzugeben. Wir formuliren das Resultat mit den Worten:

Ist τ die Zahl der linear unabhängigen φ, die in den Punkten $x', \ldots, x^\nu$ irgend eines Lösungssystems der Gleichungen (65) *verschwinden, so ist die Zahl der überhaupt vorhandenen Lösungen $\infty^{\nu-p+\tau}$.*

Wir sind so zu der fundamentalen Frage geführt, ob das Gleichungssystem (65) überhaupt Lösungen hat. Für $\nu < p$ verlangt dies jedenfalls Bedingungen zwichen den W_α und diesen können wir hier nicht nachgehen, da sie sich erst mit Hülfe der hier noch als unbekannt geltenden Thetafunctionen formuliren lassen. Dagegen haben wir ohne Weiteres:

Für $\nu \geq p$ hat die Problemstellung (65) *sicher Lösungen.*

Allerdings leitet man auch diesen Satz, nach dem Vorgange von Riemann, vielfach erst aus der Theorie der Thetafunctionen ab. Dem gegenüber ist es mit Rücksicht auf den Inhalt der folgenden Paragraphen wesentlich, hier ausdrücklich zu constatiren, dass man zu diesem Zwecke der Theorie der Thetafunctionen keineswegs bedarf. Hr. Weierstrass hat in der That seit lange einen ganz elementaren Beweis des in Rede stehenden Satzes gegeben. Derselbe lässt sich mit wenigen Worten skizziren. Man beginnt damit, für die W hinreichend kleine Grössen zu setzen, welche (W) heissen sollen. Lässt man dann $v-p$ der zugehörigen Punkte x mit den correspondirenden Punkten y zusammenfallen, so kann man die symmetrischen Functionen der Coordinaten der übrigen x nach Potenzen der (W) in convergente Reihen entwickeln. Damit ist für die (W) die Existenz eines ersten Lösungssystems sicher gestellt. Hierauf gestattet das Abel'sche Theorem, für Grössen $W=n(W)$, wo n irgend eine ganze Zahl, ein Lösungssystem aus dem für die (W) gefundenen algebraisch zu construiren. Aber die so definirten W sind an sich die allgemeinsten, die es giebt. In der That, wenn irgend welche W vorgelegt sind, so kann man n immer so gross nehmen, dass die Grössen $\frac{W}{n}$ zu den bereits behandelten (W) gehören. Daher u. s. w.

Dies ist Alles, was wir von der Theorie des Umkehrproblems in den folgenden Paragraphen brauchen werden.

§ 11.

Wurzelformen bei kanonischen Curven.

Wir denken uns jetzt wieder eine kanonische Curve m^{ter} Ordnung des Raumes der $z_1 : z_2 : \cdots : z_n$ gegeben.

Eine zu derselben gehörige algebraische Form irgend welchen Grades Γ_δ kann so beschaffen sein, dass ihre $m\delta$ Nullpunkte, unter μ einen Theiler von $m\delta$ verstanden, zu je μ zusammenfallen. Wir nennen sie dann eine *Berührungsform* μ^{ter} Stufe, die μ^{te} Wurzel aber

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$$

eine *Wurzelform* der μ^{ten} Stufe.

Ueber die Mannigfaltigkeit solcher zu einer gegebenen C_m gehöriger Wurzelformen geben die Entwickelungen des vorigen Paragraphen eine Reihe von übrigens wohlbekannten Sätzen, von denen hier einige in knapper Form zusammengestellt werden sollen.

Mit $a', a'', \ldots, a^m$ seien vorübergehend die m auf unserer Curve gelegenen Verschwindungspunkte einer Linearform a_z, mit c ein festgewählter, willkürlicher Punkt der Curve bezeichnet. Wir setzen, für $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

(66) $$w_\alpha^{a'c} + w_\alpha^{a''c} + \cdots + w_\alpha^{a^{m}c} = C_\alpha.$$

Es seien ferner $x', x'', \ldots, x^\nu$ die Verschwindungspunkte einer Wurzelform $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, also $\mu\nu = m\delta$. Dann hat man, wie auch die Integrationswege gewählt werden mögen, modulo der Perioden erster Gattung folgende Congruenzen:

$$\mu\left(w_\alpha^{x'c} + w_\alpha^{x''c} + \cdots + w_\alpha^{x^\nu c}\right) \equiv \delta C_\alpha.$$

Wir schliessen hieraus in bekannter Weise:

(67) $$w_\alpha^{x'c} + w_\alpha^{x''c} + \cdots + w_\alpha^{x^\nu c} = \frac{\delta}{\mu} \cdot C_\alpha + \left(\frac{\omega_\alpha}{\mu}\right),$$

wo $\left(\frac{\omega_\alpha}{\mu}\right)$ irgend einen der μ^{2p} Theilwerthe

(68) $$\frac{h_1\omega_{\alpha,1} + h_2\omega_{\alpha,2} + \cdots + h_{2p}\omega_{\alpha,2p}}{\mu}$$

bedeuten soll, die man erhält, indem man $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \ldots, (\mu-1)$ durchlaufen lässt. Wir haben also zur Bestimmung der Nullstellen $x', x'', \ldots, x^\nu$ die μ^{2p} Umkehrprobleme (67) zu behandeln.

Indem wir jetzt den Inhalt des vorigen Paragraphen von rückwärts durchlaufen, haben wir zunächst:

Ob es bei gegebener Curve C_m für $\nu < p$ bei irgendwelcher Annahme der $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ Lösungen x der Gleichungen (67) *giebt, steht dahin; sicher aber giebt es solche Lösungen, und zwar bei beliebig angenommenen Werthen der $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$, für $\nu \geqq p$.*

Für $\nu \geqq p$ erhalten wir also μ^{2p} getrennte Systeme von Wurzelformen δ^{ter} Ordnung μ^{ter} Stufe; ob es für $\nu < p$ derartige Systeme giebt und wie gross eventuel deren Zahl ist, bleibt unbestimmt.

Indem wir jetzt unter den Gleichungen (67) eine bestimmte ins Auge fassen, sei τ die Anzahl der linear unabhängigen φ, welche für die Punkte $x', x'', \ldots, x^\nu$ irgend eines zugehörigen Lösungssystems verschwinden. Wir haben dann:

Die Zahl der Lösungssysteme unserer Gleichung ist $\infty^{\nu-p+\tau}$; die Punkte jedes einzelnen Lösungssystems sind mit $x', x'', \ldots, x^\nu$ äquivalent.

Und hieraus:

Unter den der einzelnen Gleichung (67) *zugehörigen Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ giebt es* $(\nu-p+\tau+1)$ *linear unabhängige; alle anderen Wurzelformen des Systems setzen sich aus diesen mit Hülfe beliebig zu wählender constanter Multiplicatoren linear zusammen.*

Sind also

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta'},\ \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta''}, \ldots, \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta^{\nu-p+\tau+1}}$$

unter den Wurzelformen des Systems geschickt ausgewählt, so ist

$$(69)\qquad \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta} = c'\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta'} + c''\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta''} + \cdots + c^{\nu-p+\tau+1}\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta^{\nu-p+\tau+1}},$$

unter den c unabhängige Constante verstanden, die allgemeinste Wurzelform desselben.

Wir betrachten jetzt Wurzelformen μ^{ter} Stufe von den Ordnungen δ und δ' neben einander. Es entstehen dann gewisse Gruppirungssätze, von denen wir nur zwei herausgreifen:

1) *Ist* $\delta \equiv \delta'$ (*mod.* μ) *und* $\delta' > \delta$, *so gehört zu jedem existirenden Systeme von Wurzelformen* $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ *ein bestimmtes System von Wurzelformen* $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$.

Man erhält nämlich Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$, indem man die $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ des gegebenen Systems mit beliebigen zur C_m gehörigen algebraischen Formen vom Grade $\frac{\delta'-\delta}{\mu}$ multiplicirt: durch die so gewonnenen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$ ist dann ein ganzes System von Wurzelformen δ'^{ter} Ordnung rational festgelegt.

2) *Haben* δ *und* δ' *mit* μ *verschiedene Factoren gemein, so haben die Systeme von Formen* $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, *die es giebt, unter sich eine ganz andere Gruppirung, als die Systeme von Formen* $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$.

Ist beispielsweise δ durch μ theilbar, so findet sich unter den zugehörigen Systemen des $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ ein besonders ausgezeichnetes: das ist der Inbegriff der algebraischen Formen des Grades $\frac{\delta}{\mu}$. Oder ist $\mu = \mu'\mu''$ und δ durch μ' theilbar, so finden sich unter den Systemen der $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ als ausgezeichnete Systeme die Wurzelformen $\sqrt[\mu'']{\Gamma_{\frac{\delta}{\mu'}}}$.

Es ist hier nicht der Ort, diese Gruppirungssätze weiter zu verfolgen. Auf den besonderen Fall derselben, welcher der Annahme $m = 2p - 2$, $\mu = 2$ entspricht, ist insbesondere Herr Nöther wiederholt eingegangen (in der schon öfter genannten Arbeit in Bd. 17 der Annalen, in Bd. 28 daselbst [Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen, 1886], etc.); der Fall $m = 2$, $p = 2$ (μ beliebig) findet seine Erledigung in der in der Einleitung genannten Abhandlung von Herrn Burkhardt (Systematik der hyperelliptischen Functionen).

§ 12.

Charakteristiken von Wurzelformen, insbesondere Primcharakteristiken.

Die μ^{2p} verschiedenen Systeme von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, die es für $\nu \geq p$ giebt, erscheinen vermöge (67), (68) je durch ein bestimmtes

System der Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ festgelegt. Aber diese Zahlen haben an sich keine absolute Bedeutung, insofern man der in derselben Formel vorkommenden Grösse $\frac{\delta C_\alpha}{\mu}$ nach Belieben die μ^{2p} verschiedenen Werthe ertheilen kann, welche sich aus einem einzelnen dieser Werthe durch Hinzufügen eines beliebigen μ-Theiles der Perioden ergeben. Ich werde das so ausdrücken:

Durch die Formeln (67), (68) *werden für die Wurzelformen* $\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}$ *keine absoluten Charakteristiken* $(h_1, h_2, \ldots, h_{2p})$ *sondern nur relative Charakteristiken festgelegt.*

Unter der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}$ und $\left(\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}\right)$ verstehe ich nämlich den Inbegriff der Differenzen der diesen Systemen in (67), (68) entsprechenden Zahlen h, (h), also den Zahlencomplex:

$$| h_1 - (h_1),\ h_2 - (h_2), \ldots, h_{2p} - (h_{2p}) |$$

(sämmtliche Zahlen immer nur modulo μ genommen). Wir können für denselben eine selbständige Definition aufstellen, indem wir den Quotienten

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}}{\left(\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}\right)}$$

in Betracht ziehen. Seien $x', x'', \ldots, x^\nu$ diejenigen Punkte unserer Curve, für welche der Zähler, $(x'), (x''), \ldots, (x^\nu)$ diejenigen Punkte, für welche der Nenner verschwindet. Dann ist unser Quotient gleich dem Producte von Primformen:

$$\frac{\Omega(xx') \cdot \Omega(xx'') \cdots \Omega(xx^\nu)}{\Omega\big(x(x')\big) \cdot \Omega\big(x(x'')\big) \cdots \Omega\big(x(x^\nu)\big)}.$$

Von hier aus berechnet man jetzt vermöge (33) die Factoren, welche unser Quotient erhält, sobald der Punkt x auf der zerschnitten gedachten Riemann'schen Fläche beziehungsweise die Querschnitte

$$A_1, \ldots, A_p; \quad B_1, \ldots, B_p$$

überschreitet. Wir finden, vermöge der zwischen den ω, η herrschenden Bilinearrelationen,

$$(70) \qquad \varepsilon^{h_{p+1} - (h_{p+1})}, \ldots, \varepsilon^{h_{2p} - (h_{2p})}; \quad \varepsilon^{-h_1 + (h_1)}, \ldots, \varepsilon^{-h_p + (h_p)},$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{\mu}}$. *In diesen Factoren liegt die in Aussicht genommene Definition der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen.*

Es giebt nun zwei besondere Fälle, in denen man, unter Aufrechterhaltung der so formulirten Sätze, dem einzelnen Systeme der $\sqrt[\mu]{\Gamma_\vartheta}$ in zwangloser Weise eine *absolute* Charakteristik

$$| h_1, h_2, \ldots, h_{2p} |$$

beilegen kann.

Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn δ durch μ theilbar ist. Es giebt dann, wie schon bemerkt, ein ausgezeichnetes System von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, dasjenige, welches aus den algebraischen Formen vom Grade $\frac{\delta}{\mu}$ besteht. Es ist natürlich, diesem System die Charakteristik $|\,0\;0 \ldots 0\,|$ zu ertheilen. Dann sind die Charakteristiken aller anderen Systeme damit festgelegt; wenn wir wollen, durch die Factoren

$$\varepsilon^{h_{p+1}}, \ldots, \varepsilon^{h_{2p}}, \quad \varepsilon^{-h_1}, \ldots, \varepsilon^{-h_p}, \tag{71}$$

welche der Quotient

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}}{\Gamma_{\frac{\delta}{\mu}}}$$

an den Querschnitten A, B erhält. Wir werden die so gewonnenen „absoluten" Charakteristiken als *Elementarcharakteristiken* bezeichnen.

Den Elementarcharakteristiken treten die *Primcharakteristiken* gegenüber. Ich wähle diesen Namen, weil bei ihrer Definition die Primform Ω zu benutzen ist. Der Einfachheit wegen will ich fortan $\mu = 2$ setzen. Dann ist der Grad δ derjenigen Wurzelformen, für welche es Primcharakteristiken giebt, $2\varrho + d$, unter ϱ eine beliebige ganze Zahl verstanden, während $d = \frac{2p-2}{m}$ ist. Ist nämlich eine Wurzelform $(2\varrho + d)^{\text{ter}}$ Ordnung zweiter Stufe

$$\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$$

vorgelegt, so können wir aus ihr eine *Function* der Stelle x bilden, indem wir ihr den Factor $\Omega(x, y)$ hinzufügen (wo y ein beliebiger Hülfspunkt) und dann durch eine beliebige algebraische Form $\Gamma_{\varrho+d}$ dividiren. Um die Primcharakteristik von $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ zu finden, bestimmen wir die Factoren, welche die in Rede stehende Function

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}} \cdot \Omega(x, y)}{\Gamma_{\varrho+d}}$$

an den $2p$ Querschnitten der Riemann'schen Fläche annimmt. Indem wir mit $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ geeignete ganze Zahlen bezeichnen, lauten diese Factoren:

$$\begin{cases} \text{bei } A_1\text{:} & (-1)^{h_{p+1}} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha 1}\left(w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_{\alpha 1}}{2}\right)}, \\ \text{bei } A_2\text{:} & (-1)^{h_{p+2}} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha 2}\left(w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_{\alpha 2}}{2}\right)}, \\ \quad\vdots & \\ \text{bei } B_p\text{:} & (-1)^{h_p} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha, 2p}\left(w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_{\alpha, 2p}}{2}\right)}, \end{cases} \tag{72}$$

wo die h natürlich nur modulo 2 bestimmt sind. *Die so definirten*

$$h_1, h_2, \ldots h_{2p}$$

sind die Primcharakteristik der Wurzelform $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$. In der That ist sofort zu sehen, dass die so gegebene Definition der Charakteristiken mit der aus (67), (68) fliessenden verträglich ist. Bilden wir nämlich für zwei Wurzelformen $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ aus verschiedenen Systemen — sie mögen $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$, $(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})$ heissen — nach der neuen Regel die Primcharakteristiken h und (h), so wird deren Quotient

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}}{(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})}$$

an den A, B die Factoren annehmen:

$$(-1)^{h_{p+1}-(h_{p+1})}, \quad (-1)^{h_{p+2}-(h_{p+2})}, \ldots (-1)^{h_p-(h_p)},$$

was mit Formel (70) genau übereinstimmt.

Uebrigens werden wir, um uns der gewöhnlichen Bezeichnung anzuschliessen, für

$$h_1, h_2, \ldots h_p, \quad h_{p+1}, \ldots h_{2p}$$

in der Folge vielfach

$$(73) \qquad h_1, h_2, \ldots h_p, \quad g_1, \ldots g_p$$

schreiben. In der That gehen die Charakteristiken, welche wir definirten, in dem besonderen Falle $\mu = 2$, $d = 1$, d. h. im Falle der Wurzelformen zweiter Stufe bei zu Grunde gelegter Normalcurve der φ, in die sonst gebrauchten Charakteristiken über; die Primcharakteristiken beziehen sich dann auf die Wurzelformen ungerader Ordnung, die Elementarcharakteristiken auf die Formen gerader Ordnung. Die Primcharakteristiken werden also das, was man *eigentliche Charakteristiken*, die Elementarcharakteristiken das, was man *Gruppencharakteristiken* zu benennen pflegt. Ich habe mich diesen letzteren Benennungen schon darum nicht anschliessen mögen, weil ich für das Wort „Gruppe" durchweg die specifische, auf Galois zurückgehende Bedeutung aufrecht erhalten will.

Uebrigens möchte ich vorgreifend hier folgende Bemerkung einschalten. Die Primcharakteristiken wurden, wo sie bislang in der Literatur auftraten, nur indirect, von der Theorie der Thetafunctionen aus, eingeführt. Aber hierbei blieb eine Unbestimmtheit bestehen. Man wusste sehr wohl, dass den 2^{2p} unterschiedenen Thetafunctionen an der Normalcurve der φ die 2^{2p} zu unterscheidenden Systeme von Wurzelformen ungerader Ordnung entsprechen, aber man war nicht in der Lage, die betreffende Zuordnung in's Einzelne durchzuführen. Nun wir die Primcharakteristiken direct definiren, ist diese Unbestimmt-

heit beseitigt. *An der kanonischen C_m wird jeder Thetafunction dasjenige System von Wurzelformen $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ entsprechen, deren Primcharakteristik mit der Charakteristik der Thetafunction* (deren Definition durch die Thetareihe selbst gegeben ist) *übereinstimmt.*

Hr. Nöther hat in Bd. 28 der Annalen (l. c.) auf das verschiedene Verhalten aufmerksam gemacht, welches die an der Normalcurve der φ für $\mu = 2$ definirten Charakteristiken der beiden Arten gegenüber linearer Periodentransformation zeigen. Dieses Verhalten ist von der Auswahl der zu Grunde zu legenden kanonischen Curve selbstverständlich unabhängig. Zugleich ergiebt sich dasselbe hier, ohne irgendwelche Bezugnahme auf die lineare Transformation der Thetafunctionen, aus der Betrachtung der Factoren (71), (72) direct. Die Formeln selbst sind folgende. Sei die lineare Transformation der Perioden (ich will mich der Kürze halber auf $p = 3$ beschränken) durch die Formeln gegeben:

$$(74)\quad \begin{cases} \omega_1' = a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 + d_1\omega_4 + e_1\omega_5 + f_1\omega_6, \\ \omega_2' = a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + \cdots\cdots\cdots, \\ \omega_3' = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Man hat dann als Umsetzung der Elementarcharakteristiken

$$(75)\quad \left.\begin{cases} h_1 = a_1h_1' + a_2h_2' + a_3h_3' + a_4h_4' + a_5h_5' + a_6h_6' \\ h_2 = b_1h_1' + b_2h_2' + \cdots\cdots\cdots \\ h_3 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}\right\}\ (\text{mod. } 2),$$

dagegen für die Primcharakteristiken:

$$(76)\quad \left.\begin{cases} h_1 = a_1h_1' + a_2h_2' + a_3h_3' + a_4h_4' + a_5h_5' + a_6h_6' + (a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6) \\ h_2 = b_1h_1' + b_2h_2' + \cdots \qquad\qquad + (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6) \\ h_3 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}\right\}\ (\text{mod. } 2),$$

Die Folge ist, dass unter allen Elementarcharakteristiken die eine $(0\ 0\ \ldots\ 0)$ eine Sonderstellung den anderen gegenüber einnimmt, während sich die Primcharakteristiken in gerade und ungerade zerlegen, jenachdem

$$h_1h_4 + h_2h_5 + h_3h_6$$

gerade oder ungerade ist.

Diese tiefgehende Unterscheidung von Elementarcharakteristiken und Primcharakteristiken schliesst nicht aus, dass sich beide, *sobald das d der kanonischen Curve eine gerade Zahl ist*, auf dieselben Wurzelformen beziehen können. Es ist dies z. B. bei den hyperelliptischen Gebilden eines ungeraden p der Fall.

§ 13.

Fundamentalformeln für die auf kanonische Curven bezogenen Thetafunctionen.

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen, um uns wenigstens dem ersten Theile desjenigen wichtigen Problems zuwenden zu können, dessen Erledigung in der Einleitung als der allgemeine Zielpunkt der gegenwärtigen Abhandlung bezeichnet wurde.

Es handelt sich um eine Fragestellung, welche von derjenigen, die Riemann in Nr. 25 seiner Abel'schen Functionen gibt, nur wenig verschieden ist.

Wir denken uns nämlich die 2^{2p} Thetareihen, deren einzelne durch ihre Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ festgelegt ist:

$$(77) \qquad \vartheta_{\left|\begin{matrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{matrix}\right|}(v_1 \dots v_p;\ \tau_{11} \dots \tau_{pp}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_1} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_p} E,$$

wo

$$E = e^{i\pi\left(\sum\limits_1^p{}^{\alpha} \sum\limits_1^p{}^{\beta} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} + 2\sum\limits_1^p{}^{\alpha}\left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right)},$$

in Functionen auf der uns gegebenen kanonischen Curve m^{ter} Ordnung des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen verwandelt, indem wir die $\tau_{\alpha\beta}$ mit den gleichbenannten Perioden der zugehörigen Normalintegrale erster Gattung zusammenfallen lassen, für die v_α aber, unter ν eine beliebige Zahl verstanden, die folgenden Integralsummen einführen:

$$(78) \qquad v_\alpha = v_\alpha^{x'y'} + v_\alpha^{x''y''} + \cdots + v_{+\alpha}^{x^\nu y^\nu}.$$

Die einfachen und fundamentalen Eigenschaften der so definirten Functionen der Stellen $x', \dots x^\nu$, $y', \dots y^\nu$ sollen als bekannt gelten. Unsere Aufgabe ist, *diese neuen Functionen*, sofern es möglich ist, *durch die in dem früheren Paragraphen bereits eingeführten Functionen und Formen explicit darzustellen*, *was darauf hinauskommen wird*, *sie aus algebraischen Ausdrücken, Primformen und Mittelformen zusammenzusetzen.*

Von dieser allgemeinen Frage lassen wir hier, im ersten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung, unserem anfänglichen Plane entsprechend, so viel nach, dass wir auf eine Festlegung der sogenannten constanten Factoren der Thetareihen, d. h. derjenigen Factoren, welche nicht mehr von den $x', \dots x^\nu$, $y', \dots y^\nu$, sondern nur noch von den Moduln des algebraischen Gebildes abhängen, verzichten; wir werden also mit Formeln zufrieden sein, die noch eine unbestimmte

multiplicative Constante enthalten. Die Auswerthung dieser constanten Factoren wird dann die Hauptaufgabe unseres zweiten Abschnittes sein, wobei wir uns aber, wie ebenfalls schon in der Einleitung bemerkt, auf $p = 3$ beschränken müssen.

Leider aber sind wir nun genöthigt, auch hierüber hinaus noch eine Reduction unseres Problems eintreten zu lassen. Es hat mir nämlich nicht gelingen wollen, für die allgemeinen Integralsummen (78) zweckmässige Lösungen desselben zu finden. Ich sehe mich also genöthigt, statt der Summen (78) speciellere Integralsummen einzuführen, die freilich noch so allgemein sind, dass man alle anderen Fälle nach dem Abel'schen Theoreme auf sie zurückführen kann. Ich habe in dieser Hinsicht zwei verschiedene Ansätze gemacht, die ich hier gleich nennen will.

1) Um die Integralsummen (78) der ersten Art zu definiren, haben wir vorab jedem Punkte y unserer kanonischen Curve bezüglich der Primcharakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ (Formel (73)) bestimmte p Punkte $c_y', c_y'', \dots c_y^p$ zuzuordnen. Zu dem Zwecke betrachten wir dasjenige System von Wurzelformen $(d+2)^{\text{ter}}$ Ordnung zweiter Stufe, welches die Primcharakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ besitzt. Wir wählen ferner irgend eine Linearform α_z, welche in $z = y$ verschwindet; ihre $(m-1)$ sonstigen Nullpunkte sollen $y', \dots y^{(m-1)}$ heissen. Dann gibt es den Umkehrtheoremen zufolge eine Wurzelform der gerade bezeichneten Art, welche in $y', \dots y^{(m-1)}$ verschwindet. *Ihre weiteren p Verschwindungspunkte sind die hier gesuchten $c_y', c_y'', \dots c_y^p$.* In der That hängen die so definirten c, wie man nach dem Abel'schen Theoreme zeigt, nur vom y und der gewählten Primcharakteristik ab, nicht aber von der speciellen, bei ihrer Construction benutzten Linearform α_z*).

Jetzt sind die Integralsummen v_α, die wir beim einzelnen $\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ in erster Linie in Betracht ziehen wollen:

$$(79) \qquad v_\alpha = v_\alpha^{xy} - v_\alpha^{x'c_y'} - x_\alpha^{x''c_y''} - \dots - v_\alpha^{x^p c_y^p};$$

die $x, y, x', x'', \dots x^p$ werden hier willkürliche Punkte unserer Curve vorstellen.

---

*) Die Theorie dieser Punkte $c_y', \dots c_y^p$ geht bekanntlich auf Clebsch und Gordan zurück (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866); der dort gegebenen Darstellung gegenüber bietet die des Textes zumal den Vortheil, dass sie vermöge des Begriffs der Primcharakteristik unter den 2^{2p} überhaupt vorhandenen Systemen von Punkten c das jedesmal in Betracht kommende einzeln herauslöst.

2) Wir nehmen zweitens an, *die Zahl* ν *der in* (78) *vorkommenden Einzelintegrale sei durch* m *theilbar, also* $\nu = m\varrho$, *es seien ferner die unteren Grenzpunkte* y *als die Nullstellen irgend einer algebraischen Form* ϱ^{ten} *Grades* Γ_ϱ, *gewählt.* Wir wollen dies andeuten, indem wir schreiben:

$$(80)\qquad v_\alpha = \underbrace{\int^{x'} dv_\alpha + \int^{x''} dv_\alpha + \cdots + \int^{x^{m\varrho}} dv_\alpha}_{(\Gamma_\varrho = 0)}.$$

Die so bestimmten v_α wollen wir dann in ein beliebiges $\vartheta\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ als Argumente substituiren.

In den beiden hiermit bezeichneten Fällen lässt sich nun in der That der Werth der Thetafunction vorbehaltlich einer unbestimmt bleibenden multiplicativen Constanten in einfachster Weise durch geschlossene Formeln der von uns gewollten Art darstellen. Ich gebe hier diese Formeln vorweg ohne Beweis an. *In denselben bedeuten* Ω, μ *diejenigen Primformen, bez. Mittelformen, die man erhält, indem man das bei ihrer Definition zu benutzende Integral dritter Gattung mit dem transcendent normirten Integral* $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ *zusammenfallen lässt.* Die verschiedenen neben einander stehenden Factoren Ω und μ sind natürlich in ihrer Vieldeutigkeit an einander gebunden, widrigenfalls man ein falsches Resultat erhalten würde; da ich auf die Einzelheiten der diesbezüglichen Verhältnisse hier unmöglich eingehen kann, will ich vorweg bemerken, dass die analogen Fragen des hyperelliptischen Falles mit aller Ausführlichkeit in Bd. 32 der Annalen von Hrn. Burkhardt in seiner bereits in der Einleitung genannten Arbeit zur Discussion gebracht worden sind*).

Im ersten Falle (Formel (79)) seien $\varphi_1', \ldots \varphi_p^p$ die Werthe, welche die Formen $\varphi_1, \ldots \varphi_p$ an den Stellen $x', \ldots x^p$ annehmen. *Man hat dann folgende Formel:*

$$(81)\qquad \vartheta\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|(v, \tau) = C \cdot \frac{\Omega(xx')\ldots\Omega(xx^p)}{\mu(x)^{p-1}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1' & \cdots & \varphi_1^p \\ \\ \varphi_p' & \cdots & \varphi_p^p \end{vmatrix} \cdot \prod_1^p {}_i\, \mu(x^i)^{p-1}}{\prod_1^p {}_i \prod_{i+1}^p {}_k\, \Omega(x^i x^k)}.$$

Im zweiten Falle haben wir das zur Primcharakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ gehörige System von Wurzelformen zweiter Stufe $(2\varrho + d)^{\text{ter}}$ Ordnung

*) Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. — Ich hätte den § 22 dieser Arbeit schon oben citiren sollen, als von Weierstrass' Beweis für die Lösbarkeit des Umkehrproblems bei $\nu \geqq p$ die Rede war.

in Betracht zu ziehen. Es sind hier zwei Möglichkeiten auseinander zu halten. Es kann sein — und es ist für alle $\varrho > \frac{d}{2}$ nothwendig der Fall — dass in den Nullpunkten einer solchen Wurzelform keine einzige Linearverbindung der φ verschwindet. *Dann setzen sich nach dem Riemann-Roch'schen Satze die sämmtlichen Wurzelformen des Systems aus $m\varrho$ linear unabhängigen zusammen, die ich*

$$\sqrt{\Phi_1},\ \sqrt{\Phi_2},\ \ldots\ \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$$

nennen will. Es kann aber auch sein, dass in den Nullpunkten der einzelnen Wurzelform τ linear unabhängige Linearverbindungen der φ verschwinden. *Dann ist die Zahl der linear unabhängigen $\sqrt{\Phi}$ um τ grösser. Bei ersterer Voraussetzung wird das der Formel* (80) *entsprechende $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau)$ folgenden Werth haben:*

$$(82)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau) = C\cdot\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{\Phi_1'} & \cdots & \sqrt{\Phi_1^{m\varrho}}\\ \sqrt{\Phi_{m\varrho}'} & \cdots & \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{m\varrho}}\end{vmatrix}\cdot\prod_{i=1}^{m\varrho}\mu(x^i)^{m\varrho}}{\prod_{i=1}^{m\varrho}\prod_{k=i+1}^{m\varrho}\Omega(x^i x^k)},$$

bei letzterer Voraussetzung wird es identisch verschwinden und zwar τ-fach verschwinden, d. h. mit seinen ersten, zweiten, ... $(\tau-1)^{\text{ten}}$ nach den $v_1, v_2, \ldots v_p$ genommenen Differentialquotienten.

Dabei bedeuten in Formel (82) die $\sqrt{\Phi_1'}, \ldots \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{m\varrho}}$ die Werthe, welche die Wurzelformen $\sqrt{\Phi_1}, \ldots \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$ an den Stellen $x', \ldots x^{m\varrho}$ annehmen.

Man sieht: die beiden Formeln (81), (82) stehen in einem gewissen Gegensatze: bei (81) sind die Argumente v in geeigneter Weise (durch Vermittelung der Punkte $c_y', \ldots c_y^p$) von der Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|$ abhängig gemacht, dafür ist die rechte Seite von (81) von der Charakteristik unabhängig; bei (82) ist es genau umgekehrt.

§ 14.

Beweis der aufgestellten Formeln nebst weiteren auf sie bezüglichen Bemerkungen.

Ueber den Beweis der Formeln (81), (82) werde ich hier nur solche Andeutungen machen, welche geeignet sind, das Bildungsgesetz der rechter Hand stehenden Ausdrücke verständlich zu machen. Dabei sei es der Kürze halber gestattet, die Argumente der v als Summen von Integral*zeichen* einzuführen.

Formel (81) ruht durchaus auf dem bekannten Satze, dass

$$\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}\left(\int_y^x - \int_{c'_y}^{x'} - \cdots - \int_{c^p_y}^{x^p}\right)$$

nur dann verschwindet, wenn entweder x mit einem der Punkte $x', \ldots x^p$ zusammenfällt oder die $x', \ldots x^p$ Nullpunkte einer und derselben Linearverbindung der φ sind. Indem die rechte Seite von (81) einerseits die Primfactoren $\Omega(xx'), \ldots \Omega(xx^p)$, andererseits die Determinante $\Sigma \pm \varphi_1' \ldots \varphi_p^p$ enthält, verschwindet sie in den angegebenen Fällen jedenfalls auch. Aber die genannte Determinante ist auch Null, wenn es die Thetafunction keineswegs ist, wenn nämlich irgend zwei der Punkte $x', x'', \ldots x^p$ zusammenfallen. *Dies nun wird gerade durch das der Determinante als Nenner beigefügte Product von Primformen* $\Omega(x^i x^k)$ *compensirt.* Man beachte sodann, dass die Thetareihe eine *Function* der Stellen $x, x', \ldots x^p$ ist, d. h. von den homogenen Coordinaten dieser Stellen im nullten Grade abhängt. Um das Gleiche auf der rechten Seite unserer Gleichung zu erzielen, eben dazu dienen die verschiedenen daselbst im Zähler und Nenner als Factoren beigesetzten Mittelformen.

In ganz ähnlicher Weise können wir uns jetzt von dem Aufbau der Formel (82) und den zugehörigen Bemerkungen über den Fall $\tau > 0$ Rechenschaft geben. Soll die in (82) betrachtete Thetafunction verschwinden, so wird man nach dem gerade benutzten Satze schreiben dürfen, unter $z', \ldots z^{p-1}$ irgendwelche $(p-1)$ Punkte unserer Curve verstanden:

$$\underbrace{\int^{x'} + \int^{x''} + \cdots + \int^{x^{m\varrho}}}_{\Gamma_\varrho = 0} = -\int_{c'_y}^{z'} - \int_{c''_y}^{z''} - \cdots - \int_{c^{p-1}_y}^{z^{p-1}} - \int_{c^p_y}^{y}.$$

Wir führen jetzt solche $(m-1)$ Punkte $y', \ldots y^{(m-1)}$ in die Betrachtung ein, welche mit y durch eine lineare Gleichung $\alpha_z = 0$ verbunden sind, und die also mit den $c'_y, \ldots c^p_y$ zusammen die Verschwindungspunkte einer Wurzelform zweiter Stufe der Ordnung $(2+d)$ sind. Indem wir dann vorstehende Gleichung so schreiben:

$$\underbrace{\int^{x'} + \cdots + \int^{x^{m\varrho}}}_{\Gamma_\varrho = 0} + \int_{c'_y}^{z'} + \cdots + \int_{c^{p-1}_y}^{z^{p-1}} + \int_{c^p_y}^{y} + \int_{y'}^{y'} + \cdots + \int_{y^{(m-1)}}^{y^{(m-1)}} = 0,$$

bemerken wir, *dass unsere Thetafunction* (82) *dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte* $x', \ldots x^{m\varrho}$ *zusammen mit irgend* $(p-1)$ *beliebig anzunehmenden Punkten* $z', \ldots z^{p-1}$ *die Nullstellen einer zur*

Primcharakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ *gehörigen Wurzelform zweiter Stufe der* $(2\varrho + d)^{ten}$ *Ordnung sind.* Dies ist aber, wenn $\tau > 0$, immer der Fall, daher unser Satz von dem identischen Verschwinden. Andererseits wird im Falle $\tau = 0$ die rechte Seite von (82) dem so formulirten Satze genau entsprechen. Denn wenn die Determinante $\sum \pm \sqrt{\Phi_1'} \cdots \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{m\varrho}}$ überflüssiger Weise auch dann verschwindet, wenn irgend zwei der Stellen $x', \ldots x^{m\varrho}$ zusammenfallen, so wird dies wieder durch das dem Nenner zugefügte Primformproduct compensirt. Die Mittelformen aber, welche als Factoren beigesetzt sind, haben wieder den Zweck, den Grad des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks in den homogenen Coordinaten der einzelnen Stelle $x', \ldots x^{m\varrho}$ auf Null herabzudrücken. —

Ich füge nun noch einige Bemerkungen hinzu, welche bestimmt sind, die Formeln (81), (82) mit anderweitig bekannten Resultaten in Verbindung zu setzen.

Die in (81), (82) auftretenden Formen Ω und μ waren, wie wir ausdrücklich hervorhoben, unter Zugrundelegung des Integrales dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ gebildet. Setzen wir an seine Stelle nach (8) irgend ein P:

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \Sigma c_{\alpha\beta}\, v_\alpha^{xy}\, v_\beta^{\xi\eta},$$

so wird sich die linke Seite (81), (82) in die allgemeine Thetafunction

$$e^{-\frac{1}{2}\sum c_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta} \cdot \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau)$$

verwandeln, die wir natürlich, der in unseren Formeln vorkommenden unbestimmten Constanten C entsprechend, auch noch mit irgend einem constanten Factor multiplicirt denken können. Nun sind die *Sigmafunctionen* des hyperelliptischen Gebildes, die ich in den Bänden 27, 32 dieser Annalen behandelte, in die hiermit bezeichneten Functionen mit eingeschlossen; bei ihnen ist das Integral dritter Gattung P durch das unter (45) genannte Normalintegral Q ersetzt. In der That wird für $m = 2$ nach Einführung des Q unsere Formel (82) mit der in Bd. 32 pag. 368 unter (53) gegebenen Definition der hyperelliptischen Sigmafunction ohne Weiteres identisch. Man hat sich nur vor Augen zu halten, dass die dort betrachteten Integralsummen

$$\int_{y'}^{x'} + \cdots + \int_{y^p}^{x^p}$$

vermöge der Eigenart der hyperelliptischen Gebilde auch so geschrieben werden können:

$$\underbrace{\int^{x'} + \cdots + \int^{x^\nu} + \int^{\overline{y}'} + \cdots + \int^{\overline{y}^\nu}}_{\Gamma_\nu = 0},$$

dass beim hyperelliptischen Gebilde die Mittelform $\mu(x)$ der einfachen Definition (47) unterliegt, und dass man beim hyperelliptischen Gebilde die sämmtlichen Wurzelformen zweiter Stufe $(2\nu + d)^{\text{ter}}$ Ordnung kennt, sobald man die sämmtlichen Zerlegungen des fundamentalen f_{2p+2} in zwei Factoren $\varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu}$ beherrscht; diese Wurzelformen sind dann nämlich durch

$$(83) \qquad \gamma_{\nu-1+\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\varphi_{p+1-2\mu}} + \gamma_{\nu-1-\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\psi_{p+1+2\mu}}$$

gegeben, unter $\gamma_\lambda(x_1, x_2)$ eine beliebige rationale ganze Form λ^{ten} Grades der x_1, x_2 verstanden. Zugleich subsumirt sich das, was l. c. in § 10 über das identische Verschwinden der hyperelliptischen Sigma gesagt wurde, unter die allgemeine für das identische Verschwinden der Theta im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel.

Wir wollen ferner jenes bekannte Umkehrtheorem zu Hülfe nehmen, welches sich über die Sätze des § 10 hinaus in bekannter Weise aus dem Verschwinden der ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente ergibt. Dasselbe besagt, dass jeder ungeraden Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ entsprechend mindestens eine in den φ lineare Berührungsform zweiter Stufe $\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ existirt; eventuel kann es deren eine ganze Schaar geben*), was wir aber der Kürze halber hier ausschliessen wollen. Von den p einem Punkte y vermöge der Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ zugeordneten Punkten $c_y', \ldots c_y^p$, fällt dementsprechend einer, etwa c_y^p, in den Punkt y zurück, während die übrigen $p - 1$ in die Berührungspunkte der zugehörigen $\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ rücken. Wir wollen jetzt Formel (81) heranziehen, indem wir unter Voraussetzung eines ungeraden $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ die $x', \ldots x^p$ mit den so bestimmten $c_y', \ldots c_y^p$ zusammenfallen lassen. Wir erhalten dann nach leichter Umformung:

$$(84) \qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}\left(\int_y^x\right) = C \cdot \sqrt{\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(x) \cdot \varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(y)} \cdot \Omega(xy).$$

Es ist dies dieselbe Formel, welche für den Fall ebener Curven ohne Doppelpunkt Hr. Pick in Bd. 29 der Annalen aufgestellt hat (wobei

*) Weber, Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmfälle, Math. Ann. t. 13 (1878).

er sich nur das Ω nicht mit dem Integral Π, sondern mit dem unter (52) angegebenen Q gebildet denkt, wesshalb er auch den Buchstaben ϑ durch den Buchstaben σ ersetzt*)). Dass sich die ungeraden $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}\left(\int_y^x\right)$ wie die mit geeigneten Constanten multiplicirten Quadratwurzeln aus $\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(x) \cdot \varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(y)$ verhalten, ist ein bekannter Satz von Riemann (Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, 1865). Uebrigens kann man, wenn man mit der Definition der Thetafunctionen beginnen will, (84) als *Definition der Primform* $\Omega(xy)$ ansehen. Man wird mit Hülfe derselben Ω in viele Untersuchungen einführen können, in denen man sich bisher mehr oder minder elegant mit Hülfe der Thetafunctionen zurecht gefunden hat.

Ueberhaupt werden wir die mannigfachen Formeln, die man für die Darstellung der Quotienten verschiedener ϑ am algebraischen Gebilde aufgestellt hat, mit Leichtigkeit aus (81), (82) ableiten.

Aus Formel (81) schliessen wir z. B. [ich unterdrücke dabei der Kürze halber linker Hand die Charakteristikenbezeichnung]:

$$\log \cdot \frac{\vartheta\left(\int_y^x - \int_{c_y'}^{x'} - \cdots - \int_{c_y^p}^{x^p}\right) \cdot \vartheta\left(\int_\eta^\xi - \int_{c_\eta'}^{\xi'} - \cdots - \int_{c_\eta^p}^{\xi^p}\right)}{\vartheta\left(\int_y^\xi - \int_{c_y'}^{x'} - \cdots - \int_{c_y^p}^{x^p}\right) \cdot \vartheta\left(\int_\eta^x - \int_{c_\eta'}^{\xi'} - \cdots - \int_{c_\eta^p}^{\xi^p}\right)}$$

$$= \log \frac{\Omega(xx') \cdot \Omega(\xi\xi')}{\Omega(x\xi') \cdot \Omega(\xi x')} + \cdots + \log \frac{\Omega(xx^p) \cdot \Omega(\xi\xi^p)}{\Omega(x\xi^p) \cdot \Omega(\xi x^p)}.$$

Hier ist nun jeder der rechter Hand stehenden Logarithmen nach (27) (30) ein Integral dritter Gattung $\Pi^{x\,\xi}_{x^\nu\,\xi^\nu}$. Wir haben also die wohlbekannte und vielfach benutzte Formel vor uns:

---

*) Die sämmtlichen Entwickelungen des Hrn. Pick finden durch die Formeln (81), (82) ihre naturgemässe Erweiterung. Es ist besonders interessant, dabei den Sätzen über das identische Verschwinden der Theta nachzugehen. Wir haben bei der singularitätenfreien ebenen Curve das d der Formel (82) gleich $m-3$ zu nehmen. Daher wird (worauf mich Hr. Pick gelegentlich aufmerksam machte) bei ungeradem m von den dort in Betracht kommenden Wurzelformen $(2\varrho + d)^{\text{ter}}$ Ordnung ein System rational; dasselbe besteht aus der Gesammtheit der rationalen Formen $\left(\varrho + \frac{m-3}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die zugehörige ausgezeichnete Thetafunction verschwindet für $\varrho \leqq \frac{m-3}{2}$ $\frac{(m-2\varrho)^2-1}{8}$-fach.

$$(85)\quad \log\cdot\frac{\vartheta\left(\int\limits_y^x-\int\limits_{c_y}^{x'}-\cdots-\int\limits_{c_y^p}^{x^p}\right)\cdot\vartheta\left(\int\limits_\eta^\xi-\int\limits_{c_\eta}^{\xi'}-\cdots-\int\limits_{c_\eta^p}^{\xi^p}\right)}{\vartheta\left(\int\limits_y^\xi-\int\limits_{c_y}^{x'}-\cdots-\int\limits_{c_y^p}^{x^p}\right)\cdot\vartheta\left(\int\limits_\eta^x-\int\limits_{c_\eta}^{\xi'}-\cdots-\int\limits_{c_\eta^p}^{\xi^p}\right)}$$

$$=\Pi_{x\xi}^{x'\xi'}+\cdots+\Pi_{x\xi}^{x^p\xi^p}.$$

Wir wollen ferner in (82) $d=1$, also $m=2p-2$ setzen und $\varrho=1$ nehmen. Indem wir die Quotienten der den verschiedenen Charakteristiken $\left|\begin{matrix} g \\ h\end{matrix}\right|$ entsprechenden Ausdrücke bilden, sehen wir, dass sich an der Normalcurve der φ die ϑ mit den Argumenten

$$\underbrace{\int^{x'}+\int^{x''}+\cdots+\int^{x^{2p-2}}}_{\Gamma_1=0}$$

wie $(2p-2)$-gliedrige Determinanten aus Wurzelformen zweiter Stufe der dritten Ordnung verhalten. Dieses Resultat ist für $p=3$ von Hrn. Weber*), für beliebiges p von Hrn. Nöther**) abgeleitet worden.

Zweiter Abschnitt.

Specielle Theorie des Falles $p=3$.

§ 15.

Die ebene Curve vierter Ordnung. Algebraische Moduln der ersten Stufe und transcendente Moduln.

Wir wenden uns jetzt zu neuen Fragestellungen, auf deren allgemeinen Charakter bereits in der Einleitung verwiesen wurde. Es soll sich nicht mehr darum handeln, nach functionentheoretischen Grundsätzen auf *gegebener Riemann'scher Fläche* zu operiren, vielmehr sollen fortan die Constanten der Riemann'schen Fläche (ihre Moduln) als Veränderliche gelten und als solche der functionentheoretischen Betrachtung unterworfen werden. Hier lassen wir nun von vorneherein die bereits in Aussicht genommene Beschränkung auf den Fall $p=3$ eintreten. Dass $p=3$ einfacher ist, als der Fall der höheren p, kann von vorneherein vorausgesetzt werden, überdies aber ist es sehr

*) Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876.

**) In der wiederholt genannten Arbeit in Bd. 28 der mathemat. Annalen.

viel zugänglicher, weil wir gerade bei $p = 3$ noch eine grössere Zahl von Untersuchungen anderer Mathematiker als Vorarbeiten werden benutzen können. Die Weiterführung unserer Untersuchungen für höhere p bleibt anzustreben; vielleicht dass dabei neue Hülfsmittel werden herangezogen werden müssen.

Die Normalcurve der φ ist für $p = 3$ (vom hyperelliptischen Falle abgesehen, den wir um so lieber bei Seite lassen können, als er mit Rücksicht auf die hier vorliegende Fragestellung bereits erledigt ist) eine ebene Curve vierter Ordnung allgemeiner Art:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0. \tag{86}$$

Eine solche soll der Untersuchung fortan zu Grunde gelegt sein. Als fundamentale Moduln des algebraischen Gebildes betrachten wir consequenterweise die Coefficienten von f, sie sind uns, im Gegensatz zu anderen bald einzuführenden Modulsystemen, die „algebraischen Moduln erster Stufe"*). Eine geometrische Deutung finden vermöge unserer C_4 natürlich nur die Verhältnisse dieser Coefficienten. Die geometrische Auffassung, mit der wir arbeiten, wird also wieder nur solchen homogenen Functionen der Veränderlichen gerecht, die homogen nullter Dimension sind (vergl. oben § 2); dies hindert uns aber nicht, allgemein homogene Verbindungen derselben, d. h. Formen, in die analytische Untersuchung einzuführen. Daneben haben wir uns fortgesetzt vor Augen zu halten, dass es sich bei unseren Untersuchungen nur um solche Eigenschaften der C_4 oder Constructionen an der C_4 handeln kann, welche gegenüber projectiven Umformungen invariant sind. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir fortgesetzt mit Invarianten, bez. Covarianten von f zu thun haben.

Neben die hiermit festgelegten fundamentalen Moduln treten nun vor allen Dingen die „transcendenten" Moduln. Es sind dies zunächst die 3 . 6 Perioden

$$\begin{cases} \omega_{11}, \omega_{12}, \ldots \omega_{16}, \\ \omega_{21}, \omega_{22}, \ldots \omega_{26}, \\ \omega_{31}, \omega_{32}, \ldots \omega_{36}, \end{cases} \tag{87}$$

welche die überall endlichen Integrale

$$w_1 = \int x_1\, d\omega, \quad w_2 = \int x_2\, d\omega, \quad w_3 = \int x_3\, d\omega$$

an den Querschnitten A, B der von uns gewählten kanonischen Zerschneidung besitzen**), es sind dann insbesondere die invarianten

*) Vergl. hier und in der Folge überall die allerdings auf $p = 2$ bezüglichen Erläuterungen in den von Hrn. Burkhardt publicirten „Grundzügen einer allgemeinen Systematik etc." in Bd. 35 dieser Annalen.

**) Zwischen den 18 Grössen ω_{ik} bestehen bekanntlich drei linear unabhängige Bilinearrelationen, so dass wir 15 unabhängige Grössen behalten, was mit der Zahl der Coefficienten von f genau übereinstimmt.

Verbindungen derselben, d. h. die aus den ω_{ik} gebildeten dreigliedrigen Determinanten. Unter den letzteren greifen wir insbesondere die folgende heraus

$$(88) \qquad p_{123} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix},$$

mit ihrer Hülfe lassen sich die übrigen aus den sechs Thetamoduln

$$(89) \qquad \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}$$

zusammensetzen. Hier ist p_{123} eine Invariante vom Grade (-3) in den Coefficienten von f, die τ_{ik} aber sind absolute Invarianten. Jede Invariante von f verwandelt sich dementsprechend durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von p_{123} in eine Function der τ_{ik}.

Indem bei gegebener C_4 auf der zu ihr gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich viele kanonische Querschnittsysteme zur Definition der Perioden construirt werden können, treten neben die von uns zuerst gewählten ω_{ik} (87) unendlich viele andere Periodensysteme ω'_{ik}, welche mit den ω_{ik} durch die schon oben, unter (74), angegebenen Formeln der linearen Transformation zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 + d_1\omega_4 + e_1\omega_5 + f_1\omega_6, \\ \omega_2' &= a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \\ \omega_3' &= \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{aligned}$$

Umgekehrt ist bekannt, dass jeder linearen Transformation der Perioden der Uebergang von dem ursprünglich gewählten Querschnittssystem zu irgend einem anderen Systeme kanonischer Querschnitte entspricht*). Sind alle so entstehenden Periodensysteme gegenüber der C_4 gleichberechtigt oder zerfallen dieselben in verschiedenwerthige Kategorieen? Das ist die fundamentale Frage, über die wir uns vor allen Dingen klar werden müssen. Ich sage, *dass die sämmtlichen Periodensysteme in der That gleichberechtigt sind. Man kann nämlich die Coefficienten von f von irgend welchen Anfangswerthen beginnend durch stetige Aenderung so zu ihren Anfangswerthen zurückführen, dass dabei das irgend einer ursprünglichen Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche entsprechende Periodensystem der ω in das irgend einer anderen Zerschneidung der Fläche entsprechende Periodensystem der ω' übergeht.*

Was den Beweis der so formulirten Behauptung angeht, so erbringt man denselben wohl am einfachsten, indem man eine Ueber-

*) Dies ist zuerst von Hrn. Thomae gezeigt worden, vergl. dessen „Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen" in Bd. 75 des Journals für Math. (1872).

legung zu Hülfe nimmt, welche Riemann in Nr. 12 seiner Abel'schen Functionen entwickelt. Man interpretire die complexen Werthe irgend eines an der C_4 hinerstreckten überall endlichen Integrals, etwa des w_1, in einer Ebene. Sodann bilde man die zur C_4 gehörige Riemann'sche Fläche vermöge w_1 zweimal auf diese Ebene ab, das eine Mal, nachdem wir sie vermöge des ersten Querschnittsystems, das andere Mal, nachdem wir sie vermöge des zweiten Querschnittsystems zerschnitten haben. Wir erhalten dann in der Ebene w_1 zwei Figuren, welche je aus drei übereinander geschichteten Parallelogrammen bestehen, die durch vier Verzweigungspunkte an einander geheftet sind. Und nun ruht der ganze hier zu erbringende Beweis darauf, dass man jede solche Figur in jede andere derselben Art solcherweise überführen kann, dass alle Zwischenlagen von Figuren der gleichen Art gebildet werden, d. h. selbst aus Tripeln übereinandergelegter und durch vier Verzweigungspunkte verbundener Parallelogramme bestehen. Einer jeden solchen Figur entspricht nämlich rückwärts*) ein algebraisches Gebilde $p = 3$, d. h. eine C_4; wir können also der continuirlichen Reihenfolge der Figuren eine continuirliche Aufeinanderfolge von Curven vierter Ordnung entsprechend setzen: vermöge dieser Reihenfolge wird also gleichzeitig das Periodensystem der ω in das der ω' und die ursprüngliche C_4 in sich selbst übergeführt, was zu beweisen war.

Es ist interessant, und ich ergreife gern die Gelegenheit, hierüber einige Angaben zu machen, dass der in Rede stehende Satz keineswegs mehr richtig bleibt, wenn man sich durchweg auf hyperelliptische Gebilde $p = 3$ beschränkt: lässt man die acht Verzweigungspunkte einer zweiblättrigen Fläche des Geschlechtes 3 (also die Moduln eines *hyperelliptischen* Gebildes $p = 3$) irgendwelche Wege beschreiben, durch die sie, einzeln oder in ihrer Gesammtheit, zu ihren Anfangslagen zurückgeführt werden, während sie eine ein für alle mal auf der Fläche angebrachte Zerschneidung vor sich her schieben, so kann man dadurch keineswegs jede lineare Transformation der Perioden erzielen**). Vielmehr gelingt dies nur hinsichtlich derjenigen linearen Transformationen, die in bestimmter Weise modulo 2 zu kennzeichnen sind. Hierdurch zerfallen die linearen Transformationen, die es überhaupt gibt, in 36 modulo 2 unterschiedene Kategorieen. Wir schliessen daraus, *dass es auf der hyperelliptischen Fläche des Geschlechtes* 3 36 *verschiedene* (*hinsichtlich des hyperelliptischen Gebildes nicht gleichberechtigte*) *Arten kanonischer Querschnittsysteme giebt.* Auf meinen Wunsch hat sich Hr. H. D. Thompson im Frühjahr 1888

*) Vergl. hierzu auch p. 149—150 meiner Arbeit in Bd. 21 der math. Annalen: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" (1882).

**) Dies bemerkt bereits Hr. Camille Jordan auf p. 364—65 seines Traité des substitutions (1870).

damit beschäftigt, bei gegebener hyperelliptischer Fläche auf der von derselben doppelt überdeckten Ebene Zeichnungen für zweckmässig gewählte Repräsentanten eines jeden dieser 36 Fälle herzustellen. Diese Zeichnungen werden ganz übersichtlich; man hat in der Hauptsache nur zu unterscheiden, ob in der Ebene der Zeichnung durch den einzelnen Querschnitt die 8 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes in $2+6$ oder in $4+4$ zerlegt werden. Analytisch ist jede der hier unterschiedenen 36 Arten von Querschnittsystemen durch die Charakteristik gekennzeichnet, welche, bei Zugrundelegung derselben, der im vorliegenden Falle vorhandenen ausgezeichneten geraden Thetafunction, deren Nullwerth verschwindet, zu Theil wird: je nach der Wahl des Querschnittsystems kann nämlich diese Thetafunction jede beliebige der 36 überhaupt vorhandenen geraden Charakteristiken erhalten.

§ 16.

Adjunction von Wurzelformen und zugehörigen Moduln der zweiten Stufe.

Wir führen jetzt neben die algebraischen Moduln erster Stufe (die Coefficienten von f schlechthin) algebraische Moduln zweiter Stufe ein, indem wir gewisse auf der C_4 existirende Wurzelformen und die Relationen, durch welche dieselben mit einander verknüpft sind, in Betracht ziehen.

Die allgemeine Theorie der auf einer kanonischen Curve existirenden Wurzelformen wurde bereits in § 11 skizzirt. Wir haben derselben zufolge bei Wurzelformen zweiter Stufe zwischen solchen von gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden. Von jeder Art gibt es 2^{2p}, bei der C_4 also 64 Systeme. Die 64 Systeme gerader Ordnung sind durch Elementarcharakteristiken, die Systeme ungerader Ordnung durch Primcharakteristiken festzulegen (§ 12). Entsprechend dem verschiedenartigen Verhalten dieser Charakteristiken gegenüber linearer Transformation (ebenda) spalten sich die 64 Systeme gerader Ordnung in $1+63$, die 64 Systeme ungerader Ordnung in $28+36$. Wir lesen ferner aus dem soeben (§ 15) entwickelten Satze von der Gleichberechtigung aller kanonischen Querschnittsysteme ab, dass die 63 Systeme, wie die 28, und die 36, je unter sich der C_4 gegenüber gleichberechtigt sind*). Wenn wir also in der Folge irgend eines der 63 Systeme, oder eines der 28, bez. der 36, adjungiren, so brauchen wir nicht zu unterscheiden, welches wir gewählt haben.

*) Mit dem algebraischen Nachweise dieser Gleichberechtigung beschäftigt sich neuerdings Hr. Nöther in den Abhandlungen der Münchener Academie (Bd. XVII, 1889: Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung).

Ich werde den hiermit in abstracter Gestalt mitgetheilten Sätzen weiterhin, wo es ohne Missverständnisse geschehen kann, die übliche geometrische Form geben. Ich werde also nicht von *Berührungsformen* sprechen (durch die die Wurzelformen definirt sind) sondern von *Berührungscurven*. Dabei sollen die typischen Repräsentanten der Berührungscurven gerader Ordnung die *Berührungskegelschnitte* sein. In Uebereinstimmung mit den allgemeinen Sätzen des § 11 besteht das eine System derselben aus den doppelt zählenden geraden Linien der Ebene, ist also zweifach unendlich; die anderen 63, unter sich gleichberechtigten Systeme sind je einfach unendlich. Als Repräsentanten der Berührungscurven ungerader Ordnung werden zumeist die *Berührungscurven dritter Ordnung* dienen. Ihre sämmtlichen 64 Systeme sind dreifach unendlich. Ich nenne die 28 Systeme mit ungerader Charakteristik *Systeme der ersten Art*, die 36 Systeme gerader Charakteristik *Systeme der zweiten Art*. Berührungscurven erster Ordnung, d. h. *Doppeltangenten*, giebt es auf Grund des in § 14 berührten speciellen Umkehrtheorems nur im Falle ungerader Charakteristik. Die 28 dementsprechend zu unterscheidenden Doppeltangenten sind den 28 Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art in der Weise einzeln zugeordnet, dass jedesmal die Doppeltangente zusammen mit einer beliebigen doppeltzählenden Geraden der Ebene eine Curve dritter Ordnung des zugehörigen Systems bildet.

Zwecks Definition geeigneter Moduln zweiter Stufe werden wir ausschliesslich Berührungcurven ungerader Ordnung betrachten. Wir denken uns zu dem Zwecke eines ihrer 28 oder 36 Systeme adjungirt und die Gleichung der Curve vierter Ordnung dementsprechend in die eine oder andere charakteristische Form gesetzt. *Die Moduln zweiter Stufe, welche wir weiterhin gebrauchen, sind nichts Anderes als die in diesen Gleichungsformen vorkommenden Constanten.* Dabei ist es vielfach nützlich, das geometrische Bild zu wechseln. Den dreifach unendlich vielen Curven entsprechend, welche in dem einzelnen Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung enthalten sind, giebt es unter den zugehörigen Wurzelformen zweiter Stufe vier linear unabhängige. Als solche wähle ich

$$\sqrt{\Phi_1},\ \sqrt{\Phi_2},\ \sqrt{\Phi_3},\ \sqrt{\Phi_4}$$

und setze nun

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4}. \tag{90}$$

Wir beziehen dadurch unsere C_4 auf eine *Raumcurve sechster Ordnung*. Je nach der Art des benutzten Systems unterscheiden wir Raumcurven sechster Ordnung der ersten oder der zweiten Art. An dieser Curve sechster Ordnung werden sich dann die zuerst in der Ebene zu betrachtenden Constructionen in räumliche Constructionen umsetzen.

Algebraisch entspricht dem, dass wir von ternären Invarianten zu quaternären schreiten.

Ich werde jetzt in dem hiermit bezeichneten Sinne die zweierlei Arten von Berührungscurven dritter Ordnung einzeln in Betracht ziehen.

§ 17.

Von den Berührungscurven dritter Ordnung erster Art.

Sei $D = 0$ eine Doppeltangente unserer C_4. Indem wir durch ihre Berührungspunkte einen Kegelschnitt $\Omega = 0$ legen, können wir die Gleichung der C_4 in folgende Gestalt setzen:

(91) $$D\Phi - \Omega^2 = 0;$$

$\Phi = 0$ ist dabei, wie man sofort erkennt, eine Berührungscurve dritter Ordnung des zu D gehörigen Systems. Wir erhalten die sämmtlichen Berührungscurven des Systems, indem wir schreiben:

(92) $$\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D = 0,$$

wo $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ und die u beliebig. Zum Beweise genügt es, (91) in die Gestalt zu setzen:

(93) $$D(\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D) - (\Omega + u_x D)^2 = 0.$$

Vermöge (91) ist also das ganze zu D gehörige System von Berührungscurven dritter Ordnung rational. Daher ist (91) eine der beiden charakteristischen Gleichungsformen der C_4, die fortan festzuhalten sind: *Die Coefficienten von D, Ω, Φ sind die Moduln zweiter Stufe, welche, dieser Gleichungsform entsprechend, als adjungirt gelten sollen.*

Die Zahl der so eingeführten Moduln ist 19, entgegen der Zahl 15 der Coefficienten von f. Die erste Frage, über die wir uns bei Benutzung der neuen Moduln klar zu werden haben, ist daher die, welche Functionen derselben überhaupt als Functionen der Coefficienten von f anzusehen sind. Es sind dies offenbar diejenigen, welche bei allen continuirlichen Aenderungen der D, Ω, Φ, die f ungeändert lassen, selber ungeändert bleiben. Nun sind diese Abänderungen in Uebereinstimmung mit (92), (93) durch folgende Formeln gegeben:

(94) $$\begin{cases} D' = \lambda D, \\ \Omega' = \Omega + u_x D, \\ \Phi' = \dfrac{\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D}{\lambda}, \end{cases}$$

wo λ, u_1, u_2, u_3 beliebig. Wir mögen hier insbesondere λ unendlich wenig verschieden von 1 und u_1, u_2, u_3 unendlich wenig verschieden von Null nehmen. Indem wir ausdrücken, dass eine Function der Coefficienten von D, Ω, Φ bei den solchergestalt gewonnenen unendlich

kleinen Transformationen ungeändert bleibt, erhalten wir ein System von vier linearen partiellen Differentialgleichungen, durch welches die von uns gesuchten Functionen charakterisirt sind. Unter diesen Functionen werden uns insbesondere solche interessiren, welche gegenüber linearen Transformationen der $x_1\,x_2\,x_3$ Invarianteneigenschaft besitzen. Ich bezeichne dieselben als *die, der Gleichungsform* (91) *entsprechenden, irrationalen Invarianten, bez. Covarianten von f.*

Von (92) ausgehend haben wir jetzt folgende vier linear unabhängige Wurzelformen unseres Systems

$$(95)\qquad \sqrt{\Phi_1}=x_1\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_2}=x_2\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_3}=x_3\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_4}=\sqrt{\Phi}.$$

Indem wir dieselben der Formel (90) entsprechend mit $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$ proportional setzen, erhalten wir im Raume der z eine Curve sechster Ordnung, für welche die Gleichungen bestehen:

$$(96)\qquad D(z_1 z_2 z_3)\cdot\Phi(z_1 z_2 z_3)-\Omega(z_1 z_2 z_3)^2=0,$$

$$(97)\qquad \Phi(z_1 z_2 z_3)-2\Omega(z_1 z_2 z_3)\cdot z_4+D(z_1 z_2 z_3)\cdot z_4^2=0.$$

Hier stellt (97) eine Fläche dritter Ordnung vor, welche nur insofern particularisirt ist, als sie durch die vierte Ecke des Coordinatentetraeders der z hindurchläuft; (96) ist der Umhüllungskegel vierter Ordnung, welcher sich von besagter Ecke an die Fläche legen lässt. Indem wir das hierin liegende Resultat von dem speciellen bei uns benutzten Coordinatensystem ablösen, haben wir: *Unsere Raumcurve sechster Ordnung kann definirt werden als die Berührungscurve, welche eine beliebige F_3 mit dem an sie von einem beliebigen ihrer Punkte auslaufenden Umhüllungskegel vierter Ordnung gemein hat.**)

Wir fragen, wie bei der so gewonnenen Raumfigur die 28 Doppeltangenten der C_4 zur Geltung kommen. Eben diese Frage hat Herr Geiser in Bd. I der Mathematischen Annalen untersucht (Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades, 1868). Es handelt sich um die 28 Doppeltangentialebenen des Kegels vierter Ordnung (96). Eine derselben ist von vornherein bekannt, das ist $D(z_1 z_2 z_3)=0$, *die Tangentialebene der Fläche dritter Ordnung in der Kegelspitze.* Die anderen werden nach Geiser durch die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung gegeben: *sie fallen mit denjenigen Ebenen zusammen, welche die Kegelspitze beziehungsweise mit den* 27 *Geraden der F_3 verbinden.* Von hieraus ergeben sich Vergleichspunkte zwischen der Theorie der 28 Doppeltangenten und derjenigen der 27 Geraden, auf die wir zum Theil noch weiter unten zurückkommen.

---

*) Diese Berührungscurve liegt natürlich auf einer Fläche zweiten Grades; aus (96), (97) findet sich für dieselbe $\Omega(z_1 z_2 z_3)-D(z_1 z_2 z_3)\cdot z_4=0$.

Wir führen jetzt die z in die Formeln (94) ein und erhalten:

$$z_1' = \lambda z_1, \quad z_2' = \lambda z_2, \quad z_3' = \lambda z_3,$$
$$z_4' = \frac{z_4 + u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3}{\lambda}.$$

Combinirt man diese Formeln mit einer beliebigen linearen Transformation der $z_1 z_2 z_3$, so hat man die allgemeinste quaternäre lineare Transformation der $z_1 z_2 z_3 z_4$. Wir schliessen daraus, dass wir die erwähnten irrationalen Invarianten, bez. Covarianten der C_4 schlechtweg definiren können als *Invarianten, bez. Covarianten des von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr gegebenen Projectionspunkte gebildeten quaternären Systems.* —

Dies sind, was die Berührungscurven dritter Ordnung erster Art angeht, die Elemente, mit denen wir später zu arbeiten haben werden.

§ 18.

Von den Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art.

Unsere Kenntniss der Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art geht bekanntlich auf Hesse zurück (Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven 4ter Ordnung, Journal für Mathematik Bd. 49, 1855; Ueber Doppeltangenten der ebenen Curven 4ter Ordnung, ebenda). Ich reproducire sein Hauptresultat zunächst folgendermassen (indem ich durchaus in der Ebene operire):

Seien

$$\sqrt{\Phi_1},\ \sqrt{\Phi_2},\ \sqrt{\Phi_3},\ \sqrt{\Phi_4}$$

vier linearunabhängige Wurzelformen eines Systems zweiter Art. Es ergiebt sich dann der Satz, dass auch die Quadrate und Producte dieser Formen, die wir, vermöge $f = 0$, rationalen Formen dritten Grades gleich setzen können:

$$(\sqrt{\Phi_1})^2 = \Psi_{11},\ \sqrt{\Phi_1}\sqrt{\Phi_2} = \Psi_{12}, \ldots$$

linear unabhängig sind. Daher ist es möglich, die drei Polaren

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

aus den Ψ linear zusammenzusetzen, was durch folgende Formeln geschehen mag:

$$(98) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \Sigma \beta_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \Sigma \gamma_{ik} \Psi_{ik}.$$

Mit den solchergestalt gewonnenen Constanten α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} bilde man jetzt die Linearformen

$$(99) \qquad \pi_{ik} = \alpha_{ik} x_1 + \beta_{ik} x_2 + \gamma_{ik} x_3.$$

Dann lässt sich die Gleichung der C_4 in Gestalt folgender symmetrischer Determinante schreiben:

$$(100) \qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

die Ψ_{ik} aber werden den dreigliedrigen Unterdeterminanten dieser Determinante proportional, so dass das zugehörige System von Berührungscurven dritter Ordnung, unter $c_1\, c_2\, c_3\, c_4$ willkürliche Constante verstanden, durch die rationale Gleichung gegeben ist:

$$(101) \qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.\text{*)}$$

Hier sind nun die 30 *durch* (98) *eingeführten Grössen α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} die von uns in Betracht zu ziehenden Moduln der zweiten Stufe.* Wir fragen uns wieder vor allen Dingen, welchen Bedingungen eine Function der neuen Moduln genügen muss, um eine Function der Coefficienten von f zu sein. Diese Bedingungen ergeben sich fast unmittelbar aus (100) und lassen sich in folgender Weise formuliren: Man denke sich die ursprünglich gewählten vier Wurzelformen $\sqrt{\Phi_1}, \ldots, \sqrt{\Phi_4}$ irgendwie durch vier ihrer linearen Verbindungen, deren Determinante gleich Eins sein soll, ersetzt. Dann erleiden ebenfalls die zehn Grössen Ψ_{ik} und also, nach (98), die α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} (jede dieser drei Grössenreihen für sich genommen) eine bestimmte lineare Substitution. *Nur diejenigen*

---

*) Ich schliesse hier, weil sich in gegenwärtiger Abhandlung keine andere passende Stelle findet, eine Formel für die auf die Curve vierter Ordnung bezogene unserem Berührungssysteme entsprechende gerade Thetafunction $\vartheta_{\left|\substack{g\\h}\right|}\left(\int_y^x\right)$ an, — eine Formel, welches das Seitenstück zu der unter (84) gegebenen für ungerade Thetafunctionen geltenden ist, sofern man letztere auf den Fall der ebenen Curve vierter Ordnung einschränken will. Die neue Formel lautet:

$$\vartheta_{\left|\substack{g\\h}\right|}\left(\int_y^x\right) = \frac{h_1 \Sigma \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + h_2 \Sigma \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + \cdots}{\sqrt{(h_1 \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}(x) + \cdots)\,(h_1 \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}(y) + \cdots)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum \Pi_{x\,y}^{x^i\,y^i}}.$$

Hier bedeutet $h_1\, h_2\, h_3$ irgend welchen Hülfspunkt der Ebene und die Summation im Exponenten ist über diejenigen Punkte x', x'', x''', bez. y', y'', y''' der Curve zu erstrecken, welche, von x und y verschieden, der Verbindungslinie des h mit x, bez. y angehören.

Functionen der α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} *sind Functionen der Coefficienten von* f, *welche bei den sämmtlichen solcherweise entstehenden linearen Substitutionen ungeändert bleiben.* Hiernach kann man ein System von 15 linearen partiellen Differentialgleichungen aufstellen, durch welches sich unsere Functionen charakterisiren lassen. — Wieder mögen wir unter den so definirten Functionen solche heraussuchen, welche gegenüber linearen Transformationen der x_1, x_2, x_3 Invarianteneigenschaft besitzen. Wir werden dieselben als *die zur Gleichungsform* (100) *gehörenden irrationalen Invarianten, bez Covarianten von* f bezeichnen.

Alle diese Beziehungen werden nun um Vieles durchsichtiger, wenn wir der Formel (90) entsprechend, wie dies im vorliegenden Falle Hesse selbst bereits that, raumgeometrische Vorstellungen einführen. Statt (90) können wir hier schreiben:

$$z_1^2 : z_1 z_2 : \cdots : z_4^2 = \Psi_{11} : \Psi_{12} : \cdots : \Psi_{44}.$$

Die Gleichungen (98) also ergeben die drei Flächen zweiten Grades:

$$\sum \alpha_{ik} z_i z_k = 0, \quad \sum \beta_{ik} z_i z_k = 0, \quad \sum \gamma_{ik} z_i z_k = 0; \tag{102}$$

das Flächennetz, welches sich aus denselben zusammensetzen lässt, entspricht dem Netz der aus den Ausdrücken (98) zusammenzusetzenden Polaren der Curve vierter Ordnung. *Daher entspricht der Curve vierter Ordnung im Raume die Kegelspitzencurve sechster Ordnung des durch* (102) *gegebenen Flächennetzes.* Besonders einfach wird, was wir über die zu (100) gehörigen irrationalen Invarianten und Covarianten der C_4 gesagt haben. Man betrachte die gemischt ternär-quaternäre Form:

$$x_1 \sum \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum \gamma_{ik} z_i z_k. \tag{103}$$

Es wird sich bei unseren Invarianten und Covarianten um solche von (103) *abhängige Ausdrücke handeln, welche bei beliebigen linearen Substitutionen der* x *wie der* z *Invarianteneigenschaft besitzen, d. h. um Combinanten des Flächennetzes im allgemeinsten Sinne.* Beschränken wir uns dabei auf gewöhnliche Invarianten oder Covarianten von f, so müssen wir natürlich hinzufügen, dass in den betreffenden Ausdrücken keine z mehr vorkommen sollen.

Es erübrigt, dass wir zur Sprache bringen, wie sich die 28 Doppeltangenten unserer C_4 an der C_6 darstellen. Zu dem Zwecke müssen wir, mit Hesse, die acht Punkte, in denen sich die Flächen (102) schneiden, einzeln einführen. *Die* 28 *Verbindungslinien dieser* 8 *Punkte sind in gewissem Sinne das Bild der* 28 *Doppeltangenten.* Jede dieser Verbindungslinien erweist sich nämlich als eine Sekante der C_6, welche die C_6 in solchen zwei Punkten trifft, die vermöge (90) den Berührungspunkten der ebenen C_4 mit einer ihrer Doppeltangenten entsprechen.

§ 19.

Von der Discriminante der C_4 und ihrer Darstellung in den Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe.

Eine ganz besondere Rolle spielt im Folgenden die *Discriminante* der C_4, d. h. diejenige Function ihrer Coefficienten, deren Verschwinden das Auftreten eines Doppelpunktes der Curve vierter Ordnung anzeigt. Wir müssen uns hier mit den Darstellungen beschäftigen, welche dieselbe in den von uns unterschiedenen Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe findet.

Im Bereiche erster Stufe ist die Discriminante definirt als diejenige rationale, ganze, homogene Function 27^{ten} Grades der Coefficienten von f, die sich als Resultante der drei Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=0$$

bei Elimination der $x_1\,x_2\,x_3$ ergiebt. Dieselbe ist eine Invariante vom Gewichte 36. Ich führe dabei gern an, dass es Herrn Gordan, einer brieflichen Mittheilung zufolge, neuerdings gelungen ist, die hier geforderte Elimination wirklich durchzuführen, Sei f vorübergehend symbolisch $=a_x^4=b_x^4=c_x^4$. So geht Hr. Gordan von der Bemerkung aus, dass die folgende, von uns schon oben (in der Anmerkung zu Formel (52)) benutzte Covariante:

$$(a\,b\,c)^2\sum_{\varkappa+\lambda+\mu=2} a_x^{\lambda+\mu}\,b_x^{\mu+\varkappa}\,c_x^{\varkappa+\lambda}\,a_y^{\varkappa}\,b_y^{\lambda}\,c_y^{\mu},$$

unter x die Coordinaten eines Doppelpunktes der C_4 verstanden, für sämmtliche Werthe der y verschwindet. Dies giebt, indem wir die Coefficienten y_1^2, $y_1 y_2, \ldots$ einzeln gleich Null setzen, sechs Gleichungen vierten Grades für die x_1, x_2, x_3, d. h. sechs lineare Gleichungen für die 15 Glieder 4^{ter} Dimension x_1^4, $x_1^3 x_2, \ldots$. Weitere 9 Gleichungen derselben Art erhält man aber, wenn man eine jede der drei bereits bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=0$$

der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt. Aus den so gewonnenen 15 Gleichungen können wir jetzt die x_1^4, $x_1^3 x_2, \ldots$ als linear vorkommende Grössen in elementarer Weise eliminiren. Das Resultat ist eine fünfzehnreihige Determinante, deren erste 6 Zeilen je dritten Grades in den Coefficienten von f sind, während die neun folgenden in den Coefficienten linear sind. Die Determinante ist also im Ganzen 27^{ten} Grades in den Coefficienten von f: sie ist mit der gesuchten Discriminante ohne weiteres identisch, oder weicht doch nur, wenn

wir letztere ihrem absoluten Werthe nach bereits auf andere Weise definirt haben, von ihr um einen Zahlenfactor ab, der uns hier gleichgültig ist. —

Wir wenden uns jetzt zu den beiden Rationalitätsbereichen der §§ 17 und 18.

Um mit dem ersten derselben zu beginnen, wollen wir unsere Untersuchung in der Weise geometrisch einleiten, dass wir fragen, wie man das von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr liegenden Projectionspunkte gebildete System particularisiren muss, damit der von dem Projectionspunkte an die Fläche gehende Umhüllungskegel vierter Ordnung eine Doppelkante erhält. Die Geiser'schen Betrachtungen, auf welche wir bereits verwiesen, ergeben in dieser Hinsicht zwei und nur zwei Möglichkeiten: *Entweder muss die Fläche dritter Ordnung von der wir ausgehen, selbst einen Doppelpunkt bekommen, oder es muss der Projectionspunkt, den wir benutzen, auf eine der 27 Geraden der Fläche rücken.* Im ersteren Falle verschwindet ein Ausdruck Σ, den wir als „Discriminante der F_3" benennen können. Im anderen Falle wird Null erhalten, wenn wir in diejenige Covariante neunter Ordnung der F_3, deren Verschwinden auf der F_3 die 27 Geraden festlegt, die Coordinaten des Projectionspunktes eintragen. Ich will den so bestimmten Ausdruck mit T bezeichnen. Wir haben also für die Discriminante der Curve vierter Ordnung nothwendig eine Darstellung folgender Form:

$$\text{Discr.} = \Sigma^\alpha \mathsf{T}^\beta, \tag{104}$$

unter α, β noch zu bestimmende Multiplicitäten verstanden*).

Um α, β festzulegen, müssen wir jetzt genauer darauf eingehen, wie sich die Ausdrücke Σ und T aus den Coefficienten von D, Ω, Φ aufbauen. Ich will dabei jeden einzelnen Ausdruck als eine Summe von Gliedern anschreiben, deren einzelnes in den Coefficienten von D, Ω, Φ bez. homogen ist:

$$= S(\overset{l}{D}, \overset{m}{\Omega}, \overset{n}{\Phi}),$$

wo l, m, n resp. den Grad des einzelnen Gliedes in den Coefficienten von D, Ω, Φ angeben sollen. Wir haben in dieser Hinsicht**):

1) Σ ist in den Coefficienten unserer F_3 (97), deren Gleichung wir noch einmal hersetzen:

$$\Phi - 2\Omega z_4 + D z_4^2 = 0,$$

---

*) Ich werde, um alle Missverständnisse auszuschliessen, die Discriminante der C_4 in den Formeln immer ausführlich mit „Discr." bezeichnen.

**) Vergl. die Angaben in Salmon's Analytic Geometry of three dimensions, p. 503 ff. [ich citire auch weiterhin auf die vierte Auflage des Originals (vom Jahre 1882), die ich gerade zur Hand habe].

von der 32^{ten} Ordnung. Daher hat man für jedes einzelne Glied der Σ entsprechenden Summe S:

$$l + m + n = 32.$$

Ferner hat Σ das Gewicht $\frac{32 \cdot 3}{4} = 24$. Setzt man jetzt in die Gleichung der F_3 für z_4 λz_4, während $z_1\ z_2\ z_3$ ungeändert bleiben, so kommt dies darauf für Φ, Ω, D beziehungsweise Φ, $\lambda\Omega$, $\lambda^2 D$ zu schreiben. Hierbei soll Σ seinem Gewicht entsprechend den Factor λ^{24} erhalten. Dies giebt für jedes Glied unseres S:

$$2l + m = 24.$$

Wir erhalten also für Σ folgende Darstellung:

$$\Sigma = S(\overset{l}{D},\ \overset{24-2l}{\Omega},\ \overset{8+l}{\Phi}). \tag{105}$$

2) T ist der leitende Coefficient einer Covariante unserer F_3, d. h. der Coefficient der höchsten in dieser Covariante auftretenden Potenz von z_4. Diese Covariante hat in den Variabeln den Grad 9, in den Coefficienten den Grad 11. Hiernach erhält man für die in der Entwickelung von T auftretenden Glieder:

$$l + m + n = 11, \quad 2l + m = \frac{33 - 9}{4} + 9 = 15.$$

Daher ist:

$$T = S(\overset{l}{D},\ \overset{15-2l}{\Omega},\ \overset{-4+l}{\Phi}). \tag{106}$$

3) Die Discriminante von $f = D\Phi - \Omega^2$ ergiebt als Function 27^{ten} Grades der Coefficienten von f eine Darstellung der folgenden Form:

$$\text{Discr.} = S(\overset{l}{D},\ \overset{54-2l}{\Omega},\ \overset{l}{\Phi}). \tag{107}$$

Der Vergleich der Formeln (105)—(107) mit (104) ergiebt jetzt mit Nothwendigkeit für die in (104) noch unbestimmten Constanten $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Wir haben also:

Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der ersten Art setzt sich die Discriminante der C_4 aus den in (105), (106) *näher definirten Bestandtheilen Σ, T vermöge der Formel zusammen:*

$$\text{Discr.} = \Sigma T^2. \tag{108}$$

Hierbei sind, wie man beachten mag, Σ und T allein genommen keineswegs Functionen der Coefficienten von f. Sie bleiben allerdings, vermöge ihrer quaternären Invarianteneigenschaft, bei denjenigen Operationen (94) ungeändert, welche $\lambda = 1$ entsprechen; setzt man aber, um zu den allgemeinen Operationen (94) aufzusteigen, hinterher $D' = \lambda D$, $\Omega' = \Omega$, $\Phi' = \frac{\Phi}{\lambda}$, so wird Σ den Factor λ^{-8}, T den Factor λ^{+4} erhalten; *erst das Product $\Sigma \cdot T^2$ ist eine Function der Coefficienten von f.* —

Wir betrachten ferner die Raumcurven sechster Ordnung zweiter Art. Dabei können wir uns etwas kürzer fassen, weil das Resultat, um welches es sich handelt, schon anderweitig bekannt ist.*) Soll unsere Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhalten, so zeigt sich, dass die 8 Grundpunkte des die Raumcurve sechster Ordnung definirenden Netzes von Flächen zweiter Ordnung eine von zwei besonderen Lagen annehmen müssen: *es müssen entweder zwei der acht Punkte zusammenfallen* (worauf die C_6 selbst einen Doppelpunkt erhält), *oder es müssen sich die Punkte zu vier und vier auf zwei Ebenen vertheilen* (es muss im Flächennetz ein Ebenenpaar vorhanden sein, worauf die C_6 in die Durchschnittskante der beiden Ebenen und eine C_5 zerfällt). Beide Vorkommnisse werden durch das Verschwinden von Invarianten der ternär-quaternären Form (103) (von Combinanten des Flächennetzes) ausgedrückt. Im ersteren Falle ist die betreffende Combinante nichts anderes als die sogenannte Tactinvariante des Netzes; sie ist als solche in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} je vom 16ten Grade; wir wollen sie hier mit S bezeichnen. Im zweiten Falle haben wir eine Combinante 10ten Grades in den α_{ik}, wie in den β_{ik} und den γ_{ik}; sie soll T genannt werden. Nun ist die Discriminante unserer C_4, mit Rücksicht auf die unter (100) gegebene Gleichungsform derselben, in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} zusammengenommen vom 108ten Grade, also in den α_{ik}, wie in den β_{ik} oder in den γ_{ik} einzeln genommen vom Grade 36. Wir sprechen sofort das Resultat aus:

Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der zweiten Art hat man eine ganz ähnliche Zerlegung der Discriminante der C_4, wie oben unter (108)*; es ist:*

$$\text{Discr.} = ST^2. \tag{109}$$

Nur sind jetzt hier die beiden Factoren S und T einzeln genommen bereits als Functionen der Coefficienten von f anzusehen. Denn hierzu ist es nach § 18 nicht nur erforderlich sondern auch hinreichend, dass man es mit Combinanten des Flächennetzes zu thun hat. Als Function der Coefficienten von f hat S den Grad 12, T den Grad $7\frac{1}{2}$.

§ 20.

Ueber das Verhalten der Berührungscurven dritter Ordnung beim Auftreten eines Doppelpunktes.**)

Wir bestätigen die Formeln (108), (109) und gewinnen zugleich die Grundlage für spätere Folgerungen, indem wir zusehen, wie sich

---

*) Vergl. Salmon l. c. p. 208 ff., insbesondere p. 213.

**) Vergl. bei diesem und den beiden folgenden Paragraphen die demnächst in diesen Annalen erscheinenden „Untersuchungen aus dem Gebiete der hyper-

die einzelnen Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung der C_4 verhalten, wenn die C_4 einen Doppelpunkt bekommt. Zu dem Zwecke werden wir zunächst untersuchen, welchen Einfluss die Entstehung des Doppelpunktes auf die Thetamoduln $\tau_{\alpha\beta}$ hat, wobei uns aber gestattet sein wird, zwecks Definition der $\tau_{\alpha\beta}$ auf der zur C_4 gehörigen Riemann'schen Fläche ein möglichst einfach gewähltes Schnittsystem zu Grunde zu legen. In der That gewinnen wir auf dem hiermit angedeuteten Wege in einfachster Weise nicht nur die in Betracht kommenden Sätze über das Verhalten der Berührungscurven sondern zugleich die Grundlage für unsere späteren die Thetafunctionen betreffenden Entwickelungen.

Um jetzt zunächst das in Rede stehende Schnittsystem zu definiren, denken wir uns die Riemann'sche Fläche aus der Curve vierter Ordnung durch Projection von irgend einem der Curve selbst nicht angehörigen Punkte der Ebene aus abgeleitet, so dass wir eine vierblättrige Fläche mit 12 Verzweigungspunkten vor uns haben. Da sieht man denn ohne Weiteres, wie das Entstehen eines Doppelpunktes der C_4 auf die Riemann'sche Fläche wirkt. Der Erfolg ist der, dass zwei auf der Riemann'schen Fläche durch einen Verzweigungsschnitt verbundene Verzweigungspunkte zusammenrücken und sich dadurch compensiren. Ich will die Stelle, an der sich die beiden Verzweigungspunkte vereinigen, insofern sie dem einen der beiden ursprünglich verbundenen Blätter angehört, mit ξ, insofern sie dem anderen der beiden Blätter angehört, mit η bezeichnen. Durch das Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte ist das p unserer Fläche auf Zwei herabgesunken. Wir werden jetzt die so erhaltene Fläche kanonisch zerschneiden, indem wir auf ihr nach den bekannten Regeln zwei Paare von Querschnitten: A_1, B_1 und A_2, B_2 herstellen, von denen indess keiner durch ξ oder η hindurchlaufen soll. Ist dies geschehen, so führen wir noch zwei Schnitte A_3, B_3, die folgendermassen definirt sein sollen: A_3 führt vom Punkte η, ohne den A_1, B_1, A_2, B_2 irgendwie zu begegnen, zum Punkte ξ, B_3 umgiebt den Punkt ξ (oder auch η, wenn wir es vorziehen sollten) in kleinem Kreise. Wir betrachten jetzt, was offenbar gestattet ist, dieses Schnittnetz A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 *als Grenzlage einer eben hierdurch definirten kanonischen Zerschneidung der ursprünglichen Fläche* $p = 3$. Hinsichtlich der so gefundenen Zerschneidung führen wir dann auf der Fläche $p = 3$ Normalintegrale erster Gattung ein, die uns bestimmte Thetamoduln $\tau_{\alpha\beta}$ liefern. Dann gehen wir wieder zur Fläche $p = 2$ zurück und sehen, was dabei aus den Integralen erster Gattung und den $\tau_{\alpha\beta}$ wird.

elliptischen Modulfunctionen" von Hrn. Burkhardt. Es sind dort Ueberlegungen ähnlicher Art, wie die im Texte für $p = 3$ gegebenen, für den Fall $p = 2$ mit grosser Sorgfalt durchgeführt.

Ich setze das allgemeine Schema der Formel (4) noch einmal her:

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
v_1	1	0	0	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
v_2	0	1	0	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
v_3	0	0	1	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}

Hier ändert sich nun, was die Integrale v angeht, beim Grenzübergang zur Fläche $p = 2$ nur das, dass v_3 in ξ und η logarithmische Unstetigkeitsstellen erhält und also in ein Integral dritter Gattung übergegangen ist. In der That liefert die Ueberschreitung von A_3, d. h. die Umkreisung von ξ, für v_3 dem Schema entsprechend den Betrag 1; wir haben also $\frac{1}{2i\pi}$ als das zum Punkte ξ gehörige logarithmische Residuum von v_3 anzusehen. Aber unser Schema schreibt gleichzeitig als Perioden von v_3 an A_1, A_2 0, 0 vor. Nehmen wir Beides zusammen, so werden wir, in der Grenze,

$$v_3 = \frac{1}{2i\pi}(\Pi_{\xi\eta}),$$

setzen dürfen, unter (Π) ein zur Fläche $p = 2$ gehöriges im gewöhnlichen Sinne transcendent normirtes Integral dritter Gattung verstanden*). Dabei gehen nun, in Uebereinstimmung mit Formel (6), $\tau_{13} = \tau_{31}$ und $\tau_{23} = \tau_{32}$ beziehungsweise in die wohlbestimmten Grössen $v_1^{\xi\eta}$ und $v_2^{\xi\eta}$ über. Anders aber das τ_{33}. *Es ergiebt sich, dass* $\tau_{33} = i\infty$ *wird.* Wir wollen in der Folge schreiben:

(110) $$q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}.$$

Wir haben dann:

Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so wird für das von uns gewählte Schnittsystem q_{33} zu Null.

Wir fragen jetzt nach dem zugehörigen Verhalten der Berührungscurven, gerader und ungerader Ordnung, die wir hier beide brauchen**). Wir wollen dabei, um möglichst einfache Sätze zu erhalten, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche entgegen nur solche Curven zur Curve vierter Ordnung *adjungirt* nennen, welche eine *ungerade* Anzahl von

---

*) Ich habe dies zum ersten Male vorgetragen, als ich im Sommer 1874 über Abel'sche Functionen las.

**) Vergl. insbesondere Brill „Ueber die Anwendung der hyperelliptischen Functionen in der Geometrie", Journal für Mathematik Bd. 65 (1864), sodann die Erläuterungen, welche Herr Lindemann in Clebsch's Vorlesungen über Geometrie auf pag. 879, 880 des Bd. I giebt. Die im Texte gegebenen Theoreme scheinen in ihrer vollständigen Form neu zu sein.

Malen durch den Doppelpunkt der letzteren hindurchlaufen; alle anderen Curven heissen nicht-adjungirt.

Um mit den Berührungskegelschnitten zu beginnen, so ist deren Theorie besonders zugänglich, weil wir das einzelne System derselben durch eine *Elementarcharakteristik* $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ festlegen können (§ 12). Seien $a_1 a_2 a_3 a_4$ die vier Schnittpunkte der C_4 mit einer geraden Linie, $b_1 b_2 b_3 b_4$ die Berührungspunkte eines dem System angehörigen Kegelschnittes, $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_6$ die Perioden eines beliebigen Integrals erster Gattung, so ist die betr. Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\int_{a_1}^{b_1} + \int_{a_2}^{b_2} + \int_{a_3}^{b_3} + \int_{a_4}^{b_4} = \frac{h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + g_1\omega_4 + g_2\omega_5 + g_3\omega_6}{2}.$$

Dabei kommen von den möglichen Werthsystemen $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ allein die 63 in Betracht, welche von $\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$ verschieden sind. — Wir schliessen jetzt, mit Rücksicht auf den angegebenen Werth von τ_{33}:

Von den 63 *Systemen von Berührungskegelschnitten, die bei der allgemeinen* C_4 *zu unterscheiden sind, erweisen sich, sobald die* C_4 *einen Doppelpunkt erhält, diejenigen* 32, *deren* $g_3 = 1$ *ist, als adjungirt, die anderen* 31 (*mit* $g_3 = 0$) *als nicht adjungirt.*

Die nähere Untersuchung zeigt ferner, dass von den Kegelschnittsystemen der ersten Art immer diejenigen zwei identisch werden, deren Charakeristiken sich nur durch das h_3 unterscheiden; *es giebt also bei der* C_4 *mit Doppelpunkt nur* 16 *getrennte Systeme adjungirter Berührungskegelschnitte.*

Die Kegelschnittsysteme der anderen Art bleiben getrennt. Aber unter ihnen ist eines, welches unsere ganz besondere Aufmerksamkeit auf sich zieht. Es ist dies das System mit der Charakteristik

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|.$$

Während nämlich die 30 *übrigen nicht adjungirten Kegelschnittsysteme allgemein zu reden aus eigentlichen Kegelschnitten bestehen* (*unter denen sich nur einzelne Linienpaare finden*), *so ist dieses System in das Büschel der doppeltzählenden durch den Doppelpunkt laufenden Geraden ausgeartet.* Insbesondere vertreten bei ihm die sechs vom Doppelpunkt an die Curve auslaufenden Tangenten, jede dieser sechs Tangenten doppeltgezählt, die sechs Doppeltangentenpaare, welche der allgemeinen

Theorie zufolge unter den Kegelschnitten jedes Berührungssystems vorhanden sein sollen.

Wir beschäftigen uns jetzt des Näheren mit den 28 Doppeltangenten. Jede einzelne derselben wird uns im allgemeinen Falle durch eine Primcharakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ festgelegt, die ungerade ist, d. h. für die $g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 \equiv 1 \pmod{2}$. Erhält jetzt die C_4 einen Doppelpunkt, so müssen wir diejenigen 12 Doppeltangenten, für welche $g_3 = 0$ ist, von den anderen 16, für die $g_3 = 1$ ist, abtrennen. Wir finden:

Von den 12 *Doppeltangenten mit* $g_3 = 0$ *fallen jedesmal diejenigen zwei, deren Charakteristiken sich nur durch das* h_3 *unterscheiden, mit einander zusammen und gehen dabei, indem sie adjungirt werden, in die* 6 *soeben genannten vom Doppelpunkte auslaufenden Tangenten über. — Die* 16 *Doppeltangenten mit* $g_3 = 1$ *verlaufen getrennt und nicht adjungirt.*

Man beweist diese Sätze, indem man bemerkt, dass die Primcharakteristiken irgend zweier Doppeltangenten zusammenaddirt die Elementarcharakteristik gerade desjenigen Kegelschnittsystems ergeben müssen, unter dessen Kegelschnitten das von den beiden Doppeltangenten gebildete Linienpaar als specieller Fall enthalten ist.

Auf dieselbe Weise weiter schliessend, sieht man, dass man allgemein bei den Berührungscurven ungerader Ordnung die Fälle $g_3 = 0$ und $g_3 = 1$ auseinanderzuhalten hat:

Von den Systemen mit $g_3 = 0$ *fallen immer diejenigen zwei, die sich nur durch das* h_3 *unterscheiden, zusammen; die Systeme mit* $g_3 = 1$ *verlaufen getrennt.*

Die sämmtlichen Curven der Systeme mit $g_3 = 0$ *sind adjungirt, diejenigen der Systeme mit* $g_3 = 1$ *sind nicht adjungirt**).

Betrachten wir insbesondere Berührungscurven dritter Ordnung, so haben wir 32 Systeme mit $g_3 = 0$ und ebensoviele mit $g_3 = 1$. Wir unterschieden oben die Systeme mit ungerader und gerader Charakteristik als solche der ersten und der zweiten Art. Von den Systemen erster Art finden sich unter den 32 mit $g_3 = 0$ 12, unter den 32 mit $g_3 = 1$ 16. Die entsprechenden Zahlen für Systeme zweiter Art sind 20 und 16. Unter den Systemen mit $g_3 = 0$ fallen selbstverständlich immer nur solche zwei zusammen, die derselben Art angehören. —

*) Das ist also genau umgekehrt wie bei den durch Elementarcharakteristiken festgelegten Systemen von Berührungskegelschnitten (oder von Berührungscurven gerader Ordnung generell).

§ 21.

Neue Sätze über das Verhalten der Curvendiscriminante.

Die im vorigen Paragraphen erhaltenen Sätze gestatten uns vor allen Dingen, die Theoreme über Discriminantenzerlegung, die wir in § 19 erhielten, wesentlich zu vervollständigen:

Wir bemerken zunächst, dass jedesmal, wenn bei einer C_4 ein Doppelpunkt entsteht, eines der 63 Systeme zugehöriger Kegelschnitte ausgezeichnet ist. Nun sind, wie wir wissen, alle 63 Systeme an sich gleichberechtigt (§ 16). Daher schliessen wir:

Adjungirt man) sämmtliche Systeme von Berührungskegelschnitten, so zerfällt die Discriminante der C_4 in 63 gleichberechtigte Factoren.*

Wir könnten diesem Satze weiter nachgehen, indem wir bemerken, dass sämmtliche Berührungskegelschnitte rational bekannt sind, wenn man die 28 Doppeltangenten einzeln kennt, dass man aber letzteres im Anschlusse an bekannte Untersuchungen von Aronhold erreichen kann, indem man von 7 Doppeltangenten als willkürlich gegeben ausgeht, etc. Inzwischen würde uns dies zu sehr von dem speciellen Gegenstande unserer Untersuchung abführen. Vielmehr wende ich mich zu den Entwickelungen des § 19 zurück.**)

Wir sind in § 19 von den Raumfiguren der § 17, 18 ausgegangen. Ich sage jetzt, *dass in jeder dieser beiden Raumfiguren die 63 Factoren der Discriminante, von denen wir gerade sprechen, mit Leichtigkeit zu erkennen sind.*

Um mit der Curve sechster Ordnung erster Art zu beginnen, so ist von vornherein klar, dass der Factor T der Zerlegung (108) 27 der 63 Factoren in sich begreift: besagt doch $\mathsf{T} = 0$, dass der auf der Fläche dritter Ordnung bewegliche Projectionspunkt auf eine der 27 Geraden der Fläche gerückt ist. Aber ebenso lassen die bereits citirten Geiser'schen Entwickelungen erkennen, dass der andere Factor der Zerlegung (108), also Σ, 36 von den 63 Möglichkeiten umfasst. Denn wenn, dem Verschwinden von Σ entsprechend, die

*) Im Galois'schen Sinne.

**) Ich muss hier speciell auf die Arbeiten der Herren Schottky und Frobenius über die Theorie der Curven vierter Ordnung verweisen (Schottky: Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von 3 Variabeln (Leipzig 1880), Frobenius in den Bänden 98, 99, 103, 105 des Journals für Mathematik (1885—89)). Es ist nicht zu zweifeln, dass in diesen Arbeiten (wie schon vorher in Herrn Weber's Schrift über die Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3 (Berlin 1876)) zahlreiche Formeln auftreten, welche mit den von mir im Texte gegebenen Entwickelungen, insbesondere auch denjenigen, die weiter unten über die Thetanullwerthe mitgetheilt werden sollen, auf das Innigste zusammenhängen. Inzwischen scheint es, dass die expliciten Theoreme, zu denen ich in einfachster Weise komme, als solche bisher nicht bekannt gewesen sind.

Fläche dritter Ordnung, mit der wir operiren, selbst einen Doppelpunkt bekommt, so wird dabei von den 36 Schläfli'schen Doppelsechsen, welche die Fläche trägt, immer eine ausgezeichnet, und jede dieser Doppelsechsen steht zu einer der Steiner'schen „Gruppen" von 12 Doppeltangenten der C_4, d. h. zu einem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten der C_4, in ausschliesslicher Beziehung. Zusammenfassend wollen wir schreiben:

$$(111) \qquad 63 = (27)_{\mathsf{T}} + (36)_{\Sigma}.$$

In demselben Sinne werden wir jetzt für die Curve sechster Ordnung zweiter Art erhalten:

$$(112) \qquad 63 = (35)_T + (28)_S.$$

Es ist nämlich klar, dass die Bedingung $T = 0$ (d. h. die Bedingung, unter der sich die acht Grundpunkte des Netzes von Flächen zweiter Ordnung zu vier und vier auf zwei Ebenen vertheilen), sofern man die Doppeltangenten der C_4 und also die Grundpunkte des Netzes als einzeln bekannt ansieht, auf 35 verschiedene Weisen zu befriedigen ist $\left(35 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)$, während die Forderung $S = 0$ (dass zwei von den acht Grundpunkten zusammenfallen) genau entsprechend auf 28 Möglichkeiten führt $\left(28 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}\right)$.

Wir verbinden diese Resultate jetzt mit den am Schluss des vorigen Paragraphen erhaltenen Sätzen.

Den letzteren zufolge zerfallen die 28 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art, die es giebt, sobald ein Doppelpunkt auftritt, in 12, welche adjungirt, und in 16, welche nicht adjungirt werden. Man halte jetzt ein einzelnes der 28 Systeme fest, lasse dafür aber den Doppelpunkt der Reihe nach entsprechend jeder einzelnen der 63 hierfür unterschiedenen Möglichkeiten auftreten. Dann wird $\frac{12 \cdot 63}{28} = 27$ mal der Fall vorliegen, dass das gegebene System von Berührungscurven adjungirt verläuft, $\frac{16 \cdot 63}{28} = 36$ mal wird es nicht adjungirt sein. Hiermit vergleiche man jetzt (111). Wir schliessen:

Im ersteren Falle verschwindet das zum System der Berührungscurven gehörige T, *im zweiten Falle* Σ.

Wir machen jetzt die entsprechende Abzählung für die 36 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art. Von den 63 hinsichtlich der Entstehung des Doppelpunktes zu unterscheidenden Möglichkeiten müssen für das einzelne der 36 Systeme $\frac{20 \, . \, 63}{36} = 35$ zur Folge haben, dass das System adjungirt wird, $\frac{16 \, . \, 63}{36} = 28$, dass es nicht adjungirt wird. Der Vergleich mit (112) ergiebt also:

Das eine Mal verschwindet das zum Systeme der Berührungscurven gehörige T, das andere Mal das S.

Wir werden diese beiden Ergebnisse jetzt so zu einem Satze zusammenfassen, dass wir die specielle Zerschneidung der Riemann'schen Fläche heranziehen, die im vorigen Paragraphen benutzt wurde. Wir haben dann:

Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet für diejenigen ihr zugehörigen Raumcurven sechster Ordnung, deren im Sinne von § 20 *bestimmte Charakteristik* $g_3 = 0$ *aufweist,* T *beziehungsweise* T*; für die anderen Raumcurven, deren Charakteristiken* $g_3 = 1$ *enthalten, verschwindet* Σ *beziehungsweise* S.

Noch wollen wir genauer angeben, wie stark in jedem Falle der einzelne Discriminantenfactor, beziehungsweise die Discriminante selbst verschwindet. Wir wollen uns dabei auf die bekannten Verhältnisse des elliptischen Falles beziehen. Ich will letzteren in gewöhnlicher Weise durch eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten vorgestellt sein lassen, von denen jetzt, dem Ansatze des § 20 entsprechend, zwei zusammenrücken mögen. Wir denken uns auf dieser Fläche das den Vorschriften des § 20 entsprechende kanonische Querschnittsystem construirt. Wir finden dann, dass in der Grenze das zugehörige τ gleich $i\infty$ wird, so dass $q = e^{i\pi\tau}$ verschwindet. Nun kennen wir aber von anderer Seite (aus der Theorie der elliptischen Functionen) für das aus den Argumenten der vier Verzweigungspunkte zu bildende Differenzenproduct eine nach Potenzen von q fortschreitende Reihe, aus der wir erfahren, dass besagtes Differenzenproduct im Grenzfalle ebenso stark wie q selbst verschwindet. Wir übertragen jetzt dieses Resultat auf die vierblättrige, mit 12 Verzweigungspunkten ausgestattete Riemann'sche Fläche des § 20. Dann tritt an Stelle des q das q_{33} (110), und wir finden, dass das Differenzenproduct der Argumente der 12 Verzweigungspunkte, sobald die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhält, wie q_{33} selber verschwindet. Jetzt erheben wir unser Differenzenproduct in's Quadrat und erhalten so einen Ausdruck, dessen wesentlicher, hier allein in Betracht zu ziehender Factor die Discriminante der Curve vierter Ordnung ist. Daher haben wir den wichtigen Satz:

Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet die zugehörige Discriminante bei Zugrundelegung des in § 20 *definirten Schnittsystems wie* q_{33}^2.

Dieses Resultat überträgt sich dann sofort, vermöge (108), (109) auf die einzelnen Discriminantenfactoren Σ, T, bez. S, T. *Insbesondere werden* Σ *und* S, *wenn sie verschwinden* (d. h. wenn das g_3 der im Sinne von § 20 in Betracht kommenden Charakteristik gleich 1 ist) *immer auch verschwinden wie* q_{33}^2.

§ 22.

Erneute Inbetrachtnahme der Thetafunctionen.

Wir haben jetzt alle Hülfsmittel, um bei der Curve vierter Ordnung die in § 13 aufgestellten Formeln wesentlich zu vervollständigen. Bei der Werthbestimmung der Theta sind damals die multiplicativen Constanten durchaus unbestimmt geblieben. Wir nehmen uns jetzt vor, dieselben bei der Curve vierter Ordnung jedenfalls so weit festzulegen, als sie von den Coefficienten der Curve abhängen: der numerische Bestandtheil, der dann noch zu bestimmen bleibt, wird durch Grenzübergang zu niederen Fällen zu eruiren sein. Und zwar werden wir die Frage in der Weise anfassen, dass wir geradezu das Glied niederster Dimension in der nach Potenzen der $v_1 v_2 v_3$ (oder, was dasselbe ist, in der nach Potenzen der $w_1 w_2 w_3$) fortschreitenden Reihenentwickelung der Thetafunctionen zu bestimmen suchen. Hieran reiht sich dann naturgemäss als letzte von uns zu behandelnde Aufgabe die Frage nach den Gliedern höherer Dimension dieser Entwickelung. Und hier, zum Schluss der gegenwärtigen Abhandlung, wird es von Vortheil, für den allgemeinen Fall $p = 3$ diejenigen Functionen in die Betrachtung einzuführen, die man nach Analogie des elliptischen und des hyperelliptischen Falles als *Sigmafunctionen* bezeichnen wird.

Es handelt sich, wie man sieht, in den folgenden Paragraphen um dieselben Fragestellungen, die ich für hyperelliptische Functionen in den §§ 11—14 meiner Arbeit in Bd. 32 behandelt habe. Inzwischen ist der Ausgangspunkt hier und dort ein wesentlich verschiedener. Ich hatte mir damals die Aufgabe gestellt, vom algebraischen Gebilde beginnend auf synthetischem Wege zu den Sigmafunctionen und deren Reihenentwickelung zu gelangen; der Uebergang zu den ϑ geschah erst hinterher und mehr beiläufig. Hier dagegen erscheinen die ϑ als das von vorneherein Gegebene; es sind ganz wesentlich ihre Eigenschaften, die uns interessiren; die σ erscheinen nur zum Schlusse bei der Durchführung der Potenzentwickelung. Hiermit hängt zusammen, dass ich damals den Werth der bei den ϑ auftretenden multiplicativen Constanten C kurzweg ohne Beweis angab (l. c. pag. 376, 377), während die Festlegung dieser Constanten jetzt als ein Hauptpunkt der Entwickelung erscheint, dem wir die nächsten beiden Paragraphen ausschliesslich widmen.

Was Untersuchungen anderer Mathematiker angeht, die hier in Betracht kommen, so hat Riemann bekanntlich in der schon oben genannten Nr. 25 seiner Abel'schen Functionen darauf hingewiesen, dass die Bestimmung der fraglichen Constanten auf rechnerischem Wege durch Umformung derjenigen Differentialgleichungen muss gefunden werden können, denen die ϑ bezüglich der v und der τ ge-

nügen. Dieser Weg ist dann für den Fall der hyperelliptischen Functionen von Hrn. Thomae wenigstens betreffs der einfachsten bei denselben in Betracht kommenden Thetafunctionen durchgeführt worden*), und ich füge gern an, dass in seiner demnächst erscheinenden Göttinger Dissertation Hr. Schröder die analogen Betrachtungen für die höheren hyperelliptischen Theta zum Abschluss bringt. Es haben sich ferner die Herren Thomae**) und Fuchs***) mit der Aufgabe beschäftigt, bei allgemeineren algebraischen Gebilden den von Riemann geforderten Ausdruck für $d \log \vartheta (0\,0 \ldots 0)$ zu berechnen. Hr. Thomae hat später auch die Integration dieses Ausdrucks in Betracht gezogen†), wobei er sich eines functionentheoretischen Ansatzes bedient, der, allgemein gesagt, darauf hinauskommt, die Constanten der Riemann'schen Fläche als veränderliche Grössen zu betrachten. Letzteres ist, wie man bemerkt, derselbe Gedanke, der dem ganzen zweiten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung zu Grunde liegt und der uns nun in der That bei der hier vorliegenden Frage, was den allgemeinen Fall $p = 3$ angeht, zu einfachen Schlussresultaten leiten soll. Mein Ansatz ist dabei insofern einfacher als der von Hrn. Thomae, als ich mich überhaupt nicht mit der Differentialformel für $d \log \vartheta (000)$ beschäftige, sondern die Werthbestimmung des $\vartheta (0\,0\,0)$, bez. der anderen, neben $\vartheta (0\,0\,0)$ in Betracht kommenden Constanten direct in Angriff nehme (so dass also mit meinen Entwickelungen zugleich eine vereinfachte Bestimmung der betreffenden Constanten der hyperelliptischen und elliptischen Theorie gegeben ist). Aber der wesentliche Unterschied liegt in der Wahl der veränderlichen Grössen, durch die wir die einzelne Riemann'sche Fläche festlegen. Während ich nämlich als solche durchweg die Coefficienten der C_4, beziehungsweise die in § 17, 18 definirten Moduln zweiter Stufe verwende, benutzt Hr. Thomae die complexen Argumente der Verzweigungspunkte, die bei der von ihm zu Grunde gelegten Riemann'schen Fläche auftreten. An dieser Wahl geeigneter Variabelen, die sich genau dem jeweils in Betracht kommenden Rationalitätsbereiche anpassen, hängt der ganze Erfolg der weiterhin zu gebenden Entwickelungen. Dabei bewährt sich wieder das Princip der homogenen Veränderlichen. Denn die Schlussformeln, um die es sich handelt, würden sich unnöthig complicirt darstellen,

*) Journal für Mathematik, Bd. 71 (1870): Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta (0\,0 \ldots 0)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen.

**) Journal für Math. Bd. 66 (1866): Bestimmung von $d \log \vartheta (0, 0, \ldots 0)$ durch die Classenmoduln.

***) Journ. für Math. Bd. 73 (1871): Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von $d \log \vartheta (0, 0, \ldots 0)$ als Function der Classenmoduln.

†) Journ. für Math. Bd. 75 (1873): Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen.

wenn man nicht die bei uns vorkommenden Coefficienten selbst, sondern irgendwelche aus ihnen zu bildende Quotienten als Variable zu Grunde gelegt hätte*).

Ich will doch, ehe ich weiter gehe, das Princip der in Rede stehenden functionentheoretischen Schlussweise klar formuliren, und dies um so mehr, als ich mich weiterhin, bei den einzelnen Anwendungen, der Kürze halber gezwungen sehe, immer nur die Prämissen der einzelnen Schlüsse und dann gleich die Resultate zu geben. Man denke sich die Gesammtheit der von den 15 Coefficienten der C_4 anzunehmenden Werthsysteme unter dem Bilde eines fünfzehnfach ausgedehnten Raumes. Innerhalb desselben werden die Coefficienten solcher Curven vierter Ordnung, welche einen gewöhnlichen Doppelpunkt besitzen, durch eine 14-fach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit vertreten sein: denjenigen C_4 dagegen, welche höhere Singularitäten oder singuläre Punkte in höherer Zahl besitzen, werden algebraische Mannigfaltigkeiten von höchstens 13 Dimensionen entsprechen; die Zahl der verschiedenen derart in Betracht zu ziehenden Mannigfaltigkeiten ist nothwendig endlich. Alle Schlüsse über die Natur der darzustellenden Functionen werden nun gemacht, indem wir diese sämmtlichen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten schlechtweg bei Seite lassen, in der Weise, dass wir jedesmal solche zwei Functionen identisch setzen, von denen wir wissen, dass sie sich an sämmtlichen Stellen, die jenen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten *nicht* angehören, gleichartig verhalten.

Es erübrigt, dass ich die speciellen Grundlagen des angewandten Verfahrens angebe. Dieselben werden zunächst von den Sätzen gebildet, die Riemann in seiner Abhandlung über das Verschwinden der Theta gab, beziehungsweise von den Folgerungen, welche Hr. Weber aus diesen Sätzen gezogen hat (in der schon oben genannten Abhandlung in Bd. 13 der mathematischen Annalen (1878): Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle). Aus denselben folgt nämlich, was die Voraussetzung aller weiteren Schlüsse ist, dass bei keiner der 64 zu einer singularitätenfreien C_4 gehörigen Thetafunctionen das erste Glied der nach Potenzen der $v_1 v_2 v_3$ fortschreitenden Entwickelung identisch verschwinden kann. Hierüber hinaus aber benutzen wir *das Verhalten der ϑ gegenüber linearer Periodentransformation.* Ich will hier die Fundamentalformel für die lineare Transformation der ϑ in einer Form hersetzen, in der Hr. Thomae dieselbe im 75. Bande des Journals für Mathematik (l. c.)

*) Hr. Thomae ist seinerseits neuerdings auf den Fall $p = 3$ zurückgekommen (in den Sächsischen Berichten von 1887: Bemerkungen über Thetafunctionen vom Geschlecht 3).

entwickelt hat. Es sei p_{123} die unter (88) eingeführte Periodendeterminante; v', τ', p'_{123}, g', h' seien die transformirten Werthe der v, τ, p_{123}, g, h; M bezeichne den Quotienten:

$$(113) \qquad M = \frac{p'_{123}}{p_{123}}.$$

Dann hat man

$$(114) \qquad \frac{\vartheta_{\left|{g' \atop h'}\right|}(v', \tau')}{\sqrt{p'_{123}}} = j_{\left|{g \atop h}\right|} \cdot \frac{\vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} \cdot e^{-i\pi\left(\frac{\partial \log M}{\partial \tau_{11}} v_1^2 + \frac{\partial \log M}{\partial \tau_{12}} v_1 v_2 + \cdots\right)},$$

unter $j_{\left|{g \atop h}\right|}$ eine von der Charakteristik abhängige achte Einheitswurzel verstanden, deren besonderer Werth für uns nicht in Betracht kommt.

§ 23.

Das Product der Nullwerthe der 36 geraden Thetafunctionen.

Wir betrachten jetzt zunächst, wieder im Anschlusse an Thomae, Bd. 75, das durch p_{123}^{18} dividirte Product der Nullwerthe der 36 geraden Thetafunctionen, oder vielmehr, um Formel (114) bequem anwenden zu können, die achte Potenz des so definirten Ausdrucks, d. h.

$$(115) \qquad \frac{\prod_1^{36} \vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(0\,0\,0)^8}{p_{123}^{144}}.$$

Nach Formel (114) ändert sich dieser Ausdruck bei linearer Transformation der Perioden überhaupt nicht, ist also eine eindeutige Function der Coefficienten von f. Die $\vartheta(0\,0\,0)$ sind in diesen Coefficienten homogen vom nullten Grade, p_{123} ist vom Grade -3. Der Grad unseres Ausdrucks ist also $+432$.

Es handelt sich jetzt darum, diesen Ausdruck, wenn möglich, als rationale Function der Coefficienten von f darzustellen.

Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst damit beschäftigen, zu untersuchen, wie sich die 36 zu f gehörigen geraden Thetafunctionen beim Entstehen eines Doppelpunktes verhalten. Wir dehnen diese Untersuchung, da es ohne Mühe geschieht und wir das Resultat später doch brauchen, gleich mit auf die 28 ungeraden Thetafunctionen aus. Indem wir über die Formeln der linearen Periodentransformation verfügen, durch welche wir von jedem beliebigen kanonischen Querschnittsystem zu jedem anderen übergehen können, so dürfen wir bei dieser Untersuchung irgend welche bequem gewählte Zerschneidung der Riemann'schen Fläche zu Grunde legen. Als solche benutzen wir jetzt die in § 20 gegebene, vermöge deren die Argumente v, τ der Theta-

functionen beim Eintreten des Doppelpunktes keine andere Aenderung erlitten, als dass τ_{33} gleich $i\infty$ wurde, so dass $q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}$ verschwand. Wir verfahren hiernach einfach so, dass wir $q_{33} = 0$ in die 64 Thetareihen eintragen. So ergiebt sich ein Resultat, dessen Uebereinstimmung mit dem in § 20 (gegen Ende des Paragraphen) für die Berührungscurven dritter Ordnung abgeleiteten auf der Hand liegt. Wir finden:

Diejenigen 32 *Theta, deren* $g_3 = 0$ *ist* (die also adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung entsprechen), *fallen paarweise zusammen, indem sie in die* 16 *Thetareihen des Falles* $p = 2$ *übergehen, die anderen* 32 (welche den nicht adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung correspondiren) *verschwinden identisch.*

Wir werden bei den 32 ϑ der letzteren Kategorie unter den Gliedern der Reihenentwickelung jetzt diejenigen heraussuchen, die am schwächsten verschwinden. *Es ergiebt sich, dass dieselben alle den Factor* $q_{33}^{1/4}$ *besitzen.* Betrachten wir q_{33} als unendlich kleine Grösse, so werden wir dementsprechend in erster Annäherung setzen dürfen:

$$(116)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau) = q_{33}^{1/4} \cdot \bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau).$$

Hier ist $\bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ ein solches Grenztheta, wie es schon in den Untersuchungen von Rosenhain auftritt und später von Clebsch und Gordan vielfach bei der Behandlung ebener Curven mit Doppelpunkt gebraucht wurde*). Die Definition dieser $\bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ wird durch die Reihe gegeben:

$$(117)\qquad \bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_2} \left(e^{i\pi\left(v_3 + \frac{h_3}{2}\right)} \cdot E_1 + e^{-i\pi\left(v_3 + \frac{h_3}{2}\right)} \cdot E_2 \right),$$

wo:

$$E_1 = e^{i\pi\left(\sum_1^2{}^{\alpha} \sum_1^2{}^{\beta} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} + \sum_1^2{}^{\alpha} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\tau_{\alpha 3} + 2\sum_1^2{}^{\alpha} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right) \right)},$$

$$E_2 = e^{i\pi\left(\sum_1^2{}^{\alpha} \sum_1^2{}^{\beta} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} - \sum_1^2{}^{\alpha} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\tau_{\alpha 3} + 2\sum_1^2{}^{\alpha} \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right) \right)};$$

ich theile dieselbe hier mit, damit man sich überzeugt, was wir später brauchen werden, dass die $\bar{\vartheta}$ ebenso wie die ϑ ganze Functionen der $v_1 v_2 v_3$ sind.

Wir kehren jetzt zu den Nullwerthen der geraden Theta zurück. Bezüglich derselben werden wir sofort sagen:

---

*) Abel'sche Functionen, p. 270 ff. (das Capitel vom „erweiterten" Umkehrproblem), Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, pag. 867 ff.

Sobald die C_4 einen Doppelpunkt erhält, werden von den 36 *geraden Thetanullwerthen* 16 *Null wie* $q_{33}^{1/4}$, *die übrigen* 20 *bleiben von Null verschieden.*

Nun wird, sofern wir an dem besonderen in § 20 eingeführten Querschnittsystem festhalten, die Periodendeterminante p_{123} von dem Entstehen eines Doppelpunktes überhaupt nicht in Mitleidenschaft gezogen. Wir haben daher:

Unser Product (115) *verschwindet beim Entstehen eines Doppelpunktes wie* q_{33}^{32}.

Jetzt ziehen wir den Satz heran, den wir gegen Schluss des § 22 der Riemann'schen Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen entnahmen. Derselbe besagt für die hier in Betracht kommenden Thetanullwerthe, dass keiner derselben verschwinden kann, so lange die Curve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt (oder höheren singulären Punkt) bekommt. Das Gleiche wird also auch für unser Product (115) gelten.

Hiermit haben wir aber, bei unserem Producte, lauter Eigenschaften, welche gleicherweise der 16ten Potenz der Curvendiscriminante zukommen. In der That, die 16te Potenz der Discriminante ist in den Coefficienten von f vom Grade 432, sie verschwindet (nach § 21) beim Entstehen eines Doppelpunktes wie q_{33}^{32}, sie wird gewiss nicht Null, so lange kein Doppelpunkt vorliegt. Und nun tritt die Schlussweise, von der wir im vorigen Paragraphen handelten, in ihr Recht.

Wir schliessen, *dass unser Product bis auf einen constanten Factor mit der* 16ten *Potenz der Discriminante übereinstimmt.* Wir wollen hier noch beiderseits die achte Wurzel ziehen. *Dann haben wir, unter c eine numerische Constante verstanden:*

$$(118)\qquad \prod_1^{36} \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(0\,0\,0) : p_{123}^{18} = c \cdot \mathrm{Discr.}^2$$

Die Fragestellung, von der wir zu Anfang dieses Paragraphen ausgingen, ist damit vollständig beantwortet. Nebenbei folgt, dass das Product der 36 in (114) definirten, auf gerade Charakteristiken $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ bezüglichen achten Einheitswurzeln $j_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ allemal der Einheit gleich ist*).

*) Formel (118) dehnt sich mit Leichtigkeit auf $p = 4$ aus. Die Normalcurve der φ ist bei $p = 4$ im dreidimensionalen Raume als Durchschnitt einer F_2 und einer F_3 gegeben. Nun sei Δ die Determinante der F_2, T die Tactinvariante von F_2 und F_3. Dann kommt für das Product der Nullwerthe der zugehörigen 136 geraden Thetafunctionen:

$$\prod_1^{136} \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(0\,0\,0\,0) : p_{1234}^{68} = c \cdot \Delta^2 \cdot T^8.$$

§ 24.

Das Anfangsglied in der Reihenentwickelung des einzelnen ϑ.

Wir haben das Product des vorigen Paragraphen vorab betrachtet, weil bei ihm die Schlussweise, auf die es ankommt, innerhalb des Rationalitätsbereiches erster Stufe zur Geltung gelangt. Indem wir uns jetzt dazu wenden, durch entsprechende Betrachtungen das Anfangsglied in der Reihenentwickelung der einzelnen ϑ festzulegen, haben wir uns je in einem derjenigen Rationalitätsbereiche zweiter Stufe zu bewegen, die in § 17, 18 eingeführt wurden. Uebrigens sind die hier zu ziehenden Schlüsse durch die Entwickelungen des § 21 auf das Beste vorbereitet.

Beginnen wir mit dem geraden Theta. Bei ihnen wird es sich um die algebraische Bestimmung des einzelnen

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(0\,0\,0) : \sqrt{p_{123}}$$

handeln. Nach Formel (114) ist die achte Potenz dieser Grösse innerhalb desjenigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe, der die gerade Charakteristik $\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|$ trägt, eindeutig. Dabei ist sie (wegen des p_{123}) von der 12^{ten} Dimension in den Coefficienten von f. Und wie ist es mit ihrem Verschwinden? Sie verschwindet, dem Riemann'schen Satze zufolge, gewiss nicht, so lange die Curve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt besitzt; erhält aber die C_4 einen solchen, so verschwindet sie dann und nur dann, wenn ihre auf das Querschnittsystem des § 20 bezogene Charakteristik $g_3 = 1$ aufweist; sie verschwindet in einem solchen Falle wie das Quadrat des zugehörigen q_{33}. Alle diese Eigenschaften kommen aber genau so dem in Formel (109) auftretenden Discriminantenfactor $S_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}$ zu [wir setzen demselben hier, um uns völlig genau ausdrücken zu können, die Charakteristik $\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|$ als Index hinzu]. *Wir schliessen also, dass, unter c' eine geeignete numerische Constante verstanden, die folgende Formel statt hat:*

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(0\,0\,0) : \sqrt{p_{123}} = c' \sqrt[8]{S_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}}. \tag{119}$$

Hiermit ist der Fall der geraden ϑ erledigt.

Wenden wir uns jetzt zu den ungeraden ϑ. Um keine Lücke zu lassen, will ich zunächst aus (84) die allgemeine Form des ersten Gliedes ihrer Reihenentwickelung ableiten. Wir wollen dabei zwecks

besseren Anschlusses an die jetzt gebrauchte Bezeichnung das dort vorkommende $\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}$ durch $D_{\left|{g \atop h}\right|}$ ersetzen, sodass wir die Formel haben:

$$\vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}\left(\int_y^x\right) = C \cdot \sqrt{D_{\left|{g \atop h}\right|}(x) \cdot D_{\left|{g \atop h}\right|}(y)} \cdot \Omega(x, y).$$

Hier schreibe man jetzt $x = y + dy$. Dann entsteht rechter Seite, indem wir die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung weglassen:

$$C \cdot D_{\left|{g \atop h}\right|}(y) \cdot d\omega_y.$$

Aber die Integrale w_1, w_2, w_3 sind unter gleicher Voraussetzung:

$$w_1 = y_1 d\omega_y, \quad w_2 = y_2 d\omega_y, \quad w_3 = y_3 d\omega_y.$$

Der Anfangsterm in der Reihenentwickelung des ϑ nach Potenzen der w wird also, wie anderweitig bekannt $\Big($ich lasse jetzt der Kürze halber die Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ in den Formeln weg$\Big)$:

$$C \cdot D(w) = C(D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3).$$

Dies ist die gesuchte allgemeine Form. Unsere Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die hier vorkommende Constante C festzulegen. Wir erhalten eine explicite Definition derselben, indem wir die Taylor'sche Entwickelung unserer Thetafunction heranziehen. In der That wird vermöge derselben:

$$(120) \qquad C = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_1}\right)_{000} \cdot v_1 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_2}\right)_{000} \cdot v_2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_3}\right)_{000} \cdot v_3}{D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3}.$$

Dieses C unterwerfen wir nun einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie vorhin den Nullwerth des geraden ϑ. Wir bilden uns $\Big($ich füge jetzt die Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ wieder zu$\Big)$ den Quotienten

$$C_{\left|{g \atop h}\right|} : \sqrt{p_{123}}$$

und bemerken, dass dessen achte Potenz vermöge (114) in dem zur ungeraden Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ gehörigen Rationalitätsbereiche des § 17 eindeutig ist. Wir untersuchen seine Dimension in den Coefficienten der zugehörigen D, Φ, Ω und betrachten die Fälle, in denen er verschwindet. *Solcher Weise kommt dann als Gegenstück zu Formel* (119):

$$(121) \qquad C_{\left|{g \atop h}\right|} : \sqrt{p_{123}} = c'' \sqrt[8]{\Sigma_{\left|{g \atop h}\right|}},$$

unter c'' eine geeignete numerische Constante, unter Σ den in (105), (108) *betrachteten Discriminantenfactor verstanden.*

§ 25.

Von den Functionen Th.

Ehe wir jetzt die höheren Glieder der uns interessirenden Reihenentwickelungen der ϑ aufsuchen, werden wir statt der ϑ, indem wir dieselben mit einem geeigneten Exponentialfactor versehen, andere Functionen einführen, die von den Coefficienten der C_4 in einfacherer Weise abhängen. Es sind dies dieselben Functionen, welche Hr. Wiltheiss mit dem Buchstaben Th zu bezeichnen pflegt*), Functionen, welche zwischen den ϑ und den weiter unten einzuführenden σ in der Mitte stehen. Wir schreiben:

$$(122)\qquad \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3,\ \omega_{ik}) = \frac{\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau)}{\sqrt{p_{123}}}\cdot e^{\Sigma a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}$$

und legen den hier rechter Seite auftretenden Exponentialfactor durch dieselbe Forderung fest, von welcher ich im Falle $p = 2$ in meiner ersten Arbeit über hyperelliptische Sigmafunctionen (Math. Ann. Bd. 27, 1886) ausgegangen bin. Wir verlangen nämlich, *dass in der Reihenentwickelung des Productes der geraden Th nach Potenzen der $w_1 w_2 w_3$, bez. der $v_1 v_2 v_3$, das Glied zweiter Dimension identisch ausfallen soll.* Dies bewirkt dann (vergl. § 2 der genannten Arbeit), dass sich die Th bei linearer Periodentransformation von etwa zutretenden achten Einheitswurzeln abgesehen glatt permutiren, so dass an Stelle von (114) die einfache Formel tritt:

$$(123)\qquad \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix}g'\\h'\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3,\ \omega'_{ik}) = j_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}\cdot \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3,\ \omega_{ik}).$$

Für den in (122) auftretenden Exponentialfactor finden wir vermöge des Taylor'schen Theorems:

$$(124)\qquad \sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = -\frac{1}{72}\left(\sum_1^{36}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}\cdot v_1^2 + 2\sum_1^{36}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}\cdot v_1 v_2 + \cdots\right).$$

Hier soll der Buchstabe ϑ rechter Hand den Nullwerth des einzelnen geraden Theta, $\vartheta_{\alpha\beta}$ den Nullwerth des nach v_α, v_β genommenen zweiten Differentialquotienten desselben Theta bedeuten; die Summation geht über sämmtliche gerade Theta. Ich habe in § 5 der genannten Abhandlung über hyperelliptische Sigmafunctionen den entsprechenden Ausdruck für $p = 2$ in charakteristischer Weise umgerechnet, indem ich die Discriminante des hyperelliptischen Gebildes in denselben einführte. Genau so können wir hier verfahren, sofern wir Formel (118) zu Grunde legen. Indem wir die Riemann'schen Differentialgleichungen heranziehen:

---

*) Vergl. z. B. Hrn. Wiltheiss' Untersuchungen über hyperelliptische Functionen in den Bänden 29, 31, 33 der mathemat. Annalen.

$$4i\pi\,\frac{\partial\vartheta(v,\tau)}{\partial\tau_{11}}=\frac{\partial^2\vartheta(v,\tau)}{\partial v_1^2},\quad 2i\pi\,\frac{\partial\vartheta(v,\tau)}{\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2\vartheta(v,\tau)}{\partial v_1\,\partial v_2},\ \cdots$$

erhalten wir aus (124) zunächst:

$$\sum a_{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta=-\frac{i\pi}{18}\left(\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{11}}}{\vartheta}\cdot v_1^2+\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{12}}}{\vartheta}\cdot v_1v_2+\cdots\right).$$

Hier werden wir jetzt

$$\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta}$$

durch

$$\frac{\partial\log\prod_1^{36}(\vartheta)}{\partial\tau_{ik}}$$

ersetzen und dann für das Product der Thetanullwerthe dessen Werth aus (118) einführen. Solcherweise kommt

$$(125)\qquad \sum a_{\alpha\beta}\,v_\alpha\,v_\beta=$$

$$=-\frac{i\pi}{9}\left(\frac{\partial\log(p_{123}^9\,\mathrm{Discr.})}{\partial\tau_{11}}\cdot v_1^2+\frac{\partial\log(p_{123}^9\,\mathrm{Discr.})}{\partial\tau_{12}}\cdot v_1v_2+\cdots\right).$$

Wir könnten diesen Ausdruck vermöge der zwischen den verschiedenen dreigliedrigen Periodendeterminanten p_{ikl} bestehenden Relationen noch symmetrischer gestalten (vergl. immer die Entwickelungen in Bd. 27), doch mag es hier bei Formel (125) sein Bewenden haben.

Um die Fundamentaleigenschaft der durch (122), (125) definirten Th, die durch (123) ausgedrückt wird, von der Grundformel (114) der linearen Transformation der Theta aus zu verificiren, hat man nur zu beachten, dass bei beliebiger linearer Transformation jedesmal

$$\frac{\partial}{\partial\tau'_{11}}\cdot v_1'^2+\frac{\partial}{\partial\tau'_{12}}\cdot v_1'v_2'+\cdots=\frac{\partial}{\partial\tau_{11}}\cdot v_1^2+\frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\cdot v_1v_2+\cdots$$

wird (so dass man also den Operator

$$\frac{\partial}{\partial\tau_{11}}\cdot v_1^2+\frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\cdot v_1v_2+\cdots$$

als eine Invariante der linearen Transformation bezeichnen könnte). Wir erkennen daraus, dass es noch unendlich viele andere Functionen giebt, die sich bei linearer Periodentransformation wie die Th nach Formel (123) umsetzen. Sei nämlich J irgend eine rationale (und also bei linearer Periodentransformation unveränderliche) Invariante unserer C_4; ihr Grad in den Coefficienten sei ν. Wir schreiben dann in (125) für das Product $(p_{123}^9\cdot\mathrm{Discr.})$ allgemeiner $(p_{123}^{\nu/3}\cdot J)$, für $\frac{i\pi}{9}$ $\frac{3i\pi}{\nu}$.

Die dementsprechend aus (122) *hervorgehenden Functionen*

$$(126)\qquad \frac{\vartheta_{\left|\substack{g\\h}\right|}(v,\tau)}{\sqrt{p_{123}}}\, e^{-\frac{3i\pi}{\nu}\left(\frac{\partial \log\left(p_{123}^{\nu/3} J\right)}{\partial \tau_{11}}\cdot v_1^2+\frac{\partial \log\left(p_{123}^{\nu/3} J\right)}{\partial \tau_{12}}\cdot v_1 v_2+\cdots\right)}$$

werden immer die Eigenschaft haben, sich bei linearer Periodentransformation der Formel (123) *entsprechend zu verhalten.*

Es ist wesentlich zu bemerken, wodurch sich unter den so gewonnenen Functionen (126) unsere durch (125) festgelegten Th insbesondere auszeichnen. Es liegt dies darin, *dass sie, gleich den ursprünglichen* ϑ, *bei allen Ausartungen der* C_4 *endlich bleiben.* Im allgemeinen wird die durch (126) eingeführte Function unendlich werden, sobald die Invariante J verschwindet. Unser Th dagegen bleibt endlich, auch wenn die Discriminante der Curve vierter Ordnung zu Null wird. Wir brauchen, um dies zu sehen, nur von (125) zu (124) zurückzugehen. Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so bleiben nach den früheren Entwickelungen alle $\vartheta_{\left|\substack{g\\h}\right|}(v,\tau)$ von Null verschieden, deren g_3 gleich Null ist, die anderen verschwinden wie $q_{33}^{1/4}\cdot\bar{\vartheta}_{\left|\substack{g\\h}\right|}(v,\tau)$. Hierbei bleiben, wie man sieht, die sämmtlichen in (124) auftretenden Quotienten $\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta}$ endlich. Wir haben bei dieser Ueberlegung allerdings die specielle Zerschneidung des § 20 zu Grunde gelegt. Allein Formel (123) belehrt uns darüber, dass das Resultat von der besonderen Art der zu Grunde gelegten Zerschneidung unabhängig ist.

§ 26.

Excurs über Integrale dritter Gattung.

Aus Formel (126) werden wir jetzt eine Folgerung für die Theorie der Integrale dritter Gattung ziehen. Wir bemerkten bereits oben, in § 14, dass man jeder allgemeinen Thetafunction

$$\Theta = C\cdot e^{\Sigma a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}\cdot\vartheta(v,\tau)$$

genau so ein Integral dritter Gattung entsprechend setzen kann, wie dem ϑ selbst das Π; die Definition dieses Integrals dritter Gattung war in der Formel enthalten

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} - 2\sum a_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{\xi\eta}.$$

Wir schliessen, indem wir (126) herannehmen:

Jedes Integral dritter Gattung der folgenden Form:

$$(127)\quad P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \frac{3i\pi}{\nu}\left(2\,\frac{\partial \log\left(p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J\right)}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^{xy} v_1^{\xi\eta} + \frac{\partial \log\left(p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J\right)}{\partial \tau_{12}} \left(v_1^{xy} v_2^{\xi\eta} + v_1^{\xi\eta} v_2^{xy}\right) + \cdots\right)$$

hat die Eigenschaft, bei linearer Periodentransformation völlig ungeändert zu bleiben, also von den Coefficienten der C_4 eindeutig abzuhängen.

Wir denken uns jetzt dieses P nach Formel (61) des § 9 an der Curve vierter Ordnung als Doppelintegral hinerstreckt:

$$(128)\qquad P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z \cdot d\omega_\zeta \cdot \frac{\Psi(z, \zeta;\ \alpha\beta)}{(\alpha_z \beta_\zeta - \beta_z \alpha_\zeta)^2}.$$

Hier wird Ψ (weil P in den Coefficienten der C_4 vom nullten Grade ist) selbst in den Coefficienten vom zweiten Grade sein. Es ist ferner klar, dass Ψ eine Covariante von f sein muss: denn P ist aus lauter Bestandtheilen aufgebaut, welche sich bei projectiven Umformungen der C_4 nicht ändern. Wir ziehen endlich die in § 22 besprochene Schlussweise heran, und erfahren durch sie, dass Ψ nicht nur eindeutig, sondern *rational* von den Coefficienten von f abhängen muss.

Wir werden jetzt (um zu unseren Th zurückzukehren) das J in (127) insbesondere durch die Curvendiscriminante ersetzen. Dann belehren uns die Schlussbemerkungen des § 25 darüber, dass wir es mit einem Integral dritter Gattung zu thun haben, welches als Function der Curvencoefficienten überall endlich ist. Das im Sinne von (128) zugehörige Ψ muss also neben den sonstigen bereits angegebenen Eigenschaften auch noch die besitzen, eine *ganze* Function der Curvencoefficienten zu sein. *Hiermit ist nun, was die Curven vierter Ordnung angeht, der in* § 10 *nur erst in Aussicht genommene volle Anschluss an die von Herrn Pick für singularitätenfreie ebene Curven gegebene Normalform Q der Integrale dritter Gattung* (§ 6) *erreicht.* In der That war das Pick'sche Q gegenüber der allgemeinen in (128) enthaltenen Definition des P dadurch specialisirt, das wir für Ψ die unter (52) angegebene *rationale, ganze Covariante* eingeführt hatten:

$$(129)\quad \Psi = \frac{\sum_1^n (a\alpha\beta) a_z^{\nu-1} a_\zeta^{n-\nu} \cdot (a\alpha\beta) a_z^{n-\nu} a_\zeta^{\nu-1} - \sum_1^{n-1} (a\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_\zeta^{n-\nu-1} \cdot a_z^{n-\nu} a_\zeta^{\nu}}{n};$$

es gab keine andere rationale, ganze Covariante, als die hiermit hingeschriebene, welche den sonst an Ψ zu stellenden Forderungen genügte. Wir haben also:

Zwecks Definition der Th sind die unter (81), (82) *in* § 13 *für die* ϑ *aufgestellten Formeln in der Weise zu modificiren, dass man in sie an Stelle des transcendent normirten Integrals dritter Gattung* Π *das Pick'sche Q einführt,*
so wie andererseits:

Von transcendenter Seite lässt sich das Integral Q durch die Formel definiren:

$$(130)\quad Q_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \frac{i\pi}{9}\Big(2\frac{\partial \log(p_{123}^9 \,\mathrm{Discr})}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^{xy} v_1^{\xi\eta} + \frac{\partial \log(p_{123}^9 \,\mathrm{Discr})}{\partial \tau_{12}}(v_1^{xy} v_2^{\xi\eta} + v_2^{xy} v_1^{\xi\eta}) + \cdots\Big).$$

Uebrigens gilt letztere Formel, wie man leicht sieht, nicht nur für unsere Curven vierter Ordnung sondern mit geeigneter Modification überhaupt für singularitätenfreie ebene Curven n^{ter} Ordnung. Hiermit ist die Pick'sche Entwickelung in einem wesentlichen Punkte ergänzt. Bei Herrn Pick wird nämlich der unter (129) angegebene Ausdruck nur empirisch construirt: es wird gezeigt, dass er thatsächlich den sämmtlichen an ihn zu stellenden Anforderungen genügt, es wird aber nicht a priori entwickelt, dass es einen derartigen Ausdruck geben *muss* (dass die zahlreichen an den Ausdruck zu stellenden Anforderungen überhaupt verträglich sind). Hier nun greift Formel (130) ergänzend ein. Indem wir dieselbe als Definition des Q betrachten, sind wir der *Existenz* des bei Herrn Pick gesuchten Ausdrucks von vornherein sicher.

Den vorstehenden Entwickelungen laufen andere parallel, die sich auf die hyperelliptischen Gebilde beziehen und vermöge deren wir bei ihnen von den ϑ, bez. den Th aus zu dem von algebraischer Seite bekannten Normalintegrale Q kommen. Hierdurch findet dann die bez. Darstellung in Bd. 27 und 32 der Math. Annalen ihre Ergänzung. Ich verfolge das hier nicht weiter.

§ 27.

Die höheren Glieder in der Reihenentwickelung der ϑ. Die Sigmafunctionen.

Durch Formel (122) sind die ϑ mit den Th in so einfacher Weise verknüpft, dass wir die nach Potenzen der v, resp. der w fortschreitenden Reihenentwickelungen der ϑ als bekannt ansehen dürfen, sobald wir die Reihenentwickelungen der Th beherrschen: letztere aber werden, wie wir dies schon in Aussicht stellten, leichter aufzustellen sein, als die Entwickelungen der ϑ selbst, weil sich die Th gegenüber linearer Periodentransformation einfacher verhalten als die ϑ und also

von den Coefficienten der C_4 ihrem Wesen nach einfacher abhängen als diese. Aber die Th selbst lassen sich in diesem Betracht noch durch einfachere Functionen ersetzen. Wir haben die Sätze, die wir in § 23 über das Verschwinden der ϑ beim Entstehen eines Doppelpunktes aufgestellt haben, bis jetzt nur erst dahin ausgenutzt, dass wir vermöge derselben die Anfangsglieder in den Reihenentwickelungen der ϑ festlegten. Aber sie liefern nicht minder einen Beitrag zur Kenntniss der höheren Glieder. Wenn nämlich bei entstehendem Doppelpunkte das Anfangsglied der Entwickelung einer Thetafunction verschwindet, so verschwindet nach den genannten Sätzen die zugehörige Thetafunction überhaupt, und zwar in demselben Grade, wie das Anfangsglied. *Wir schliessen, dass sämmtliche Glieder der Reihenentwickelung der geraden ϑ durch $\sqrt[8]{S}$, sämmtliche Glieder der Reihenentwickelung der ungeraden ϑ durch $\sqrt[8]{\Sigma}$ theilbar sein müssen.* Von den ϑ überträgt sich dieser Satz sofort auf die Th. *Statt der Th wollen wir also lieber diejenigen Functionen auf ihre Reihenentwickelung untersuchen, die sich aus den Th durch Division mit $\sqrt[8]{S}$, bez. $\sqrt[8]{\Sigma}$ ergeben.*

Die neuen so entstehenden Functionen, deren Reihenentwickelungen wir jetzt des Näheren untersuchen werden, sind die *Sigmafunctionen.* In der That stimmen dieselben durchaus mit den im elliptischen und im hyperelliptischen Falle so benannten Functionen überein, sofern wir die Definition im Einzelnen noch so präcisiren, dass wir die numerischen Constanten c', c'' eliminiren, welche in den Formeln (119), (120) auftreten. *Ich setze dementsprechend*

bei gerader Charakteristik:

$$(131) \qquad \sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1\, w_2\, w_3) = \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w) : c' \sqrt[8]{S_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}},$$

bei ungerader Charakteristik:

$$(132) \qquad \sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1\, w_2\, w_3) = \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w) : c'' \sqrt[8]{\Sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}}.$$

Wir betrachten zunächst einen Augenblick die ersten Glieder in den Entwickelungen der σ. Nach (119) beginnt die Entwickelung des geraden σ mit 1, nach (120) die des ungeraden σ mit

$$D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3.$$

Wir schliessen daraus, dass sich die unter (123) für die Th aufgestellten Formeln der linearen Periodentransformation noch einmal vereinfachen, sobald wir von den Th zu den σ gehen. In der That ist aus den mitgetheilten Anfangsgliedern ersichtlich, dass beim Vergleich zweier Sigmafunctionen achte Einheitswurzeln unmöglich auftreten können. *Die Formeln der linearen Transformation heissen einfach:*

$$\sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right|}(w_1\, w_2\, w_3) = \sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1\, w_2\, w_3); \tag{133}$$

die σ permutiren sich also bei linearer Periodentransformation ohne irgend welche zutretende Factoren.

Aus dem hiermit gewonnenen Satze erkennen wir eine wesentliche Eigenschaft der nach Potenzen der $w_1\, w_2\, w_3$ fortschreitenden Entwickelungen der σ. Es folgt nämlich, dass die Coefficienten sämmtlicher in diesen Entwickelungen auftretenden Glieder jeweils innerhalb des durch die Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ festgelegten Rationalitätsbereichs *eindeutig* sein müssen. Die Coefficienten in der Entwickelung des einzelnen geraden σ sind also eindeutige Functionen der zugehörigen Moduln α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} des § 18, die Coefficienten in der Entwickelung des einzelnen ungeraden σ eindeutige Functionen der bei den zugehörigen D, Ω, Φ des § 17 auftretenden Constanten. Aus den eindeutigen Functionen werden *ganze* Functionen, sobald wir berücksichtigen, dass die Th und also die σ als Functionen der Curvencoefficienten niemals unendlich werden. Endlich erweisen sich bei Fortsetzung der functionentheoretischen Betrachtung die eindeutigen Functionen als *rationale* Functionen.

Hiermit haben wir nun für unsere neuen Sigmafunctionen alle die grundlegenden Sätze, welche mutatis mutandis für die elliptischen und hyperelliptischen Sigmafunctionen bekannt sind. Ich führe noch an, wie sich diese Sätze ausgestalten, sofern man die Dimension der einzelnen in Betracht kommenden Terme in den verschiedenen Arten homogener Variabelen, die Invarianteneigenschaft dieser Terme etc. berücksichtigt.

Wir betrachten zunächst die *geraden* σ und erhalten das Folgende:

1) Die äussere Gestalt der Reihenentwickelung ist jedenfalls diese:

$$\sigma(w_1 w_2 w_3) = 1 + [w]_2 + [w_4] + \cdots; \tag{134}$$

unter $[w]_{2\nu}$ verstehen wir dabei das Aggregat sämmtlicher Glieder, welche die $w_1\, w_2\, w_3$ in der $2\nu^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

2) Wir wissen bereits, dass diese Glieder rationale ganze Functionen der Moduln α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} des zugehörigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe sind. Da die w vermöge (100) in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} zusammengenommen von der $(-4)^{\text{ten}}$ Dimension sind, werden die Coefficienten von $[w]_{2\nu}$ die Gesammtdimension 8ν aufweisen müssen.

3) Bei linearer Coordinatentransformation verhalten sich die $w_1\, w_2\, w_3$ den $x_1 x_2 x_3$ cogredient, die einzelne σ-Function aber bleibt durchaus ungeändert. Wir schliessen, dass $[w]_{2\nu}$ eine dem Rationalitätsbereiche der α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} angehörige Covariante von f ist, deren Variabeln $x_1 x_2 x_3$ man durch $w_1 w_2 w_3$ ersetzt hat.

4) Indem wir auf § 18 zurückgreifen, werden wir uns zusammenfassend folgendermassen ausdrücken können:

$[w]_{2\nu}$ ist eine rationale ganze Covariante der gemischt ternär-quaternären Form:

$$w_1 \cdot \sum \alpha_{ik} z_i z_k + w_2 \cdot \sum \beta_{ik} z_i z_k + w_3 \cdot \sum \gamma_{ik} z_i z_k,$$

welche in den $w_1 w_2 w_3$ den Grad 2ν, in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} zusammengenommen den Grad 8ν, in den $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ den Grad Null besitzt.

Wir betrachten ferner die *ungeraden* σ, deren Reihenentwickelung wir durch die Formel andeuten

(135) $\sigma(w_1 w_2 w_3) = (D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3) + [w]_3 + [w]_5 + \cdots.$

Hier sind die $[w]_{2\nu+1}$ Aggregate rationaler ganzer Covarianten der drei zur ungeraden Charakteristik gehörigen ternären Formen D, Ω, Φ, in denen man die Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ durch $w_1\, w_2\, w_3$ ersetzt hat. Multiplicirt man die Coefficienten von D, Ω, Φ mit einem gemeinsamen Factor λ, so erhält f den Factor λ^2, die w werden also in $\frac{w}{\lambda^2}$ verwandelt. Mit Rücksicht auf das Anfangsglied unserer Reihenentwickelung schliessen wir hieraus, dass $[w]_{2\nu+1}$ die Coefficienten von D, Ω, Φ zusammen homogen im Grade $4\nu + 1$ enthalten muss. Andererseits ersetze man D, Ω, Φ beziehungsweise durch λD, Ω, $\frac{\Phi}{\lambda}$, wobei f und also die w ungeändert bleiben. Hierbei wird jedes $[w]_{2\nu+1}$, wie man wieder aus dem Anfangsgliede sieht, den Factor λ erhalten müssen*). Der Term $[w]_{2\nu+1}$ wird sich daher im Sinne der in § 19 gebrauchten Bezeichnung folgendermassen als Aggregat einzelner Glieder darstellen lassen, deren jedes in den Coefficienten von D, wie von Ω und von Φ homogen ist:

$$(136) \qquad [w]_{2\nu+1} = \mathop{S}_{l=1}^{l=2\nu+1} (\overset{l}{D}, \overset{4\nu+2-2l}{\Omega}, \overset{l-1}{\Phi}; \overset{2\nu+1}{w}).$$

Wir können endlich von diesem Aggregate noch aussagen, dass es bei denjenigen Operationen (94), die $\lambda = 1$ entsprechen, d. h. den Substitutionen

$$D' = D,$$
$$\Omega' = \Omega + u_x \cdot D,$$
$$\Phi' = \Phi + 2u_x \cdot \Omega + u_x^2 \cdot D,$$

ungeändert bleiben muss.

---

*) In der That ist σ und also auch das einzelne $[w]_{2\nu+1}$ in dem genauen, oben festgehaltenen Sinne des Wortes, gar keine Function der Coefficienten von f, erst $\mathrm{Th} = \sqrt[8]{\Sigma} \cdot \sigma$ ist eine solche Function. Vgl. die in § 19 an Formel (108) geknüpften Erläuterungen.

Hiermit ist die Untersuchung des allgemeinen Falles $p = 3$ bis zu denselben Formeln geführt, die in Band 32 der Annalen für die hyperelliptischen Sigmafunctionen entwickelt wurden, und es ist also der Zielpunkt erreicht, den ich für die gegenwärtige Abhandlung von vornherein in Aussicht nahm. Ich darf nicht schliessen, ohne hinzuzufügen, dass die Herren Wiltheiss und Pascal die Frage der Reihenentwickelungen der ϑ vom Geschlechte $p = 3$ in neuester Zeit bereits weiter verfolgt haben. In den Göttinger Nachrichten vom Juni 1889 hat Herr Wiltheiss elegante Differentialgleichungen veröffentlicht, denen die ϑ, beziehungsweise die Th, hinsichtlich der als variabel angesehenen Coefficienten der C_4 genügen. Herr Pascal hat sodann in den Nachrichten vom Juli 1889 nähere Angaben über die Reihenentwickelung der ungeraden σ gemacht; er hat den Term $[w]_3$ direct berechnet und aus ihm mit Hülfe der Wiltheiss'schen Differentialgleichungen recurrente Formeln zur Berechnung der allgemeinen Terme $[w]_{2\nu+1}$ abgeleitet. Ausführlicher giebt Herr Pascal diese Rechnungen in dem neuesten Hefte der Annali di Matematica (ser. 2, t. XVII, 2: Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3)*).

Göttingen, den 24. September 1889.

*) Inzwischen erschien in den Annali di Matematica bereits eine Fortsetzung dieser Untersuchungen unter dem Titel: Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti. Herr Pascal hat überdies jetzt die Berechnung des Gliedes $[w]_2$ der Reihentwickelung (134) der geraden Sigmafunctionen bewerkstelligt; ich habe eine bez. Mittheilung vor wenigen Tagen der Göttinger Societät der Wissenschaften vorgelegt; dieselbe wird im Decemberheft der Göttinger Nachrichten veröffentlicht werden. [14. Dec. 1889].

Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten, die zuerst von Euler*) mittelst bestimmter Integrale gelöst worden ist, lässt sich bekanntlich auf die Normalform**)

$$(1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho)\frac{dy}{dx} + \alpha y$$

bringen, woselbst α und ϱ Constanten bedeuten. Die Gleichung (1), für welche, abgesehen von $x=\infty$, nur $x=0$ ein singulärer Punkt ist, wird einerseits durch eine transcendente ganze Function von x befriedigt, andererseits durch ein Product aus der Potenz $x^{1-\varrho}$ und einer transcendenten ganzen Function von x. Diese zwei particulären Integrale, welche die Hauptintegrale oder Hauptlösungen der Gleichung (1) genannt werden, lauten in ihrer Darstellung durch Potenzreihen

$$(2) \qquad F(\alpha;\ \varrho;\ x)$$

und

$$(3) \qquad x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x),$$

wo zur Abkürzung

$$(4) \qquad F(a;\ r;\ x) = 1 + \frac{a}{1\,.\,r}\,x + \frac{a(a+1)}{1\,.\,2\,.\,r(r+1)}\,x^2 + \cdots \text{ inf.}$$

gesetzt ist. Es wird angenommen, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig sei; die logarithmischen Fälle der Gleichung (1) werden dem-

*) Institutiones calculi integralis, Vol. II, Cap. X, art. 1036.

**) Cfr. J. A. Weiler: „Integration der linearen Differentialgleichungen etc." in Crelle's Journal, Bd. 51. Die einzelnen Fälle sind ausführlicher behandelt in Simon Spitzer's „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" (Wien, C. Gerold's Sohn). Die Reduction der genannten Differentialgleichung auf die Normalform findet sich übersichtlich dargestellt in Schlömilch's „Compendium der höheren Analysis", Bd. II.

gemäss hier nicht in Betracht gezogen. In Folge dieser Voraussetzung kann keine der Reihen (2) und (3) illusorisch werden; dieselben convergiren für jeden endlichen Werth von x. Substituirt man in (1)

$$(5)\qquad y = x^{1-\varrho}\,\eta,$$

so wird für η die Differentialgleichung

$$(6)\qquad x\frac{d^2\eta}{dx^2} = (x - [2-\varrho])\frac{d\eta}{dx} + (\alpha - \varrho + 1)\,\eta$$

erhalten, deren Coefficienten aus denen der Gleichung (1) entstehen, wenn α und ϱ durch $\alpha - \varrho + 1$ und $2 - \varrho$ ersetzt werden.

Die Reihen (2) und (3) gehen, wenn sie mit passenden Constanten multiplicirt werden, in bestimmte Integrale über. Bezeichnet man durch $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$(7)\qquad E(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

so ist bekanntlich

$$(8)\qquad \int_0^1 e^{ux}\,u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du = E(\alpha, \varrho - \alpha)\,F(\alpha; \varrho; x),$$

wie durch Entwickelung der Grösse e^{ux} in die Reihe $1 + \frac{ux}{1} + \cdots$ und durch Anwendung der Formel

$$(9)\qquad E(a+m, b) = \frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+m-1)}\,E(a, b)$$

bewiesen wird. Aus (8) folgt für die in (3) angeführte particuläre Lösung die Gleichung

$$(10)\qquad \begin{cases} x^{1-\varrho}\displaystyle\int_0^1 e^{ux}\,u^{\alpha-\varrho}(1-u)^{-\alpha}\,du = \\ = E(\alpha - \varrho + 1, 1 - \alpha)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho; x), \end{cases}$$

deren linke Seite sich durch die Substitution $u = \frac{v}{x}$ in den Ausdruck

$$(11)\qquad \int_0^x e^v (x - v)^{-\alpha}\,v^{\alpha-\varrho}\,dv$$

verwandelt.

Die Auflösung der Differentialgleichung (1) durch die obigen bestimmten Integrale ist insofern eine unvollkommene, als diese Integrale nur für gewisse Werthgebiete der Constanten α und ϱ convergiren. In (8) müssen die reellen Bestandtheile von α und $\varrho - \alpha$, in (10) und (11) die reellen Bestandtheile von $\alpha - \varrho + 1$ und $1 - \alpha$ als positiv vorausgesetzt werden. Damit also die Integrale (8) und (10), resp. (11) gleichzeitig convergent seien, muss sowohl der reelle Theil von α als auch der reelle Theil von $\varrho - \alpha$ zwischen 0 und 1 liegen. In den Fällen, wo α und ϱ diese Bedingung nicht erfüllen, kann man nach Spitzer, l. c., ein Reductionsverfahren (wiederholte Differentiation

der Gleichung (1) und Substitutionen) zu Hülfe zu nehmen, welches jedoch meistens ziemlich weitläuftige Rechnungen erfordert.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass man zu einer allgemein gültigen Lösung der Differentialgleichung (1) mittelst bestimmter Integrale gelangt, wenn man geschlossene Integrationscurven für die letzteren anwendet. Das Verfahren ist dem analog, welches der Verfasser für die Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung 2ter Ordnung angegeben hat*). Bei dem Uebergang von den bestimmten Integralen zu den Potenzreihen treten dann als constante Factoren die vom Verfasser definirten Integrale $\mathfrak{E}(a, b)$, $\overline{E}(a, b)$ und $\overline{\Gamma}(a)$ auf**), die den Euler'schen Integralen $E(a, b)$ und $\Gamma(a)$ verwandt sind.

Es ist ferner zu bemerken, dass nach der bisherigen Methode der Auflösung der Gleichung (1) durch bestimmte Integrale zunächst immer nur eins der obengenannten Hauptintegrale gefunden wird, während das zweite sich durch die Substitution (5) ergiebt. Bei den im Folgenden angestellten Rechnungen gelangt man dagegen unmittelbar zu beiden Hauptintegralen. Die zu integrirende Function stimmt bei diesen Integralen mit der des Integrals (11) überein, und zwar wird, um die eindeutige particuläre Lösung von (1) zu erhalten, eine von $-\infty$ ausgehende und dorthin zurückkehrende Integrationscurve gewählt, welche die Punkte 0 und x umschliesst.

§ 2.

In die Differentialgleichung (1) möge für y das bestimmte Integral

$$\int_g^h (u-x)^{-\alpha}\,\mathfrak{U}\,du \tag{12}$$

substituirt werden, in welchem $\mathfrak{U}$ eine Function von u allein, und g, h Constante bedeuten. Dann entsteht die Gleichung

$$\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\{(\alpha+1)\,x-(u-\varrho)\,(u-x)\}\,\mathfrak{U}\,du=0,$$

oder, wenn der neben $\alpha+1$ stehende Factor x durch $u-(u-x)$ ersetzt wird,

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha+1)\displaystyle\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\,u\,\mathfrak{U}\,du\\ -\displaystyle\int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}(u+\alpha-\varrho+1)\,\mathfrak{U}\,du\end{array}\right\}=0.$$

Nach der Formel der theilweisen Integration ist aber

---

*) Man vergleiche § 3 des Aufsatzes „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", diese Annalen, Bd. 35, p. 470 und § 4 des Aufsatzes „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", diese Annalen, Bd. 35, p. 495.

**) §§ 1—3 der genannten Arbeit „Zur Theorie der Euler'schen Integrale".

$$(\alpha+1)\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\,u\,\mathfrak{U}\,du =$$
$$= -\left[(u-x)^{-\alpha-1}\,u\,\mathfrak{U}\right]_{u=g}^{u=h} + \int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}\,\frac{d(\mathfrak{U}u)}{du}\,du,$$

so dass man die Gleichung

$$-[M]_{u=h}+[M]_{u=g}+\int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}\left[\frac{d(u\mathfrak{U})}{du}-(u+\alpha-\varrho+1)\mathfrak{U}\right]du=0$$

erhält, in der M das Product

$$M=(u-x)^{-\alpha-1}\,u\,\mathfrak{U}$$

bedeutet. Der Ausdruck (12) ist demnach eine particuläre Lösung von (1), wenn man die Grösse $\mathfrak{U}$ als Function von u durch die Differentialgleichung

$$(13)\qquad \frac{d(u\mathfrak{U})}{du}-(u+\alpha-\varrho+1)\,\mathfrak{U}=0$$

bestimmt und die Grenzen g, h so wählt, dass

$$(14)\qquad [M]_{u=h}=[M]_{u=g}$$

ist. Aus (13) folgt, abgesehen von einem willkürlichen constanten Factor, für $\mathfrak{U}$ der Werth

$$\mathfrak{U}=e^u\,u^{\alpha-\varrho},$$

so dass für M die Function

$$(15)\qquad M=e^u(u-x)^{-\alpha-1}\,u^{\alpha-\varrho+1}$$

zu setzen ist. Auf diese Weise findet man für y das bestimmte Integral

$$(16)\qquad y=\int_g^h e^u\,(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du,$$

dessen Grenzen g, h der Bedingung (14) genügen müssen.

Für die Grenze h darf statt eines constanten Werthes auch der Werth x genommen werden, wenn der reelle Theil von $\alpha+1$ negativ ist. Denn es gelten, wie man leicht beweist, für die Differentialquotienten von y dann die früheren Ausdrücke.

Die Gleichung (14) kann auf zwei verschiedene Arten befriedigt werden. Ist die Integrationscurve des Integrals (16) keine geschlossene Curve, also g nicht gleich h, so muss M sowohl für $u=g$ als für $u=h$ verschwinden, da die in M enthaltene Potenz $(u-x)^{-\alpha-1}$ die wesentlich von einander verschiedenen Functionen $(g-x)^{-\alpha-1}$ und $(h-x)^{-\alpha-1}$ liefert. Fällt dagegen in (16) die obere Integralgrenze mit der unteren zusammen, so braucht die Grösse M für $u=g=h$ nicht den Werth Null zu haben; denn der Gleichung (14) wird genügt, sobald der geschlossene Integrationsweg von (16) so beschaffen ist, dass die zum Endpunkte desselben gehörigen Werthe der Potenzen $(u-x)^{-\alpha-1}$ und $u^{\alpha-\varrho+1}$ mit den anfänglichen Werthen übereinstimmen.

Es soll zunächst angenommen werden, dass g und h von einander verschieden seien. Die Grösse M verschwindet für $u = 0$ und für $u = x$, wenn der reelle Theil von $\alpha - \varrho + 1$ positiv, bezw. wenn der reelle Theil von $\alpha + 1$ negativ ist. Ausserdem wird $M = 0$ für $u = -\infty$. Indem man zur Abkürzung $\Phi(u, x)$ die Function

(17) $$\Phi(u, x) = e^u (u - x)^{-\alpha} u^{\alpha - \varrho}$$

nennt und die auf die reellen Bestandtheile zu beziehenden Ungleichheiten

(18) $$\alpha + 1 < 0, \quad \alpha - \varrho + 1 > 0$$

als erfüllt voraussetzt, erhält man die particulären Integrale der Differentialgleichung (1)

(19) $$\int^x \Phi(u, x)\, du, \quad \int_0^{-\infty} \Phi(u, x)\, du, \quad \int_{-\infty}^x \Phi(u, x)\, du,$$

deren jedes durch die beiden übrigen linear ausdrückbar ist.

Das erste der Integrale (19) ist, nach Hinzufügung eines Factors $(-1)^{-\alpha}$, das in (11) angegebene Hauptintegral. Man bemerke, dass die in § 1 erwähnte Identität

$$\int_0^x e^u (x-u)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du = E(\alpha - \varrho + 1, 1 - \alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho; x)$$

zu einer Erweiterung der Ungleichheiten (18) führt. Denn das obige bestimmte Integral stellt, da es gleich der Reihe ist, eine particuläre Lösung von (1) dar, sobald es convergirt. Letzteres findet aber nicht allein für $\alpha < -1$, sondern auch für $-1 < \alpha < 1$ statt, falls ausserdem $\alpha - \varrho + 1 > 0$ ist. Daher sind an Stelle von (18) die Ungleichheiten

(20) $$1 - \alpha > 0, \quad \alpha - \varrho + 1 > 0$$

zu nehmen.

Das eindeutige Hauptintegral der Gleichung (1) wird durch keins der Integrale (19) dargestellt. Das zweite und das dritte Integral (19) setzen sich vielmehr linear aus der eindeutigen und der mehrdeutigen Hauptlösung zusammen. Dagegen kann man, wenn $g = h$ gewählt wird, sowohl das eindeutige Hauptintegral aus (16) ableiten, als auch in Bezug auf die mehrdeutige Hauptlösung die nothwendigen Ergänzungen für diejenigen Fälle gewinnen, wo die Ungleichheiten (20) nicht erfüllt sind.

§ 3.

In der u-Ebene werde um $u = 0$ als Mittelpunkt ein Kreis geschlagen, der den betrachteten Punkt x umschliesst. Der Radius desselben heisse k. Man wählt nun, indem man

$$g = h = -\infty$$

setzt, wodurch der Bedingung (14) genügt ist, den Integrationsweg des Integrals (16) in der Art, dass die Variable u zunächst die negative reelle Axe von $u = -\infty$ bis $u = -k$, hierauf den genannten Kreis im positiven Sinne, endlich wiederum den Abschnitt der reellen Axe von $u = -k$ bis $u = -\infty$ durchläuft. Das hierdurch definirte Integral, für welches, nach § 1 der erwähnten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", die abgekürzte Bezeichnung

$$(21) \qquad \overline{\int}_{-\infty}^{(x,0)} e^u (u - x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du$$

angewendet wird, befriedigt die Differentialgleichung (1). Man erkennt leicht, dass dasselbe, nachdem Anfangswerthe der Potenzen $(u - x)^{-\alpha}$ und $u^{\alpha-\varrho}$ fixirt worden sind, eine eindeutige Function von x ist. Für die particulären Lösungen der Gleichung (1) kommt nur der Punkt $x = 0$ als Verzweigungspunkt in Betracht. Führt aber die Variable x, ohne die Kreisfläche zu verlassen, einen Umlauf um den Punkt 0 aus, so tritt in (21) keinerlei Aenderung des Integrationsweges ein, und es nimmt bei einem beliebigen Integralelement, da keiner der Punkte u von x umkreist wird, die Potenz $(u - x)^{-\alpha}$ im Endpunkte der geschlossenen x-Curve denselben Werth an wie im Ausgangspunkte. Hieraus folgt, dass das Integral (21) in der Umgebung des Punktes $x = 0$, und daher auch in der ganzen Ebene, eine eindeutige Function von x ist.

Um das Integral (21), welches für alle endlichen Werthe von x, α, ϱ einen bestimmten Sinn behält, nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, setzt man für $(u - x)^{-\alpha}$ die Reihe

$$u^{-\alpha}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\alpha} = u^{-\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{1}\,\frac{x}{u} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2} + \cdots\right)$$

ein. Dieselbe convergirt, da für alle Elemente des Integrals (21), gemäss der Definition des Integrationsweges, mod. $u >$ mod. x ist. Die in der Reihe vorkommenden Potenzen von x treten vor die Integralzeichen, so dass für die zu integrirenden Functionen nur der Punkt $u = 0$ als ein singulärer, von der Integrationscurve umschlossener Punkt übrig bleibt. Man findet auf diese Weise für das Integral (21) den Ausdruck

$$(22) \qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho} du + \frac{\alpha}{1}\, x \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-1} du + \cdots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1\,.\,2\ldots\nu}\, x^\nu \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-\nu} du + \cdots . \end{aligned}\right.$$

Es wird nun, wie in § 3 der obengenannten Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", durch $\overline{\Gamma}(a)$ das bestimmte Integral

$$(23) \qquad \bar{\Gamma}(a) = \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} du$$

bezeichnet, welches den nämlichen Integrationsweg wie die in (22) vorkommenden Integrale hat (unter Hinzufügung der Bedingung, dass für das reelle positive Argument $u = k$ die Potenz u^{a-1} den Werth $e^{(a-1)\log k}$, wo $\log k$ reell ist, annehmen soll). Für ein positives ganzzahliges ν besteht dann die Gleichung (l. c. (38))

$$(24) \qquad \bar{\Gamma}(a - \nu) = \frac{(-1)^\nu \bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\ldots(a-\nu)}.$$

Also kann man in (22)

$$\bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-\nu} du = \bar{\Gamma}(1 - \varrho - \nu) =$$

$$= \frac{(-1)^\nu \bar{\Gamma}(1-\varrho)}{(-\varrho)(-\varrho-1)\ldots(-\varrho-\nu+1)} = \frac{\bar{\Gamma}(1-\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)}$$

substituiren. Hierdurch wird aus (22) die Reihe

$$\bar{\Gamma}(1-\varrho)\left\{1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \varrho} x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\nu!\,\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)} x^\nu + \cdots\right\}$$

erhalten; folglich ist

$$(25) \qquad \bar{\int}_{-\infty}^{(x,0)} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\, F(\alpha; \varrho; x).$$

Die Constante ϱ wurde als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Indessen behält das Integral (21) auch in dem Falle, wo ϱ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, einen bestimmten Sinn. Für ein positives ganzzahliges ϱ bleibt die soeben angestellte Rechnung, welche zur Gleichung (25) führte, vollständig in Kraft. Ist dagegen ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$, einschliesslich des Werthes $\varrho = 0$, so hat man die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}(\nu) = 0, \quad \bar{\Gamma}(0) = 2\pi i, \quad \bar{\Gamma}(-\nu) = \frac{2\pi i}{1 \cdot 2 \ldots \nu}$$

(l. c. (39) und (40)), in denen ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, zu berücksichtigen. Da die einzelnen Glieder der Reihe (22) die respectiven Factoren

$$\bar{\Gamma}(1-\varrho), \quad \bar{\Gamma}(-\varrho), \quad \bar{\Gamma}(-\varrho-1), \ldots$$

enthalten, so sind im Falle $\varrho = -m$, wo diese Factoren

$$\bar{\Gamma}(m+1), \quad \bar{\Gamma}(m), \ldots \bar{\Gamma}(1), \quad \bar{\Gamma}(0), \quad \bar{\Gamma}(-1) \ldots$$

lauten, die $m+1$ ersten Summanden von (22) gleich Null. Die im allgemeinen Term vorkommende Constante $\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu)$ wird, wenn man $\varrho = -m$, $\nu = m + 1 + \mu$ setzt, gleich dem Ausdruck

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)=\overline{\Gamma}(-\mu)=\frac{2\pi i}{1\,.\,2\ldots\mu},$$

wodurch die Reihe (22), nach Abtrennung des constanten Factors

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)}{1\,.\,2\ldots(m+1)}\,2\pi i,$$

in

$$x^{m+1}\,F(\alpha+m+1;\,m+2;\,x)=x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x)$$

übergeht. Das Integral (21) stellt also, wenn ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist, die in (3) angegebene particuläre Lösung der Gleichung (1), sonst aber immer die particuläre Lösung (2) dar. Für $\varrho=1$ sind die Ausdrücke (2) und (3) identisch.

§ 4.

In den Fällen, wo die Constanten α und ϱ den Ungleichheiten (20)

$$1-\alpha>0,\quad \alpha-\varrho+1>0$$

nicht genügen, wo also das bestimmte Integral

$$\int_0^x e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du$$

divergent ist, erhält man einen Ersatz für letzteres, indem man die Variable u einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0 ausführen lässt. Es werde auf der Verbindungslinie der Punkte 0 und x ein beliebiger Punkt c angenommen, und durch diesen einerseits ein Kreis $\mathfrak{P}$ mit dem Mittelpunkte 0, andererseits ein Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte x gezogen, so dass die zwei Kreise sich im Punkte c berühren. Ein Umlauf längs $\mathfrak{P}$, resp. $\mathfrak{Q}$ soll kurz durch $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{Q}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$, $\mathfrak{Q}^-$ bezeichnet werden, jenachdem derselbe im positiven oder im negativen Sinne erfolgt. Man bildet nun (nach § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf") das Integral

$$(26)\qquad \overline{\int_c^{*(x,\,0,\,x-,\,0-)}} e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du,$$

dessen Integrationsweg im Punkte c beginnt und endigt und sich aus den Umläufen

$$\mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^-$$

zusammensetzt. Die Gleichung (14) ist bei dieser Wahl des Integrationsweges erfüllt, da nach (15) die Grösse M keine anderen (endlichen) Verzweigungspunkte als $u=0$ und $u=x$ besitzt, und jeder dieser zwei Punkte von der Variable u zuerst in positiver, dann in negativer Drehungsrichtung umkreist wird. Das Integral (26) genügt in Folge dessen der Differentialgleichung (1). Dasselbe convergirt für beliebige Werthe der Constanten α und ϱ und für jeden endlichen, von Null verschiedenen Werth von x. Führt man in (26) eine neue Variable t durch die Gleichung

$$u = tx$$

ein, so geht die von $u = 0$ nach $u = x$ gezogene Gerade in die Verbindungslinie der Punkte $t = 0$ und $t = 1$ über. Es sei $t = c_1$ derjenige Punkt dieser Verbindungslinie, welcher dem Punkte $u = c$ entspricht. Dann macht die Variable t vom Punkte c_1 aus einen Doppelumlauf um die Punkte 1 und 0, und man erhält aus (26) den Ausdruck

$$(-1)^{\alpha}\, x^{1-\varrho} \int_{c_1}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} e^{tx}\, t^{\alpha-\varrho}(1-t)^{-\alpha}\, dt.$$

Wird hierin

$$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1} + \frac{t^2x^2}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{t^{\nu}x^{\nu}}{\nu!} + \cdots$$

gesetzt, so ergiebt sich eine Reihe, deren allgemeiner Term

$$(27) \qquad (-1)^{\alpha}\, \frac{x^{1-\varrho+\nu}}{\nu!} \int_{c_1}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} t^{\alpha-\varrho+\nu}(1-t)^{-\alpha}\, dt$$

lautet. Nun wurde in § 1 der erwähnten Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“ $\mathfrak{E}(a, b)$ als die Grösse

$$(28) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \int_{\mathfrak{c}}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

definirt, in welcher t (wie bei obigem Integral) abwechselnd die Punkte 1 und 0, und zwar erst in positiver, dann in negativer Drehungsrichtung umkreist, während die untere Integralgrenze $\mathfrak{c}$ ein beliebiger reeller Werth zwischen 0 und 1 ist. Als Anfangswerthe der Potenzen t^{a-1} und $(1-t)^{b-1}$ für $t = \mathfrak{c}$ sind in (28) die Ausdrücke $e^{(a-1)\log \mathfrak{c}}$ und $e^{(b-1)\log(1-\mathfrak{c})}$ zu nehmen, in denen $\log \mathfrak{c}$ und $\log(1-\mathfrak{c})$ die reellen Logarithmen bedeuten. Indem man $\mathfrak{c} = c_1$ wählt und bei dem in (27) vorkommenden Integral die Anfangswerthe der Potenzen $t^{\alpha-\varrho+\nu}$, $(1-t)^{-\alpha}$ in der soeben bezeichneten Art bestimmt, hat man

$$(29) \quad \int_{c_1}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} t^{\alpha-\varrho+\nu}(1-t)^{-\alpha}dt = e^{\pi i(2-\varrho+\nu)}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+\nu+1, 1-\alpha),$$

wofür, da $e^{\pi i(2+\nu)} = (-1)^{\nu}$, und (l. c. (11))

$$\mathfrak{E}(a+\nu, b) = (-1)^{\nu}\, \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\, \mathfrak{E}(a, b)$$

ist, auch

$$e^{-\pi i\varrho}\, \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha)$$

gesetzt werden kann. Der Term (27) verwandelt sich hierdurch in das Product aus der von ν unabhängigen Grösse

$$e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\, x^{1-\varrho}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha)$$

und dem Ausdrucke

$$\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1\,.\,2\ldots\nu\,.\,(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\,x^\nu.$$

Demnach besteht für das Integral (26) die Identität

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_c^{(x,\,0,\,x-,\,0-)} e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du=\\&=e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\;1-\alpha)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\;2-\varrho;\;x),\end{aligned}\right.$$

deren rechte Seite sich von der Reihe (3) nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Die mehrdeutige Hauptlösung der Gleichung (1) wird also im allgemeinen Falle durch das bestimmte Integral (26) dargestellt.

Es möge erwähnt sein, dass die obige Entwickelung des Integrals (26) auch in dem (hier ausgeschlossenen) Falle, wo ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich 0 oder 1 ist, gültig bleibt. Dagegen geht für $\varrho=2,3,4,\ldots$, wo die Reihe $F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho;x)$ aufhört, einen bestimmten Sinn zu haben, das Integral (26) in die eindeutige particuläre Lösung der Gleichung (1)

$$\text{Const.}\;F(\alpha;\;\varrho;\;x)$$

über. Ist nämlich ϱ gleich der positiven ganzen Zahl m, die $\geqq 2$ vorausgesetzt wird, so nimmt die in (29) vorkommende Constante

$$\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+\nu+1,\;1-\alpha),$$

welche man wegen der Gleichung (l. c. (20))

$$\mathfrak{E}(a,b)=\mathfrak{E}(1-a-b,\;b)$$

auch

$$\mathfrak{E}(\varrho-1-\nu,\;1-\alpha)=\mathfrak{E}(m-1-\nu,\;1-\alpha)$$

schreiben kann, für $\nu=0,1,2,\ldots m-2$ den Werth Null an. Denn $\mathfrak{E}(a,b)$ verschwindet, wenn eins der Argumente a, b (oder $1-a-b$) eine positive ganze Zahl ist. Es fallen auf diese Weise die $m-1$ ersten Glieder der Reihenentwickelung des Integrals (26) fort und der erste von Null verschiedene Summandus derselben, der aus (27) für $\nu=m-1=\varrho-1$ entsteht, ist eine Constante. Die Substitution $\nu=m-1+\mu$ formt den allgemeinen Term (27) in das Product

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^\alpha x^\mu}{(m+\mu-1)!}\,(-1)^{\mu-1}\,\mathfrak{E}(\alpha+\mu,\;1-\alpha)=\\&=\frac{(-1)^{\alpha-1}x^\mu}{(m+\mu-1)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)}{1\,.\,2\ldots\mu}\,\mathfrak{E}(\alpha,\;1-\alpha)\end{aligned}$$

um, und da $\mu=0,1,2,\ldots$ zu setzen ist, so ergiebt sich im genannten Falle für das Integral (26) die Reihe

$$\frac{(-1)^{\alpha-1}}{(m-1)!}\,\mathfrak{E}(\alpha,1-\alpha)\left\{1+\frac{\alpha}{1.m}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.m(m+1)}x^2+\cdots\right\}$$
$$=\text{Const. } F(\alpha;m;x)=\text{Const. } F(\alpha;\varrho;x),$$

wie behauptet wurde. Man schliesst hieraus, indem man die Rechnung am Ende des § 3 berücksichtigt, dass, von constanten Factoren abgesehen, die zwei Integrale (21) und (26) identisch werden, sobald ϱ ganzzahlig ist. Denn beide liefern die Reihe (2), wenn ϱ gleich einer positiven, und die Reihe (3), wenn ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist. Als weiteres particuläres Integral der Gleichung (1) tritt in diesen Fällen bekanntlich ein logarithmischer Ausdruck hinzu.

§ 5.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) im allgemeinen Falle (unter der Voraussetzung, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig ist) durch die Summe

$$(31)\qquad y=C_1\overline{\int_{-\infty}^{(x,\,0)}}\Phi(u,x)\,du+C_2\overline{\int_{c}^{(x,\,0,\,x-,\,0-)}}\Phi(u,x)\,du,$$

in welcher $\Phi(u,x)$ die Function (17), und C_1, C_2 willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt wird.

Der Ausdruck (31) gestattet eine Vereinfachung, sobald eine der Ungleichheiten (20)

$$1-\alpha>0,\quad \alpha-\varrho+1>0$$

erfüllt ist, indem das Integral (26)

$$\overline{\int_{c}^{(x\,0,\,x-,\,0-)}}\Phi(u,x)\,du$$

dann durch ein anderes, dessen Integrationsweg aus einem einmaligen Umlauf um den Punkt x, resp. um den Punkt 0 besteht, ersetzt werden kann. Im Falle $\alpha-\varrho+1>0$ ist das Integral

$$(32)\qquad \overline{\int_{0}^{(x)}}\Phi(u,x)\,du$$

und im Falle $1-\alpha>0$ das Integral

$$(33)\qquad \overline{\int_{x}^{(0)}}\Phi(u,x)\,du$$

convergent, bei denen die Variable u vom Punkte 0 aus den Punkt x, bezw. vom Punkte x aus den Punkt 0 umkreist. Die Integrale (32) und (33) unterscheiden sich aber von der Reihe (3) wiederum nur durch einen constanten Factor. Man entwickelt, um dies zu zeigen, die genannten Integrale nach steigenden Potenzen von x.

Aus dem Integral (32) ergiebt sich, wenn (wie in (26)) $u = tx$, und $e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1} + \cdots$ gesetzt wird, der Ausdruck

$$x^{1-\varrho}\overline{\int_0^{(1)}} e^{tx}\, t^{\alpha-\varrho}(t-1)^{-\alpha}\, dt =$$

$$= x^{1-\varrho}\overline{\int_0^{(1)}}\left(1 + \frac{tx}{1} + \cdots + \frac{t^\nu x^\nu}{\nu!} + \cdots\right) t^{\alpha-\varrho}(t-1)^{-\alpha}\, dt.$$

Man nennt nun $\overline{E}(a, b)$ das Integral („Zur Theorie der Euler'schen Integrale", Gleichung (24))

$$\overline{E}(a, b) = \overline{\int_0^{(1)}} t^{a-1}(t-1)^{b-1}\, dt, \tag{34}$$

dessen Integrationsweg einen positiven, bei 0 beginnenden Umlauf um den Punkt 1 darstellt. Der reelle Theil des Argumentes a wird in $\overline{E}(a, b)$ als positiv vorausgesetzt; die Zweige der Potenzen t^{a-1}, $(t-1)^{b-1}$ sind durch die Bedingung bestimmt, dass sie in dem Schnittpunkte $t = \lambda$ des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe die Werthe $e^{(a-1)\log\lambda}$, $e^{(b-1)\log(\lambda-1)}$, in denen $\log\lambda$ und $\log(\lambda-1)$ reell sind, annehmen. Der Factor von $x^{\nu+1-\varrho}$ in der obigen Entwickelung des Integrals (32) ist demnach (wenn man im Punkte $t = \lambda$ für die Potenzen von t und von $t-1$ die soeben erwähnte Bedingung gelten lässt) gleich der Grösse

$$\frac{1}{\nu!}\overline{E}(\alpha - \varrho + \nu + 1,\ 1 - \alpha),$$

die durch die Formel (l. c. (27))

$$\overline{E}(a + \nu, b) = \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+\nu-1)}\overline{E}(a, b)$$

in

$$\frac{1}{\nu!}\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\dots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\dots(\nu+1-\varrho)}\overline{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)$$

übergeht. Auf diese Weise findet man für das Integral (32) die Identität

$$\tag{35} \left\{\begin{aligned} &\overline{\int_0^{(x)}} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du = \\ &= \overline{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x). \end{aligned}\right.$$

Das Integral (33) verwandelt sich durch die Substitution $u = x(1-t)$, welche die Werthe $u = x$, $u = 0$ den Werthen $t = 0$, $t = 1$ zuordnet, in das Product

$$e^{\pi i(1-\varrho)}\, x^{1-\varrho} \overline{\int_0^{(1)}} e^{x(1-t)}\, t^{-\alpha}(t-1)^{\alpha-\varrho}\, dt =$$

$$= e^{\pi i(1-\varrho)} x^{1-\varrho} \overline{\int_0^{(1)}} \left[1 - \frac{x(t-1)}{1} + \cdots + (-1)^{\nu} \frac{x^{\nu}(t-1)^{\nu}}{\nu!} + \cdots \right] t^{-\alpha}(t-1)^{\alpha-\varrho} dt$$

$$= e^{\pi i(1-\varrho)}\, x^{1-\varrho} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\, x^{\nu}\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+\nu+1).$$

Da aber für ein positives ganzzahliges ν

$$\overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+\nu+1) =$$

$$= (-1)^{\nu} \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+1)$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$(36)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_x^{(0)}} e^{u}(u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du = \\ e^{\pi i(1-\varrho)}\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+1)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x), \end{cases}$$

in welcher der reelle Bestandtheil der Constante $1-\alpha$ als positiv vorausgesetzt wird.

Die Fälle, in denen $\alpha-\varrho+1$ oder $1-\alpha$ ganzzahlig und positiv ist, erfordern eine besondere Erwähnung, weil dann das Integral (26) identisch verschwindet. Sind beide Constanten $\alpha-\varrho+1$ und $1-\alpha$ positive ganze Zahlen, in welchem Falle auch ϱ ganzzahlig ist (s. den Schluss des § 4), so kann das Integral (26) durch das in (19) genannte Integral

$$\int_0^x e^{u}(u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du$$

ersetzt werden. Ist aber nur $\alpha-\varrho+1$, bezw. nur $1-\alpha$ eine positive ganze Zahl, so wendet man an Stelle von (26) die Integrale (32), bezw. (33) an, deren Reihenentwickelungen in (35) und (36) angegeben wurden. Mit dieser Modification bleibt die Gleichung (31) auch in den genannten speciellen Fällen gültig.

Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen.

Von

Ernst Wölffing in Stuttgart.

Im XIII. Band der Math. Annalen pag. 175 bringt Herr Professor Brill eine neue Darstellung der Hesse'schen Covariante einer ternären Form in Anwendung, indem er letztere nach Potenzen der homogenisirenden Variablen ordnet und nun die Hesse'sche Covariante durch die Ueberschiebungen der als Coefficienten jener Potenzen auftretenden binären Formen ausdrückt: eine Methode, welche sich als fruchtbar erweist bei der Untersuchung von Curvensingularitäten und zu andern Zwecken, welche man a. a. O. nachsehen möge.

Anschliessend hieran kann man folgende allgemeine Aufgabe stellen: Denken wir uns eine *ternäre* Form in rational-ganzer Gestalt aus andern *ternären* Formen (Grundformen) aufgebaut — eine solche ist beispielsweise das Product zweier oder mehrerer Formen —, so ist deren *Hesse'sche Form* jedenfalls eine *Simultancovariante der gegebenen Formen* und dieselbe soll nun *in Function der im vollständigen Formensystem der Grundformen enthaltenen In- und Covarianten* dargestellt werden.

Es ist dies in der That ausführbar auch für höhere Formen, deren vollständiges System noch gar nicht bekannt ist und die allgemeine Lösung ist in den Formeln (I) bis (IV) des § 1 enthalten, von welchen die drei letzteren wesentlich als neu zu betrachten sind. § 2 und § 3 beschäftigen sich noch mit Ergänzungen der allgemeinen Lösung für Specialfälle und in § 4 werden die erforderlichen Operationen noch einmal zusammengestellt. An diesen algebraischen Theil schliesst sich ein geometrischer an, welcher sich mit der Discussion der zuvor eingeführten covarianten Bildungen befasst (§ 5 bis § 7). Im letzten Paragraphen werden die gewonnenen Resultate geometrisch verwerthet für die Untersuchung einiger Fälle von Curvensingularitäten, in denen die Hesse'sche Curve sich durch ein anomales Verhalten auszeichnet.

Sämmtliche Resultate wurden auf dem Wege der symbolischen Rechnung erlangt; die Formeln sind so eingerichtet, dass ihre Benutzung keine weiteren symbolischen Rechnungen erforderlich macht und dass man zugleich mit den auftretenden Termen auch deren Zahlencoefficienten erhält.

An dieser Stelle gestattet sich der Verfasser Herrn Professor Dr. Brill in Tübingen für seine fördernde Anregung bei Abfassung dieser Abhandlung seinen innigsten Dank auszusprechen.

§ 1.

Eine ganze rationale Function Φ der ternären Formen $f_0 f_1 \dots f_n$ lässt sich schreiben:

$$\Phi = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_r F_r, \tag{1}$$

wo $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_r$ Zahlencoefficienten, $F_0 F_1 \dots F_r$ dagegen Producte von Potenzen der gegebenen Formen:

$$\begin{array}{l} f_0 = \alpha_x^{m_0} = \beta_x^{m_0} = \cdots, \\ f_1 = \alpha_x'^{m_1} = \beta_x'^{m_1} = \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n = \alpha_x^{(n)m_n} = \beta_x^{(n)m_n} = \cdots \end{array}$$

sind.

Vorerst sei indess vorausgesetzt, dass in jenen Producten F nur erste Potenzen der f vorkommen und dass ferner eine Form f, welche in einem der Producte F auftritt, in allen übrigen fehlen soll.

Wir schicken zunächst folgende Bezeichnungen und Abkürzungen voraus:

$$\begin{array}{lll} (\alpha\beta\gamma)^2\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2}\, \gamma_x^{m_0-2} & = H(f_0) & = H_0, \\ (\alpha\beta\alpha')^2\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2}\, \alpha_x'^{m_1-2} & = D(f_0; f_1) & = D_{01}, \\ (\alpha\alpha'\alpha'')^2\, \alpha_x^{m_0-2}\, \alpha_x'^{m_1-2}\, \alpha_x''^{m_2-2} & = L(f_0, f_1, f_2) & = L_{012}, \\ (\alpha\alpha'\beta')\,(\alpha'\alpha\beta)\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-1}\, \alpha_x'^{m_1-2}\, \beta_x'^{m_1-1} & = \Phi(f_0, f_1) & = \Phi_{01}, \\ (\alpha'\alpha\beta)\,(\alpha''\alpha\beta)\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2}\, \alpha_x'^{m_1-1}\, \alpha_x''^{m_2-1} & = U(f_0; f_1, f_2) & = U_{012}, \\ (\alpha''\alpha\alpha')\,(\alpha'''\alpha\alpha')\, \alpha_x^{m_0-2}\, \alpha_x'^{m_1-2}\, \alpha_x''^{m_2-1}\, \alpha_x'''^{m_3-1} & = V(f_0, f_1; f_2, f_3) & = V_{0123}. \end{array}$$

H, D, L, Φ, U und V sind hier als Functionszeichen zu betrachten; die Indices 0, 1, 2 ... beziehen sich selbstverständlich auf die Formen $f_0 f_1 f_2 \dots$.

Die Functionen L und V sind übrigens durch die identische Relation verbunden:

$$V_{0123} + V_{0213} + V_{1203} = L_{012} f_3, \tag{2}$$

woraus weiter folgt:

$$2(V_{0123} - V_{2301}) = L_{012} f_3 + L_{013} f_2 - L_{023} f_1 - L_{123} f_0. \tag{2'}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, in $H(\Phi)$ mittelst Polarenformeln erstens die Symbole der F und zweitens an Stelle dieser die Symbole der f einzuführen.

Die erste Operation führt unmittelbar auf die Formel:

$$\text{(I)} \qquad H(\Phi) = \Sigma\lambda_i^3 \, H(F_i) + 3\Sigma\lambda_i^2 \lambda_k \, D(F_i; F_k) \\ + 6\Sigma\lambda_i \lambda_k \lambda_l \, L(F_i, F_k, F_l).$$

Wir setzen nun über unsere Formen $f_0 f_1 \dots f_n$ Folgendes fest:

Die in F_0 vorkommenden sollen $f_0 f_1 \dots f_p$ sein;
die in F_1 vorkommenden $f_0' f_1' \dots f_p'$,
. . . .

wobei noch zu bemerken ist, dass nunmehr z. B. der Form f_i'' der Index i'' zukommt.

Wenn wir dann die oben erwähnte zweite Operation, nämlich die Einführung der Symbole der f in Gleichung (I) vollziehen, die ausser den Functionen H, D, L, Φ, U, V noch weiter erscheinenden Bildungen durch identische Umformung auf letztere zurückführen und endlich vermittelst der Gleichung (2') unsere Formeln symmetrisch machen, so werden unsere Schlussresultate:

$$\text{(II)}\qquad H(F_0) = \frac{F_0^3}{s^3(s-1)^2}\Bigg\{(s-1)\sum \frac{m_i^3(m_i-1)\,H_i}{f_i^3} - 3\sum \frac{m_i^2 m_k(s-m_k-1)\,D_{ik}}{f_i^2 f_k}$$

$$+\,6\sum \frac{m_i m_k m_l L_{ikl}}{f_i f_k f_l} - 6(s-2)\sum \frac{m_i^2 m_k^2 \Phi_{ik}}{f_i^2 f_k^2} + 6\sum \frac{m_i^2 m_k m_l U_{ikl}}{f_i^2 f_k f_l}\Bigg\},$$

$$\text{(III)}\qquad D(F_0;F_1) = \frac{F_0^2 F_1}{s^2(s-1)^2 s'(s'-1)}\Bigg\{(s-1)^2\sum \frac{m_i^2 m_i'(m_i'-1)\,D_{ii'}}{f_i^2 f_i'} - 2(s-1)\sum \frac{m_i m_k m_i'(m_i'-1)\,L_{iki'}}{f_i f_k f_i'}$$

$$+\,s'(s'-1)\sum \frac{m_i^2 m_k^2 D_{ik}}{f_i^2 f_k} + 2s'(s'-1)\sum \frac{m_i m_k m_l L_{ikl}}{f_i f_k f_l} + 2(s-1)^2\sum \frac{m_i^2 m_i' m_k' U_{ii'k'}}{f_i^2 f_i' f_k'}$$

$$-\,2(s-1)(s'-1)\sum \frac{m_i^2 m_k m_i' U_{iki'}}{f_i^2 f_k f_i'} + 2s'(s'-1)\sum \frac{m_i^2 m_k m_l U_{ikl}}{f_i^2 f_k f_l}$$

$$+\,2s'(s'-1)\sum \frac{m_i^2 m_k^2 \Phi_{ik}}{f_i^2 f_k^2} - 4(s-1)\sum \frac{m_i m_k m_i' m_k' V_{iki'k'}}{f_i f_k f_i' f_k'}\Bigg\},$$

$$\text{(IV)}\quad L(F_0, F_1, F_2) = \frac{F_0 F_1 F_2}{s(s-1)\,s'(s'-1)\,s''(s''-1)}$$

$$\times\Bigg\{\sum \frac{m_i m_i' m_i''\big((m_i-1)(m_i'-1)(m_i''-1)-(m_i-1)(s'-m_i')(s''-m_i'')-(s-m_i)(m_i'-1)(s''-m_i'')-(s-m_i)(s'-m_i')(m_i''-1)-2(s-m_i)(s'-m_i')(s''-m_i'')\big)L_{ii'i''}}{f_i f_i' f_i''}$$

$$+\qquad 2\sum \frac{m_i m_i' m_i''}{f_i f_i' f_i''}\left(\frac{(s'-1)(s''-1)\,m_k V_{i'i''ik}}{f_k} + \frac{(s-1)(s''-1)\,m_k' V_{ii''i'k'}}{f_k'} + \frac{(s-1)(s'-1)\,m_k'' V_{ii'i''k''}}{f_k''}\right)$$

$$+\;s(s-1)\sum \frac{m_i' m_i''}{f_i' f_i''}\left(\frac{(s''-m_i'')\,m_k' L_{i'k'i''}}{2f_k'} + \frac{(s'-m_i')\,m_k'' L_{i'i''k''}}{2f_k''} - \frac{m_k' m_k''(V_{i'k'i''k''}+V_{i''k''i'k'})}{f_k' f_k''}\right)$$

$$+\;s'(s'-1)\sum \frac{m_i m_i''}{f_i f_i''}\left(\frac{(s''-m_i'')\,m_k L_{iki''}}{2f_k} + \frac{(s-m_i)\,m_k'' L_{ii''k''}}{2f_k''} - \frac{m_k m_k''(V_{iki''k''}+V_{i''k''ik})}{f_k f_k''}\right)$$

$$+\;s''(s''-1)\sum \frac{m_i m_i'}{f_i f_i'}\left(\frac{(s'-m_i')\,m_k L_{iki'}}{2f_k} + \frac{(s-m_i)\,m_k' L_{ii'k'}}{2f_k'} - \frac{m_k m_k'(V_{iki'k'}+V_{i'k'ik})}{f_k f_k'}\right)\Bigg\}.$$

In diesen Formeln sind die Summationen in Beziehung auf i, k, l je zwischen den Grenzen 0 und p, in Beziehung auf i', k' je zwischen den Grenzen 0 und p', in Beziehung auf i'', k'' zwischen den Grenzan 0 und p'' vorzunehmen.

Zur Abkürzung wurde

$$\sum_{i=0}^{i=p} m_i = s; \quad \sum_{i'=0}^{i'=p'} m_i' = s'; \quad \sum_{i''=0}^{i''=p''} m_i'' = s''$$

gesetzt.

Ebenfalls der Kürze wegen ist die scheinbar gebrochene Form für obige Gleichungen gewählt worden; wie leicht zu sehen, gehen alle Nenner in den vor den Klammern stehenden Grössen F_0^3, $F_0^2 F_1$, $F_0 F_1 F_2$ auf.

§ 2.

In den Formeln (I)—(IV) des § 1 ist bereits die allgemeine Lösung unserer Aufgabe enthalten und wir haben uns im Folgenden nur noch mit besonderen Fällen zu befassen. Zunächst müssen wir die zu Anfang des § 1 gemachte beschränkende Voraussetzung aufheben und von jetzt an auch den Fall zulassen, dass in den Producten F mehrere gleiche Factoren vorkommen, sowie dass diese Producte einzelne Factoren unter sich gemein haben. In diesem Fall helfen wir uns einfach dadurch, dass wir alle Factoren sämmtlicher F zunächst mit verschiedenen Indices bezeichnen und erst nach Anwendung der Formeln (I)—(IV) diejenigen Reductionen vornehmen, welche sich daraus ergeben, dass sich zwei Indices, etwa λ und μ, auf ein und dieselbe Form beziehen. Die Vereinfachungen, welche für unsere Functionen D, L, Φ, U, V eintreten, wenn zwei oder mehrere Formen unter dem Functionszeichen einander gleich werden, sind, soweit sie sich nicht aus der symbolischen Darstellung unmittelbar ablesen lassen, nachstehend zusammengestellt:

(3) $$\Phi(f_0, f_0) = -\frac{H_0 f_0}{3},$$

(4) $$U(f_0; f_1, f_1) = 2\Phi_{01} + D_{01} f_1,$$

(5) $$U(f_0; f_0, f_1) = \frac{H_0 f_1}{3},$$

(6) $$V(f_0, f_1; f_2, f_2) = -\frac{D_{02} f_1}{2} + L_{012} f_2 - \frac{D_{12} f_0}{2} + U_{201},$$

(7) $$V(f_0, f_1; f_0, f_2) = -\frac{U_{012}}{2} + \frac{D_{01} f_2}{2},$$

(8) $$V(f_0, f_1; f_0, f_1) = -\Phi_{01}.$$

§ 3.

Im Bisherigen haben wir noch eine zweite allerdings stillschweigende Voraussetzung gemacht. Für alle unsere Covarianten H, D, L, Φ, V, W ist das Vorhandensein zweier Klammerfactoren charakteristisch (siehe oben) und wir nahmen als selbstverständlich an, dass die Symbole der gegebenen Formen in jedem dieser beiden Klammerfactoren vorkommen können. Dies ist aber offenbar nicht mehr der Fall, wenn unter unsern gegebenen Formen lineare sind; alsdann fällt nicht nur ein Theil unserer Bildungen ganz weg, sondern es werden auch die identischen Umformungen andere und das Vorkommen linearer Formen nöthigt daher zu ganz neuen Untersuchungen.

Um nun nicht allzuviele neue Formeln entwickeln zu müssen, schlagen wir folgenden Weg ein. Unsere linearen Formen seien:

$$g_0 = u_x,$$
$$g_1 = u'_x,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wobei also die $u, u' \ldots$ nicht wie sonst contragrediente Variable, sondern Symbole gegebener linearer Formen bedeuten.

Ferner führen wir folgende Bezeichnungen und Abkürzungen ein:

$$(uu'u'') = T(g_0, g_1, g_2) = T_{012},$$
$$(\alpha\beta u)^2\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2} = \Sigma(f_0;\, g_0) = \Sigma_{0,0},$$
$$(\alpha u u')\, \alpha_x^{m_0-1} = S(f_0;\, g_0, g_1) = S_{0,01},$$
$$(\alpha u u')^2\, \alpha_x^{m_0-2} = Q(f_0;\, g_0, g_1) = Q_{0,01},$$
$$(\alpha\beta u)\,(\alpha\beta u')\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2} = P(f_0;\, g_0, g_1) = P_{0,01},$$
$$(\alpha u u')\,(\alpha u u'')\, \alpha_x^{m_0-2} = G(f_0;\, g_0;\, g_1, g_2) = G_{0,012},$$
$$(\alpha u u')\,(\alpha u'' u''')\, \alpha_x^{m_2-2} = K(f_0;\, g_0, g_1;\, g_2, g_3) = K_{0,0123},$$
$$(\alpha\alpha' u)^2\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-2} = F(f_0, f_1;\, g_0) = F_{01,0},$$
$$(\alpha'\alpha\beta)\,(u\alpha\beta)\, \alpha_x^{m_0-2}\, \beta_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-1} = B(f_0;\, f_1;\, g_0) = B_{01,0},$$
$$(\alpha\alpha' u)(\alpha\alpha' u')\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-2} = R(f_0, f_1;\, g_0, g_1) = R_{01,01},$$
$$(\alpha\alpha' u)\, \alpha_x^{m_0-1}\, {\alpha'}_x^{m_1-1} = N(f_0, f_1;\, g_0) = N_{01,0},$$
$$(\alpha\alpha' u)\,(\alpha u u')\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-1} = J(f_0;\, f_1;\, g_0;\, g_1) = J_{01,01},$$
$$(\alpha\alpha' u)\,(\alpha u' u'')\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-1} = M(f_0;\, f_1;\, g_0;\, g_1, g_2) = M_{01,012},$$
$$(\alpha''\alpha\alpha')\,(u\alpha\alpha')\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-2}\, {\alpha''}_x^{m_2-1} = C(f_0, f_1;\, f_2;\, g_0) = C_{012,0},$$
$$(\alpha\alpha' u)\,(\alpha\alpha'' u')\, \alpha_x^{m_0-2}\, {\alpha'}_x^{m_1-1}\, {\alpha''}_x^{m_2-1} = E(f_0;\, f_1, f_2;\, g_0, g_1) = E_{012,01}.$$

In den Abkürzungen beziehen sich die vor dem Komma stehenden Indices auf die nichtlinearen Formen $f_0 f_1 \ldots$, die hinter demselben

stehenden auf die linearen $g_0 g_1 \dots$. Doch soll das Komma von jetzt an weggelassen werden, so dass man sich z. B. bei C_{iklm} zu merken hat, dass darin die Symbole von f_i, f_k, f_l und g_m vorkommen.

Zwischen diesen Bildungen bestehen folgende identische Relationen:

$$\begin{array}{ll}
(9) & K_{00123} + K_{00231} + K_{00312} = 0, \\
(10) & M_{01012} + R_{0101} g_2 = M_{10021} + R_{0102} g_1, \\
(11) & M_{01012} + M_{01120} + M_{01201} = 0, \\
(12) & C_{0120} + C_{1200} + C_{2010} = L_{012} g_0, \\
(13) & E_{01201} + E_{21001} + C_{0211} g_0 = R_{0201} f_1, \\
(14) & T_{012} g_3 + T_{230} g_1 = T_{123} g_0 + T_{301} g_2, \\
(15) & S_{001} g_2 + S_{012} g_0 + S_{020} g_1 = T_{012} f_0, \\
(16) & G_{0012} g_1 + G_{0102} g_0 + T_{012} S_{001} = Q_{001} g_2, \\
(17) & N_{010} g_1 + S_{001} f_1 = N_{011} g_0 + S_{101} f_0, \\
(18) & S_{012} S_{103} - K_{00321} f_1 + M_{01312} g_0 = M_{01012} g_3, \\
(19) & M_{01012} g_3 + M_{01031} g_2 + M_{01023} g_1 = T_{123} N_{010}, \\
(20) & E_{10202} g_1 - E_{10212} g_0 + M_{12012} f_0 = S_{001} N_{122}.
\end{array}$$

Wenn nun unter unsern gegebenen Formen lineare vorkommen, so bilden wir innerhalb der Producte F „engere" Producte, indem wir alle linearen Formen paarweise zusammennehmen, eine etwa übrigbleibende mit einer nichtlinearen Form oder, wenn keine solche vorhanden ist, mit dem Product zweier linearer Formen. Unsere engern Producte sind nichts anderes als nichtlineare Formen und es steht jetzt nichts der Anwendung der Formeln (I)—(IV) im Wege. Es bleibt alsdann noch die Aufgabe an Stelle der Symbole der engern Producte die Symbole der linearen Formen einzuführen. Unter unsern Functionszeichen stehen jetzt:

a) nichtlineare Formen,
b) Producte aus je zwei linearen Formen,
c) Producte aus je einer nichtlinearen und einer linearen Form,
d) Producte aus je 3 linearen Formen.

Die Producte von der Form b) und c) werden aufgelöst durch Formeln für unsere Functionen H, D, L, Φ, U, V, wenn unter dem Functionszeichen *ein* Product einer linearen und einer nichtlinearen oder *ein* Product zweier linearer Formen steht (im Uebrigen natürlich nichtlineare Formen). Da aber jede nichtlineare Form ein solches Product möglicherweise sein kann, so sind ebensolche Formeln erforderlich für die in den ebenerwähnten Formeln ausser H, D, L, Φ, U, V weiter auftretenden Bildungen $\Sigma, B, F, C, P, Q, R, S, E$, aber auch für die in diesen neuen Formeln auftretenden weiteren Bildungen u. s. f.

So kommen wir schliesslich auf alle in diesem Paragraphen eingeführten Covarianten.

Der Fall d) macht dagegen keine besondere Schwierigkeit. Man behandelt das Product dreier linearer Formen zuerst als Product einer linearen und einer nichtlinearen Form, und dann letztere wieder als Product zweier linearen Formen.

Die zur Auflösung der engern Producte soeben als erforderlich nachgewiesenen Formeln sind nun:

$$H(f_0 \cdot g_0) = \frac{(m_0-1)\, g_0}{(m_0+1)^3} \left\{ m_0^2 H_0 g_0^2 - 3\Sigma_{00} f_0 \right\}, \tag{21}$$

$$D(f_0;\, f_1 \cdot g_0) = \frac{1}{m_1+1} \left\{ (m_1-1)\, D_{01} g_0 + 2 B_{010} \right\}, \tag{22}$$

$$D(f_0 \cdot g_0;\, f_1) = \frac{1}{(m_0+1)^2} \left\{ m_0^2 D_{01} g_0^2 - 2 m_0 B_{010} g_0 + \Sigma_{00} f_1 - 2 F_{010} f_0 \right\}, \tag{23}$$

$$L(f_0, f_1, f_2 \cdot g_0) = \frac{1}{m_2+1} \left\{ (m_2-1)\, L_{012} g_0 + 2 C_{0120} \right\}, \tag{24}$$

$$\Phi(f_0 \cdot g_0, f_1) = \frac{1}{(m_0+1)^2} \left\{ m_0^2 \Phi_{01} g_0^2 - B_{100} f_0 g_0 + \tfrac{1}{2} D_{10} f_0 g_0^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma_{10} f_0^2 \right\}, \tag{25}$$

$$U(f_0;\, f_1, f_2 \cdot g_0) = \frac{1}{m_2+1} \left\{ m_2 U_{012} g_0 + B_{010} f_2 \right\}, \tag{26}$$

$$U(f_0 \cdot g_0;\, f_1, f_2) = \frac{1}{(m_0+1)^2} \left\{ m_0^2 U_{012} g_0^2 - m_0 (B_{010} f_2 + B_{020} f_1) g_0 + F_{120} f_0^2 - F_{100} f_0 f_2 - F_{200} f_0 f_1 - 2 C_{1200} f_0 g_0 + L_{012} f_0 g_0^2 + \Sigma_{00} f_1 f_2 \right\}, \tag{27}$$

$$V(f_0, f_1;\, f_2, f_3 \cdot g_0) = \frac{1}{m_3+1} \left\{ m_3 V_{0123} g_0 + C_{0120} f_3 \right\}, \tag{28}$$

$$V(f_0 \cdot g_0, f_1;\, f_2, f_3) = \frac{1}{m_0+1} \left\{ (m_0-1)\, V_{0123} g_0 + V_{2301} g_0 + C_{2310} f_2 + C_{3100} f_2 + C_{1200} f_3 - C_{2300} f_1 - L_{123} f_0 g_0 \right\}, \tag{29}$$

$$\Sigma(f_0 \cdot g_0;\, g_1) = \frac{1}{(m_0+1)^2} \left\{ m_0^2 \Sigma_{01} g_0^2 - 2 m_0 P_{010} g_0 g_1 + \Sigma_{00} g_1^2 - 2 Q_{010} f_0 \right\}, \tag{30}$$

$$S(f_0 \cdot g_0;\, g_1, g_2) = \frac{1}{m_0+1} \left\{ m_0 S_{012} g_0 + T_{012} f_0 \right\}, \tag{31}$$

$$Q(f_0 \cdot g_0;\, g_1, g_2) = \frac{1}{m_0+1} \left\{ (m_0-1)\, Q_{012} g_0 + 2 S_{012} T_{012} \right\}, \tag{32}$$

$$P(f_0 \cdot g_0;\, g_1, g_2) = \frac{1}{(m_0+1)^2} \left\{ m_0^2 P_{012} g_0^2 - m_0 (P_{002} g_1 + P_{001} g_2) g_0 + \Sigma_{00} g_1 g_2 - G_{0012} f_0 \right\}, \tag{33}$$

$$G(f_0 \cdot g_0;\, g_1;\, g_2, g_3) = \frac{1}{m_0+1} \left\{ (m_0-1)\, G_{0123} g_0 + S_{012} T_{013} + S_{013} T_{012} \right\}, \tag{34}$$

$$(35)\quad K(f_0\cdot g_0;\, g_1,g_2;\, g_3,g_4) = \frac{1}{m_0+1}\{(m_0-1)\,K_{01234}g_0 + S_{012}T_{034} + S_{034}T_{012}\},$$

$$(36)\quad F(f_0\cdot g_0, f_1;\, g_1) = \frac{1}{m_0+1}\{m_0 F_{011}g_0 + 2J_{1010}\},$$

$$(37)\quad B(f_0;\, f_1\cdot g_0;\, g_1) = \frac{1}{m_1+1}\{m_1 B_{011}g_0 + P_{001}f_1\},$$

$$(38)\quad B(f_0\cdot g_0;\, f_1;\, g_1) = \frac{1}{(m_0+1)^2}\{m_0{}^2 B_{011}g_0{}^2 - m_0(B_{010}g_1 + P_{001}f_1)g_0 + \Sigma_{00}f_1 g_1 + R_{0101}f_0 g_0 - F_{010}f_0 g_1\},$$

$$(39)\quad R(f_0\cdot g_0, f_1;\, g_0, g_2) = \frac{1}{m_0+1}\{(m_0-1)R_{0112}g_0 + M_{01120} + M_{01210}\},$$

$$(40)\quad N(f_0\cdot g_0, f_1;\, g_1) = \frac{1}{m_0+1}\{m_0 N_{011}g_0 + S_{110}f_0\},$$

$$(41)\quad J(f_0\cdot g_0;\, f_1;\, g_1;\, g_2) = \frac{1}{m_0+1}\{(m_0-1)\,J_{0112}\,g_0 + S_{012}S_{110} + N_{011}T_{012}\},$$

$$(42)\quad J(f_0;\, f_1\cdot g_0;\, g_1;\, g_2) = \frac{1}{m_1+1}\{m_1 J_{0112}g_0 - G_{0102}f_1\},$$

$$(43)\quad M(f_0\cdot g_0; f_1; g_1; g_2, g_3) = \frac{1}{m_0+1}\{(m_0-1)\,M_{01123}g_0 + S_{023}S_{110} + N_{011}T_{023}\},$$

$$(44)\quad M(f_0; f_1\cdot g_0; g_1; g_2, g_3) = \frac{1}{m_1+1}\{m_1 M_{01123}g_0 + K_{03012}f_1\},$$

$$(45)\quad C(f_0, f_1;\, f_2\cdot g_0;\, g_1) = \frac{1}{m_2+1}\{m_2 C_{0121}g_0 + R_{0101}f_2\},$$

$$(46)\quad C(f_0\cdot g_0, f_1;\, f_2;\, g_1) = \frac{1}{m_0+1}\{(m_0-1)C_{0121}\,g_0 - 2E_{10210} + E_{10201}\},$$

$$(47)\quad E(f_0; f_1, f_2\cdot g_0; g_1, g_2) = \frac{1}{m_2+1}\{m_2 E_{01212}g_0 + M_{01201}f_2\},$$

$$(48)\quad E(f_0\cdot g_0; f_1, f_2; g_1, g_2) = \frac{1}{m_0+1}\Big\{m_0 E_{01212} - \tfrac{1}{2}(E_{01210}g_2 + E_{02120}g_1 + R_{0101}f_2 g_2 + R_{0202}f_1 g_1) + \tfrac{1}{2}(R_{0112}f_2 g_0 + R_{0212}f_1 g_0 + M_{01120}f_2 + M_{02210}f_1)\Big\},$$

$$(49)\quad H(g_0\cdot g_1) = 0,$$

$$(50)\quad D(f_0;\, g_0\cdot g_1) = P_{001},$$

$$(51)\quad D(g_0\cdot g_1;\, f_0) = -\tfrac{1}{2}\,Q_{001},$$

$$(52)\quad L(g_0\cdot g_1, f_0, f_1) = R_{0101},$$

$$(53)\quad \Phi(f_0, g_0\cdot g_1) = \tfrac{1}{8}\{\Sigma_{00}g_1{}^2 - 2P_{001}g_0 g_1 + \Sigma_{01}g_0{}^2\},$$

$$(54)\quad U(f_0;\, f_1, g_0\cdot g_1) = \tfrac{1}{2}\{B_{010}g_1 + B_{011}g_0\},$$

$$(55)\quad U(g_0\cdot g_1;\, f_0, f_1) = -\tfrac{1}{2}\,S_{001}S_{101},$$

$$(56)\quad V(f_0, f_1; f_2, g_0 \cdot g_1) = \frac{1}{2}\{C_{0120}g_1 + C_{0121}g_0\},$$

$$(57)\quad V(f_0, g_0 \cdot g_1; f_1, f_2) = \frac{1}{2}\{E_{01201} + E_{01210}\},$$

$$(58)\quad \Sigma(g_0 \cdot g_1; g_2) = -\frac{1}{2} T_{012}^2,$$

$$(59)\quad S(g_0 \cdot g_1; g_2, g_3) = \frac{1}{2}\{T_{123}g_0 + T_{023}g_1\},$$

$$(60)\quad Q(g_0 \cdot g_1; g_2, g_3) = T_{023}T_{123},$$

$$(61)\quad P(g_0 \cdot g_1; g_2, g_3) = -\frac{1}{2} T_{012}T_{013},$$

$$(62)\quad G(g_0 \cdot g_1; g_2; g_3, g_4) = \frac{1}{2}\{T_{023}T_{124} + T_{024}T_{123}\},$$

$$(63)\quad K(g_0 \cdot g_1; g_2, g_3; g_4, g_5) = \frac{1}{2}\{T_{023}T_{145} + T_{045}T_{123}\},$$

$$(64)\quad F(g_0 \cdot g_1, f_0; g_2) = G_{0201},$$

$$(65)\quad B(f_0; g_0 \cdot g_1; g_2) = \frac{1}{2}\{P_{012}g_0 + P_{002}g_1\},$$

$$(66)\quad B(g_0 \cdot g_1; f_0; g_2) = -\frac{1}{2} T_{012}S_{001},$$

$$(67)\quad R(f_0, g_0 \cdot g_1; g_2, g_3) = \frac{1}{2}\{K_{02031} + K_{02130}\},$$

$$(68)\quad N(f_0, g_0 \cdot g_1; g_2) = \frac{1}{2}\{S_{002}g_1 + S_{012}g_0\},$$

$$(69)\quad J(f_0; g_0 \cdot g_1; g_2; g_3) = -\frac{1}{2}\{G_{0203}g_1 + G_{0213}g_0\},$$

$$(70)\quad J(g_0 \cdot g_1; f_0; g_2; g_3) = \frac{1}{2}\{S_{020}T_{123} + S_{021}T_{023}\},$$

$$(71)\quad M(f_0; g_0 \cdot g_1; g_2; g_3, g_4) = \frac{1}{2}\{K_{00234}g_1 + K_{01234}g_0\},$$

$$(72)\quad M(g_0 \cdot g_1; f_0; g_2; g_3, g_4) = \frac{1}{2}\{S_{020}T_{134} + S_{021}T_{034}\},$$

$$(73)\quad C(f_0, f_1; g_0 \cdot g_1; g_2 = \frac{1}{2}\{R_{0102}g_1 + R_{0112}g_0\},$$

$$(74)\quad C(g_0 \cdot g_1, f_0; f_1; g_2) = \frac{1}{2}\{M_{01012} + M_{01102}\},$$

$$(75)\quad E(f_0; f_1, g_0 \cdot g_1; g_2, g_3) = \frac{1}{2}\{M_{01203}g_1 + M_{01213}g_0\},$$

$$(76)\quad E(g_0 \cdot g_1; f_0, f_1; g_2, g_3) = \frac{1}{2}\{S_{002}S_{113} + S_{102}S_{013}\}.$$

Beim Vorkommen gleicher linearer Factoren in den F verfahren wir nach den in § 2 auseinandergesetzten Grundsätzen. Die in diesem Paragraphen eingeführten Covarianten werden beim Vorkommen gleicher Formen unter den Functionszeichen nach folgenden Formeln reducirt, von welchen jedoch ebenfalls die von selbst einleuchtenden weggelassen worden sind:

$$(77)\qquad B(f_0;\, f_0;\, g_0) = \frac{1}{3}\, H_0 g_0,$$

$$(78)\qquad J(f_0;\, f_0;\, g_0;\, g_1) = \frac{1}{2}\left\{-\,\Sigma_{00} g_1 + P_{001} g_0\right\},$$

$$(79)\qquad M(f_0;\, f_0;\, g_0;\, g_1,\, g_2) = \frac{1}{2}\left\{P_{002} g_1 - P_{001} g_2\right\},$$

$$(80)\qquad C(f_0,\, f_1;\, f_1;\, g_0) = \frac{1}{2}\left\{D_{10} g_0 - B_{100}\right\},$$

$$(81)\qquad E(f_0;\, f_1,\, f_2;\, g_0,\, g_0) = \frac{1}{2}\left\{2\, C_{1200} g_0 - L_{012} g_0^2 + F_{010} f_2 + F_{020} f_1 - F_{120} f_0\right\},$$

$$(82)\qquad E(f_0;\, f_0,\, f_1;\, g_0,\, g_1) = \frac{1}{2}\left\{P_{001} g_0 - B_{010} g_1\right\},$$

$$(83)\qquad E(f_0;\, f_1,\, f_1;\, g_0,\, g_1) = \frac{1}{2}\left\{2\, R_{0101} f_1 - D_{10} g_0 g_1 + B_{100} g_1 + B_{101} g_0 - P_{101} f_0\right\},$$

§ 4.

Zusammenstellung der Operationen, welche erforderlich sind, um von einer rationalen ganzen Function gewisser ternärer Formen die Hesse'sche Covariante in Function der In- und Covarianten des vollständigen Formensystems der gegebenen Formen darzustellen:

a) Die gegebene Function Φ wird auf die Form

$$(1)\qquad \Phi = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots$$

gebracht.

b) Die engern Producte (§ 3) werden gebildet, so dass nur noch nichtlineare Formen vorhanden sind.

c) Diese werden ohne Rücksicht auf solche, die sich etwa wiederholen, der Reihe nach mit den Indices $0, 1, \ldots p$; $0', 1', \ldots p'$; $0'', 1'', \ldots p''$; ... bezeichnet (die Gruppen beziehen sich auf die einzelnen Producte F).

d) Die Formel (I) und sodann die Formeln (II), (III) und (IV) werden angewendet.

e) Die engern Producte werden mittelst der Formeln (21)—(76) aufgelöst.

f) Die Berücksichtigung der ursprünglich einander gleichen Formen führt zur Anwendung der Formeln (3)—(8) und (77)—(83).

g) Das Resultat wird eventuell mittelst der Identitäten (2) und (9)—(20) vereinfacht.

§ 5.

Eine Uebersicht über unsere invarianten Gebilde nebst ihrer geometrischen Bedeutung giebt die nachstehende Tabelle. In derselben ist die Curve $f_i = 0$ kurz mit f_i, die Gerade $g_k = 0$ mit g_k; der Schnittpunkt der Geraden g_k und g_l mit (g_k, g_l) bezeichnet. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes nach einer Curve heisst lineare, die $(n-2)^{\text{te}}$ dagegen conische Polare.

Form.	Symbolische Bezeichnung.	Grad in x.	Geometrische Bedeutung der gleich Null gesetzten Form.
1) T_{012}	$(uu'u'')$	—	Bedingung, dass g_0, g_1, g_2 durch denselben Punkt gehen.
2) H_0	$(\alpha\beta\gamma)\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}\gamma_x^{m_0-2}$	$3m_0-6$	Ort der x, deren conische Polaren nach f_0 Geradenpaare sind.
3) Σ_{00}	$(\alpha\beta u)^2\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}$	$2m_0-4$	Ort der x, deren conische Polaren nach f_0 von g_0 berührt werden.
4) S_{001}	$(\alpha u u')\alpha_x^{m_0-1}$	m_0-1	Erste Polare des Punkts (g_0, g_1) nach f_0.
5) Q_{001}	$(\alpha u u')^2\alpha_x^{m_0-2}$	m_0-2	Zweite Polare des Punkts (g_0, g_1) nach f_0.
6) P_{001}	$(\alpha\beta u)(\alpha\beta u')\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}$	$2m_0-4$	Ort der x, in Bezug auf deren conische Polaren nach x, g_0 und g_1 conjugirt sind.
7) G_{0012}	$(\alpha u u')(\alpha u u'')\alpha_x^{m_0-2}$	m_0-2	Ort der x, in Bezug auf deren conische Polaren nach f_0, die auf g_0 von g_1 und g_2 ausgeschnittenen Punkte conjugirt sind.
8) K_{00123}	$(\alpha u u')(\alpha u'' u''')\alpha_x^{m_0-2}$	m_0-2	Ort der x, in Bezug auf deren conische Polaren nach f_0 die Punkte (g_0, g_1) und (g_2, g_3) conjugirt sind.
9) D_{01}	$(\alpha\beta\alpha')^2\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-2}_x$	$2m_0+m_1-6$	Ort der x, deren conische Polaren nach f_0 und f_1 resp. als Strahlencurve und Punktcurve harmonisch liegen (cf. § 6).

10) Φ_{01}	$(\alpha\beta\alpha')(\alpha\alpha'\beta')\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-1}\alpha'^{\,m_1-2}_x\beta'^{\,m_1-1}_x$	$2m_0+2m_1-6$	Ort der x, von welchen an ihre conischen Polaren nach f_0 und f_1 sich harmonisch trennende Tangentenpaare gehen.
11) F_{010}	$(\alpha\alpha' u)^2\alpha_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-2}_x$	m_0+m_1-4	Ort der x, deren conische Polaren nach f_0 und f_1 von g_0 in sich harmonisch trennenden Punktepaaren geschnitten werden.
12) B_{010}	$(\alpha'\alpha\beta)(u\alpha\beta)\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-1}_x$	$2m_0+m_1-5$	Ort der x, deren lineare Polaren nach f_1 durch die Pole von g_0 in Bezug auf die conischen Polaren von x nach f_0 gehen.
13) R_{0101}	$(\alpha\alpha' u)(\alpha\alpha' u')\alpha_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-2}_x$	m_0+m_1-4	Ort der x, derart, dass die zwei von (g_0, g_1) ausgehenden, die conischen Polaren von x nach f_0 und f_1 in sich harmonisch trennenden Punktepaaren schneidenden Geraden von g_0 und g_1 harmonisch getrennt werden.
14) N_{010}	$(\alpha\alpha' u)\alpha_x^{m_0-1}\alpha'^{\,m_1-1}_x$	m_0+m_1-2	Ort der x, deren lineare Polaren nach f_0 und f_1 sich auf g_0 schneiden.
15) J_{0101}	$(\alpha\alpha' u)(\alpha u u')\alpha_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-1}_x$	m_0+m_1-3	Ort der x, derart, dass die lineare Polare von x nach f_1 und die lineare Polare von (g_0, g_1) nach der conischen Polaren von x nach f_0 sich auf g_0 schneiden.
16) M_{01012}	$(\alpha\alpha' u)(\alpha u' u'')\alpha_x^{m_0-2}\alpha'^{\,m_1-1}_x$	m_0+m_1-3	Ort der x, derart, dass die lineare Polare von x nach f_1 und die lineare Polare von $(g_1 g_2)$ nach der conischen Polaren von x nach f_0 sich auf g_0 schneiden.

Form.	Symbolische Bezeichnung.	Grad in x.	Geometrische Bedeutung der gleich Null gesetzten Form.
17) L_{012}	$(\alpha\alpha'\alpha'')^2\alpha_x^{m_0-2}\alpha_x'^{m_1-2}\alpha_x''^{m_2-2}$	$m_0+m_1+m_2-6$	Ort der x, derart, dass die 3 Pole ihrer conischen Polaren nach f_0, f_1, f_2 in Bezug auf die C_3 ihres Netzes „conjugirt“ sind in Bezug auf die Jacobi'sche Curve desselben Netzes (cf. § 6).
18) U_{012}	$(\alpha'\alpha\beta)(\alpha''\alpha\beta)\alpha_x^{m_0-2}\beta_x^{m_0-2}\alpha_x'^{m_1-1}\alpha_x''^{m_2-1}$	$2m_0+m_1+m_2-6$	Ort der x, deren lineare Polaren nach f_1 und f_2 conjugirt sind in Bezug auf ihre conische Polare nach f_0.
19) C_{0120}	$(\alpha''\alpha\alpha')(u\alpha\alpha')\alpha_x^{m_0-2}\alpha_x'^{m_1-2}\alpha_x''^{m_2-1}$	$m_0+m_1+m_2-5$	Ort der x, deren lineare Polaren nach f_2 von der Geraden g_0 harmonisch getrennt werden je durch die beiden von ihrem Schnittpunkt ausgehenden, die conischen Polaren von x nach f_0 und f_1 in harmonischen Punktepaaren treffenden Geraden.
20) E_{01201}	$(\alpha\alpha'u)(\alpha\alpha''u')\alpha_x^{m_0-2}\alpha_x'^{m_1-1}\alpha_x''^{m_2-1}$	$m_0+m_1+m_2-4$	Ort der x, deren lineare Polaren nach f_1 und f_2 auf g_0 und g_1 resp. Punkte ausschneiden, welche in Bezug auf die conische Polare von x nach f_0 conjugirt sind.
21) V_{0123}	$(\alpha''\alpha\alpha')(\alpha'''\alpha\alpha')\alpha_x^{m_0-2}\alpha_x'^{m_1-2}\alpha_x''^{m_2-1}\alpha_x'''^{m_3-1}$	$m_0+m_1+m_2+m_3-6$	Ort der x, deren lineare Polaren von x nach f_2 und f_3 harmonisch getrennt werden durch die beiden Geraden, welche von ihrem Schnittpunkt ausgehend die conischen Polaren von x nach f_0 und f_1 in sich harmonisch trennenden Punktepaaren treffen.

Zu vorstehender Tabelle ist vor allem zu bemerken, dass im Falle quadratischer Formen, welche gleich Null gesetzt bekanntlich Kegelschnitte bedeuten, einige Modificationen eintreten. Erstens ist die conische Polare irgend eines Punkts in Bezug auf einen Kegelschnitt nichts anderes als der Kegelschnitt selbst. Zweitens sind, wenn alle f quadratisch sind, die Formen H, Σ, Q, P, G, K, D, F, R, L nicht mehr Covarianten, sondern Invarianten und stellen daher gleich Null gesetzt nicht mehr den Ort der Punkte x dar, zwischen deren conischen Polaren in Bezug auf die gegebenen Curven nebst den gegebenen Geraden eine gewisse Beziehung besteht, sondern die Bedingung dafür, dass zwischen den gegebenen Kegelschnitten und Geraden eben diese Beziehung besteht.

§ 6.

Wenn wir im Folgenden untersuchen, in wie weit unsere invarianten Gebilde bisher eingeführt und studirt worden sind, so haben wir zu bedenken dass unsere Bildungen, die *eine* lineare Form enthalten, also Σ, F, B, N, C, zwar in der Litteratur vorkommen, aber nicht als Covarianten (Invarianten) von nichtlinearen und einer linearen Form, sondern als Zwischenformen (Contravarianten) von nicht linearen Formen, wobei die u eine contragrediente Variablenreihe bedeuten.

Für diejenigen unserer Bildungen, welche besondere Wichtigkeit haben oder für welche eine nichtsymbolische Darstellungsweise in besonders einfacher Form möglich ist, soll die letztere angegeben werden, zu welchem Zweck wir eine für quadratische Formen geläufige Abkürzung auf höhere Formen übertragen. Ist f_0 eine Form m_0^{ter} Ordnung, so setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_0}\,\frac{\partial f_0}{\partial x_i} &= a_i \\ \frac{1}{m_0(m_0-1)}\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i^2} &= a_{ii} \\ \frac{1}{m_0(m_0-1)}\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_k} &= a_{ik} \end{aligned}\right\}\; i,k=1,2,3$$

und bezeichnen ferner mit A_{ii}, A_{ik} die Unterdeterminanten von a_{ii}, a_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die Coefficienten von g_0 sollen g_1, g_2, g_3 sein.

Die Indices der f und g werden durch Striche angedeutet.

$$T_{012} = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \\ g_1'' & g_2'' & g_3'' \end{vmatrix}.$$

Bekannte elementare Bildung.

$$H_0 = 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hesse'sche Form.

$$\Sigma_{00} = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Für f_0 als quadratische Form heisst die zugehörige Contravariante bei Clebsch-Lindemann (Vorl. über Geometrie pag. 291) F_{11}, bei Salmon (Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. Aufl., pag. 438) 2Σ. Für f_0 als cubische Form wird die zugehörige Zwischenform von Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 543) mit Θ bezeichnet und „Poloconik" von g_0 in Bezug auf f_0 genannt.

$$S_{001} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix}.$$

$$P_{001} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_{01} = 2\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}' \\ a_{12} & a_{22} & a_{23}' \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}' & a_{23} \\ a_{13} & a_{23}' & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}' & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right\}$$

wird von Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 295) mit A_{112}, von Salmon (a, a. O. pag. 503) mit 2Θ bezeichnet.

Die in der Tabelle erwähnte *harmonische* Lage der beiden conischen Polaren besteht in Folgendem.

Liegen die Kegelschnitte f_0 und f_1 resp. als Strahlencurve und Punktcurve harmonisch, so dass $D_{01} = 0$ ist, so giebt es bekanntlich in Bezug auf f_1 unendlich viele f_0 umbeschriebene Polardreiseite und in in Bezug auf f_0 unendlich viele f_1 einbeschriebene Polardreiecke. Ferner trennen sich die Tangentenpaare, welche von dem Pol irgend einer Tangente von f_0 nach f_1 an f_0 und f_1 gezogen werden können, harmonisch. Derartige Kegelschnitte sind besonders von Smith und Rosanes studirt worden.

$$\Phi_{01} = -\{(A_{22}A'_{33} + A_{33}A'_{22} - 2A_{23}A'_{23})\,x_1{}^2$$
$$+ 2(A_{13}A'_{23} + A_{23}A'_{13} - A_{12}A'_{33} - A_{33}A'_{12})\,x_1x_2 + \cdots\}$$

wird von Salmon für quadratische Formen mit F bezeichnet (a. a. O. pag. 523). Die von Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 291) eingeführte, mit Φ_{12} bezeichnete Grösse

$$\big((\alpha\beta)\,(\alpha'\beta')\,x\big)^2 = -4\Phi_{01}$$

konnte wegen der Analogie mit den übrigen Bildungen nicht in dieser Form beibehalten werden und es wurde an ihrer Stelle unser Φ_{01} eingeführt.

$$F_{01} = (a_{22}a'_{33} + a_{33}a'_{22} - 2a_{23}a'_{23})\,g_1{}^2$$
$$+ 2(a_{13}a'_{23} + a_{23}a'_{13} - a_{12}a'_{33} - a_{33}a'_{12})\,g_1g_2 + \cdots.$$

Die zugehörige Zwischenform ist das dualistische Gegenbild von Φ_{01}. Für quadratische Formen heisst dieselbe bei Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 291) F_{12}, bei Salmon (a. a. O. pag. 521) Φ.

$$B_{010} = -2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1' \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2' \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die zugehörige Zwischenform wird für quadratische Formen bei Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 291) mit B_1 bezeichnet.

$$N_{010} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}.$$

Für quadratische Formen heisst die zugehörige Zwischenform bei Clebsch-Lindemann (a. a. O. pag. 291) N.

$$L_{012} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a''_{13} \\ a_{12} & a'_{22} & a''_{23} \\ a_{13} & a'_{23} & a''_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a'_{13} \\ a_{12} & a''_{22} & a'_{23} \\ a_{13} & a''_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a''_{13} \\ a'_{12} & a_{22} & a''_{23} \\ a'_{13} & a_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a''_{12} & a_{22} & a'_{23} \\ a''_{13} & a_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a'_{12} & a''_{22} & a_{23} \\ a'_{13} & a''_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a''_{12} & a'_{22} & a_{23} \\ a''_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Salmon führt diese Invariante für quadratische Formen an, ohne sie zu bezeichnen oder zu deuten (a. a. O. pag. 557) Ciamberlini („Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche" Batt. Giorn. vol. XXIV, p. 153) nennt sie L und giebt als ihre Bedeutung an, dass die Kegelschnitte $\alpha_x{}^2 = 0$ und $(\alpha'\alpha''u)^2 = 0$ als Punktcurve und Strahlencurve harmonisch liegen und daher auch die durch cyklische Vertauschung hieraus hervorgehenden Kegelschnittpaare. Eine andere Deutung ist folgende: Fasst man die 3 Kegelschnitte $f_0\ f_1\ f_2$ auf als Polaren der 3 Punkte:

$$(84)\quad \begin{cases} u_x = O_1 = (\alpha'\alpha''u)\,(\alpha'\alpha\beta)\,(\alpha''\alpha\beta), \\ u_y = O_2 = (\alpha''\alpha u)\,(\alpha''\alpha'\beta')\,(\alpha\alpha'\beta'), \\ u_z = O_3 = (\alpha\alpha' u)\,(\alpha\alpha''\beta'')\,(\alpha'\alpha''\beta'') \end{cases}$$

in Bezug auf dieselbe Curve dritter Ordnung (Clebsch-Lindemann, a. a. O. pag. 524), deren Hesse'sche Curve bekanntlich die Jacobi'sche Curve des Netzes der 3 Kegelschnitte

$$i_x^3 = (\alpha\alpha'\alpha'')\,\alpha_x\alpha'_x\alpha''_x$$

ist, so ist $L_{012} = 0$ gleichbedeutend mit

$$(85)\qquad i_x i_y i_z = 0$$

d. h. die 3 Punkte $x\,y\,z$ liegen so, dass je zwei conjugirt sind in Bezug auf die Polare des dritten nach der Jacobi'schen Curve. Um einen symmetrischen Ausdruck zu haben, erlauben wir uns die Gleichung (85) so auszusprechen:

Die drei Punkte x, y, z sind „*conjugirt*" in Bezug auf die Jacobi'sche Curve $i_x^3 = 0$.

Für den Fall, dass f_0, f_1, f_2 höhere Curven sind, erhält man alsdann die in der Tabelle gegebene Formulirung der Bedeutung von $L_{012} = 0$.

$$\begin{aligned} U_{012} = 2\,\Big\{ & \Big(A_{11}\,a'_{11}a''_{11} + A_{12}(a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{11}) + A_{22}\,a'_{12}a''_{12} \\ & + A_{13}(a'_{11}a''_{13} + a'_{13}a''_{11}) + A_{23}(a'_{12}a''_{13} + a'_{13}a''_{12}) + A_{33}\,a'_{13}a''_{13}\Big)\,x_1^2 \\ & + \Big(A_{11}(a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{11}) + A_{12}(a'_{11}a''_{22} + 2\,a'_{12}a''_{12} + a'_{22}a''_{11}) \\ & + A_{22}(a'_{12}a''_{22} + a'_{22}a''_{12}) + A_{13}(a'_{11}a''_{23} + a'_{12}a''_{13} + a'_{13}a''_{12} + a'_{23}a''_{11}) \\ & + A_{23}(a'_{12}a''_{23} + a'_{13}a''_{22} + a'_{22}a''_{13} + a'_{23}a''_{12}) \\ & + A_{33}(a'_{13}a''_{23} + a'_{23}a''_{13})\Big)\,x_1x_2 + \cdots\Big\}. \end{aligned}$$

Die Form wird für Kegelschnitte von Ciamberlini mit S_{23} bezeichnet und ihr obige Bedeutung gegeben (a. a. O.).

Die der Form C_{0120} zu Grunde liegende Zwischenform wird ebendaselbst mit V_1 bezeichnet.

Schlussbemerkung.

Die Formen Σ, Q, G, F, J, welche in *jedem* Klammerfactor *dasselbe lineare Symbol* u enthalten, können mittelst des Clebsch'schen Uebertragungsprincips (Clebsch-Lindemann a. a. O. pag. 274) in binäre Formen übergeführt werden und bedeuten daher gleich Null gesetzt Relationen zwischen Schnittpunktsystemen auf der Geraden g_0. In den binären Ueberschiebungen, welche Herr Professor Brill in dem zu Anfang dieser Abhandlung citirten Aufsatz einführt (Math. Ann. Bd. XIII, pag. 175) erkennen wir wirklich die obenerwähnten Formen wieder: $(ba)(ba')$ ist identisch mit Q; $(ba)(bc)c_x^2$ mit J, $(bb')^2$ mit Σ,

$(bc)^2 c_x$ mit F. Die daselbst ausserdem vorkommende Bildung $(ba)(bb')b_x$ lässt sich ternär auf Σ und P zurückführen; letzteres kann aber natürlich nicht binär dargestellt werden.

§ 7.

Unsere nächste Aufgabe wäre nun eine möglichst vollständige geometrische Discussion unserer Bildungen für den Fall, dass unsere gegebenen Formen alle quadratisch sind (natürlich abgesehen von den linearen). Wir hätten zu sehen, was aus ihnen wird, wenn die durch diese Formen dargestellten Kegelschnitte einander oder die Geraden berühren in Geradenpaare oder Doppelgerade degeneriren u. s. f. Die Formen, welche keine Invarianten sind, wären daraufhin zu untersuchen, wann sie identisch (d. h. unabhängig von x) verschwinden. Bei den quadratischen Formen (Kegelschnitten) hätten wir die Bedingung des Zerfalls in Geradenpaare und Doppelgerade zu erforschen und sie in Liniencoordinaten zu übertragen. Auch ausgezeichnete Punkte unserer covarianten Curven, insbesondere ihre Schnittpunkte mit den gegebenen wären zu ermitteln. Während sich manche dieser Aufgaben wegen zu grosser Complicirtheit kaum lösen lassen, sind andere ausserordentlich einfach und können füglich dem Leser überlassen werden.

Nur auf einige Punkte sei hier aufmerksam gemacht.

$D_{01} = 0$ bedeutet für f_0 als Geradenpaar, dass f_1 durch den Mittelpunkt desselben geht; für f_1 als Geradenpaar, dass dieses harmonisch zu den von seinem Mittelpunkt an f_0 gezogenen Tangenten liegt. Berühren sich f_0 und f_1, so bedeutet $D_{01} = 0$, dass die Krümmungen von f_0 und f_1 entgegengesetzt gerichtet sind und diejenige von f_1 das Doppelte von der von f_0 beträgt.

$\Phi_{01} = 0$ schneidet f_0 und f_1 in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte, deren Gleichung (Salmon a. a. O. pag. 523)

$$(86) \qquad 9\Phi_{01}^2 = H_0 H_1 f_0 f_1 .$$

Daher geht $\Phi_{01} = 0$ durch einen Berührungspunkt von f_0 und f_1 von der 1., 2. oder 3. Ordnung mit Berührung beider von derselben Ordnung.

$\Phi_{01} = 0$ zerfällt, wenn f_0 Geradenpaar ist, in das Tangentenpaar von seinem Mittelpunkt an f_1 und wenn f_0 und f_1 Geradenpaare sind, in die doppelt zählende Verbindungslinie der Mittelpunkte.

$\Phi_{01} = 0$ besitzt das gemeinsame Polardreieck von f_0 und f_1 ebenfalls und zerfällt unter der Bedingung (Salmon a. a. O. pag. 531):

$$(87) \qquad H_0 H_1 - 9 D_{01} D_{10} = 0$$

in zwei Gerade durch eine Ecke desselben, ferner, wenn sich f_0 und f_1 doppelt berühren, in die doppelte Berührungssehne.

In Liniencoordinaten kann Φ_{01} mittelst der Formen Σ_{00} Σ_{01} und F_{010} ausgedrückt werden, wenn man in denselben u als Variable ansieht:

(88) $$36\Phi_{01} = 3H_0 D_{10}\Sigma_{10} + 3H_1 D_{01}\Sigma_{00} - 2H_0 H_1 F_{010}.$$

Für $R_{0101} = 0$ ergiebt sich ausser der in der Tabelle gegebenen noch folgende Bedeutung: es ist die Bedingung, dass auf den 4 Geraden, auf welchen die Schnittpunkte von g_0 und g_1 sowohl in Bezug auf f_0 als in Bezug auf f_1 conjugirt sind, diese Schnittpunkte harmonisch getrennt werden durch die Polaren des Punktes (g_0, g_1) nach f_0 und f_1.

$N_{010} = 0$ schneidet g_0 in den Doppelpunkten der von f_0 und f_1 darauf bestimmten Involution; es geht durch die Ecken des Polardreiecks von f_0 und f_1 und durch die Pole von g_0 nach f_0 und f_1 und seine Tangenten in letzteren Punkten gehen durch den Pol von g_0 nach $(\alpha\alpha' u)^2 = 0$.

N_{010} zerfällt in ein Geradenpaar, wenn g_0 durch eine Ecke des Polardreiecks geht, oder wenn sich f_0 und f_1 an zwei Stellen in gewöhnlicher Weise oder aber an einer vierpunktig berühren; es zerfällt in eine Doppelgerade, wenn f_0 und f_1 sich osculiren und g_0 Osculationstangente ist oder wenn sich f_0 und f_1 berühren, g_0 durch den Berührungspunkt geht und von der Berührungstangente durch die zwei übrigen Schnittpunkte von f_0 und f_1 harmonisch getrennt wird.

In Liniencoordinaten ist

(89) $$N_{011} = \frac{1}{2}(P_{001} P_{101} - R^2_{0101}),$$

wo u wieder als Variable zu betrachten ist.

$L_{012} = 0$ ist, wenn f_0, f_1 und f_2 sich in demselben Punkt berühren, die Bedingung, dass die Krümmungssumme im Berührungspunkt gleich Null ist.

$U_{012} = 0$ zerfällt, wenn f_0 ein Geradenpaar ist, in die zwei Polaren seines Mittelpunkts je nach f_1 und f_2. Ferner zerfällt $U_{012} = 0$, wenn

(90) $$\begin{aligned} Y_{012} = H_0 H_1 H_2 &- 9(D_{01} D_{10} H_2 + D_{02} D_{20} H_1 + D_{21} D_{12} H_0) \\ &+ 27(D_{01} D_{12} D_{20} + D_{02} D_{21} D_{10}) - L_{012}\Lambda_{012} = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist

(91) $$\begin{aligned} \Lambda_{012} &= \big((\alpha\beta), (\alpha'\beta'), (\alpha''\alpha'')\big)^2 \\ &= 2D_{10}D_{20} - 2(\alpha\alpha'\beta')(\beta\alpha'\beta')(\alpha\alpha''\beta'')(\beta\alpha''\beta'') \end{aligned}$$

eine Invariante, welche zu L_{012} dualistisch ist und von Salmon (a. a. O. pag. 557) mit 48Φ bezeichnet wird.

Aus der Symmetrie von Y_{012} folgt, dass mit $U_{012} = 0$ auch $U_{102} = 0$ und $U_{201} = 0$ zerfallen muss. Geometrische Ueberlegungen bestätigen dies und ergeben folgende Beziehungen zwischen den 6 Geraden:

Es sei $u_x = 0$ eine Gerade von $U_{012} = 0$ so ist

$$(\alpha'\beta' u)(\alpha'\beta'\alpha)\alpha_x = 0 \quad \text{eine Gerade von } U_{102} = 0,$$

$$(\alpha''\beta'' u)(\alpha''\beta''\alpha)(\alpha\alpha'\beta')(\alpha'\beta'\gamma'')\gamma''_x = 0 \text{ die andere } \text{,, ,, ,,}$$

$$(\alpha''\beta'' u)(\alpha''\beta''\alpha)\alpha_x = 0 \quad \text{eine ,, ,, } U_{201} = 0,$$

$$(\alpha'\beta' u)(\alpha'\beta'\alpha)(\alpha\alpha''\beta'')(\alpha''\beta''\gamma')\gamma'_x = 0 \text{ die andere } \text{,, ,, ,,}$$

endlich:

$(\alpha'\beta' u)(\alpha'\beta'\alpha)(\alpha\alpha''\beta'')(\alpha''\beta''\gamma')(\gamma'\beta\gamma)(\beta\gamma\gamma'')\gamma''_x$ die andere Gerade von U_{012}; letzterer Ausdruck muss noch reducirbar sein.

Durch einen gemeinsamen Berührungspunkt von $f_0 f_1$ und f_2 geht $U_{012} = 0$ ebenfalls berührend hindurch.

$E_{01201} = 0$ geht durch den Pol von g_0 nach f_1 und durch den Pol von g_1 nach f_2; es zerfällt, wenn g_0 und g_1 nach f_0 conjugirt sind.

An die Discussion unserer Bildungen für quadratische Formen schliesst sich eine solche für höhere Formen, doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

§ 8.

Die im Vorstehenden entwickelten Hilfsmittel sind natürlich einer mannigfachen Anwendung fähig auf geometrische Probleme, welche sich auf die Hesse'sche Curve beziehen. Es sei hier nur auf ein specielles Gebiet von Untersuchungen hingewiesen, welche eigentlich die Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung gegeben haben.

Durch die Zahl der in eine Curvensingularität fallenden Doppel-, Rückkehrpunkte, Doppel- und Wendetangenten ist bekanntlich auch die Zahl der Schnittpunkte der Curve mit der Hesse'schen Curve in diesem Punkt bestimmt. Nicht dasselbe gilt aber von dem Verlauf der Hesse'schen Curve und von der Natur ihrer Singularität in jenem Punkt. Eine projectivisch unzerstörbare Eigenthümlichkeit der Grundcurve in dem singulären Punkt kann nämlich zur Folge haben, dass in der Hesse'schen Curve eine total andere Singularität auftritt, während die Schnittpunktezahl beider Curven im singulären Punkt dieselbe bleibt. Zwei Beispiele sollen hiefür gegeben werden.

1) Wenn f_0 und f_1 zwei sich in Punkt A berührende Kegelschnitte, $g_0 = g_1 = g_2$ die Berührungstangente, g_3 eine beliebige Gerade durch A, so ist:

$$(92) \qquad W = f_0 f_1 + \lambda g_0 g_1 g_2 g_3 = 0$$

eine Curve mit Selbstberührungspunkt (Berührungsknoten, Salmon, An. Geom. der höhern eb. Curven, 2. Aufl., pag. 281 Nr. 1) in A und mit g_0 als Selbstberührungstangente. Die 2 Curvenzweige schneiden resp. f_0 und f_1 in 5 aufeinanderfolgenden Punkten. Eine nähere Unter-

suchung zeigt, dass $H(W)=0$ in der Nähe des Punkts A verwechselt werden darf mit $H(f_0 \cdot f_1)=0$ oder nach Formel (II):

$$(93) \quad \frac{1}{576}\{24 H_0 f_1^3 - 24 D_{01} f_1^2 f_0 - 24 D_{10} f_1 f_0^2 + 24 H_1 f_0^3 - 192 \Phi_{01} f_0 f_1\} = 0.$$

Weil Φ_0 die Curven f_0 und f_1 ebenfalls in A berührt (§ 1), so hat der letzte Term für sich gleich Null gesetzt in A einen dreifachen Punkt, genauer drei parabolische Zweige mit derselben Tangente.

Die 4 ersten Terme von (93):

$$(94) \quad \frac{1}{24}\mathsf{A} = \frac{1}{24}(H_0 f_1^3 - D_{01} f_0 f_1^2 - D_{10} f_0^2 f_1 + H_1 f_0^3) = 0$$

stellen ein Product von 3 Kegelschnitten des Büschels

$$\lambda f_0 + \mu f_1 = 0$$

dar; die Parameter derselben sind gegeben durch

$$\mathsf{B} = H_0 \lambda^3 + D_{01} \lambda^2 \mu - D_{10} \lambda \mu^2 - H \mu^3 = 0.$$

Unter den 3 durch die Gleichung

$$(95) \quad \Gamma = H_0 \lambda^3 + 3 D_{01} \lambda^2 \mu + 3 D_{10} \lambda \mu^2 + H_1 \mu^3 = 0$$

dargestellten Geradenpaaren des obigen Büschels ist ein doppeltzählendes, das Verbindungslinienpaar der beiden nicht in A fallenden Schnittpunkte von f_0 und f_1 mit A, welches also ein Geradenpaar mit Mittelpunkt A ist.

Aber wegen der Gleichung:

$$(96) \quad 3\mathsf{B} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda}\lambda - \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}\mu$$

befriedigt eine Doppelwurzel von $\Gamma = 0$ auch $\mathsf{B} = 0$ also unter den 3 Kegelschnitten (94) ist ein Geradenpaar mit Mittelpunkt A enthalten, alle zusammen haben also in A einen vierfachen Punkt. Die Hesse'sche Curve verhält sich also in A wie $f_0 \cdot f_1 \cdot \Phi_{01} = 0$ d. h.

In einem Selbstberührungspunkt hat die Hesse'sche Curve im Allgemeinen drei die Selbstberührungstangente berührende Zweige. Die Schnittpunktzahl mit der Grundcurve ist 12.

Zerfällt nun aber $\Phi_{01} = 0$, so muss es, da g_0 nicht ein Theil von $\Phi_{01} = 0$ sein kann, in ein Geradenpaar mit Mittelpunkt A übergehen; dann erhält aber die Hesse'sche Curve einen vierfachen Punkt, zwei Zweige berühren g_0 in A und zwei gehen einfach hindurch. Der Selbstberührungspunkt von $W=0$ besitzt jetzt aber eine leicht zu ermittelnde Eigenthümlichkeit.

Die Bedingung für das Zerfallen von $\Phi_{01} = 0$ war (§ 7)

$$(87) \quad H_0 H_1 - 9 D_{01} D_{10} = 0.$$

Nun ist aber, wie gezeigt werden kann, für zwei sich berührende

Kegelschnitte f_0 und f_1 das Verhältniss d der Krümmungen im Berührungspunkt gegeben durch:

(97) $$d^2 - \left\{\frac{9}{2}\,\frac{D_{01}D_{10}}{H_0 H_1} - \frac{5}{2}\right\} d + 1 = 0.$$

Mit Berücksichtigung von (87) ergiebt sich hieraus

$$d_1 = d_2 = -1.$$

Also berühren sich f_0 und f_1 mit gleicher und entgegengesetzter Krümmung.

Zwei solche Kegelschnitte haben aber noch eine merkwürdige Eigenschaft:

Die Verbindungslinie der zwei nicht in A fallenden Schnittpunkte geht durch den Schnittpunkt der zwei nicht mit g_0 zusammenfallenden gemeinsamen Tangenten.

Wie f_0 und f_1 berühren sich in Folge unserer Voraussetzungen auch die Zweige von $W = 0$ mit gleicher und entgegengesetzter Krümmung, also:

In einem Selbstberührungspunkt, in welchem die Krümmungen gleich und entgegengesetzt sind, hat die Hesse'sche Curve zwei berührende und zwei durchgehende Zweige. Die Schnittpunktzahl bleibt zwölf.

2) Wir gehen wieder von der Gleichung

(92) $$W = f_0 f_1 + \lambda g_0 g_1 g_2 g_3 = 0$$

aus, setzen aber nunmehr fest, dass $g_0\, g_1\, g_2\, g_3$ 4 Gerade durch denselben Punkt A, f_0 ein beliebiger Kegelschnitt $f_1 = g_4 \cdot g_5$ ein Geradenpaar sei, wovon g_4 durch A geht, g_5 aber nicht.

Alsdann hat $W = 0$ in A einen Undulationspunkt (Salmon, Höhere Curven pag. 285) mit g_4 als Undulationstangente.

Wenn wir mittelst der Formeln I—III die Hesse'sche Curve von W bilden, stellt sich heraus, dass alle Terme einzeln gleich Null gesetzt zweimal durch A gehen, mit Ausnahme der beiden folgenden:

$$-\frac{1}{24} Z f_0 f_1 = -\frac{1}{24}\left\{D_{10} f_0^2 f_1 + 8\Phi_{01} f_0 f_1\right\} = 0,$$

diese gehen einfach durch A und da f_1 Factor ist, ist g_4 Tangente:

In einem Undulationspunkt berührt die Hesse'sche Curve die Undulationstangente.

Ein Doppelpunkt in der Hesse'schen Curve entsteht nun, wenn

(98) $$Z = D_{10} f_0 + 8\Phi_{01} = 0$$

durch A geht, d. h. A in einen der Schnittpunkte von $Z = 0$ und $g_4 = 0$ fällt.

Die Auflösung des engern Products $f_1 = g_4 \cdot g_5$ giebt:

$$D_{10} = -\frac{1}{2} Q_{045}, \qquad \text{(nach Formel (51))}$$

$$\Phi_{01} = \frac{1}{8}\left(\Sigma_{04} g_5^2 + \Sigma_{05} g_4^2 - 2 P_{045} g_4 g_5\right). \quad \text{(nach Formel (53))}$$

Ist y der Schnittpunkt von g_4 und g_5, so ist

$$Q_{045} = \alpha_y^2$$

und wenn wir die Identität

$$(\alpha\beta u^{IV}) u_x^V = (\alpha\beta u^V) u_x^{IV} - \alpha_y\beta_x + \beta_y\alpha_x$$

quadriren, so geht schliesslich Z über in

$$Z = \frac{3}{2}\alpha_x^2\beta_y^2 - 2\alpha_x\alpha_y\beta_x\beta_y + \Omega\,.\,g_4. \tag{99}$$

Somit geht

$$Z_1 = 3\alpha_x^2\beta_y^2 - 4\alpha_x\alpha_y\beta_x\beta_y = 0 \tag{100}$$

durch die Schnittpunkte von $Z = 0$ und $g_4 = 0$.

Wenn wir nun auf allen Strahlen durch y die 2 Punkte aufsuchen, deren jeder zu y und den Schnittpunkten des Strahls mit f_0 äquianharmonisch liegt, so befinden sich alle diese Punktepaare auf einem Kegelschnitt und für dessen Gleichung finden wir keine andere als $Z_1 = 0$.

Von diesem Kegelschnitt ist also zu verlangen dass er durch y geht, wenn die Hesse'sche Curve daselbst einen Doppelpunkt haben soll.

Nach genauerer Untersuchung, die hier weggelassen werden soll, kommen wir zu folgenden Resultaten:

Wenn wir auf der Undulationstangente g_4 einer C_4 mit Undulationspunkt A einen Punkt y wählen, eine beliebige Gerade g_5 durch A ziehen, und deren Schnittpunkte mit der C_4 mit A verbinden, so werden durch die 4 Strahlen noch 8 Punkte auf der C_4 ausgeschnitten, durch welche ein Kegelschnitt f_0 geht. Die Schnittpunkte desselben mit g_4 sowie die Punkte A und y sind 4 Punkte, deren Doppelverhältniss von der Lage von y, nicht aber von der Richtung von g_5 abhängig ist. Es giebt aber specielle Curven, für welche dasselbe anharmonisch ist, wo auch der Punkt y auf g_4 gewählt werden mag, und bei diesen Curven hat die Hesse'sche Curve im Undulationspunkt einen Doppelpunkt.

Die Schnittpunktzahl der Hesse'schen und der Grundcurve ist im allgemeinen wie im speciellen Fall gleich zwei.

Aehnlichen Anomalien im Verhalten der Hesse'schen Curve begegnen wir bei dreifachen Selbstberührungspunkten, sowie bei Doppelspitzen (d. h. Punkten, in welchen zwei Spitzen mit derselben Tangente zusammenfallen). Hier wie auch in unserm ersten Beispiel sind es hauptsächlich Symmetriegründe, welche in letzter Linie zur Erklärung des abweichenden Verhaltens der Hesse'schen Curve beigezogen werden müssen.

Stuttgart, im Januar 1889.

Ein Satz aus der Topologie.

Von

V. Eberhard in Königsberg i./Pr.

I.

Untersuchungen betreffend die Theilung der p-dimensionalen Mannigfaltigkeit der p reellen unbeschränkt Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

durch n reelle lineare $p-1$-dimensionale Mannigfaltigkeiten

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p + c_1 = f_1(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p + c_n = f_n(x) = 0 \end{gathered}$$

in Gebiete verschiedener Vorzeichensysteme, wie solche für die Ebene und den Raum von Steiner*) begonnen und neuerdings von Roberts**) wieder aufgenommen sind, führten mich vor längerer Zeit auf eine gewisse Function der Anzahlen der Theilgebiete verschiedener Ausdehnungen, welche nicht nur allen möglichen Veränderungen der n theilenden Mannigfaltigkeiten, sondern auch allen Variationen der Zahlen n und p gegenüber einen invarianten Zahlenwerth beibehält. Ich fand nämlich, dass, wenn allgemein die Anzahl der Theilgebiete h^{ter} Dimension, d. i. die Anzahl derjenigen Gebiete des p-dimensionalen Raumes, deren Elemente x in genau je $p-h$ Mannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ liegen, mit φ_h bezeichnet wird, der Ausdruck

$$\varphi_p - \varphi_{p-1} + \varphi_{p-2} - \cdots \pm \varphi_0$$

allemal den Werth $+1$ besitzt, ein Resultat, das auch dann noch Gültigkeit behielt, wenn als Gebiet für die Theilung an die Stelle des unbeschränkten p-dimensionalen Raumes ein durch irgend m weitere Linearmannigfaltigkeiten abgegrenzter Theil desselben trat. Hiermit

*) Steiner: Die Theilung der Ebene und des Raumes, Crelle, Band 1.

**) Roberts: Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XIX, Nos. 330. 331.

war zwar nur eine Ausdehnung der Cauchy*)-Listing'schen Verallgemeinerung des Euler'schen Polyedersatzes auf Mannigfaltigkeiten von 4 und mehr Dimensionen gegeben. Indem ich aber weiter die n theilenden Linearmannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ durch solche höherer Ordnungen ersetzte, führte mich die analytische Fassung des Satzes dazu, als ein Theilgebiet in dem Systeme derselben jede Gesammtheit von Punkten des p-dimensionalen Raumes zu begreifen, denen bezüglich der n theilenden Mannigfaltigkeiten entsprechend gleiche Vorzeichensysteme zukommen, und dieser Auffassung gemäss nun auch hier den Ausdruck

$$\varphi_p - \varphi_{p-1} + \varphi_{p-2} - \cdots \pm \varphi_0$$

einer Analyse zu unterziehen.

Um der Untersuchung eine möglichst allgemeine, rein topologische Grundlage zu geben, definirte ich in dem Gebiete der p-reellen unbeschränkten Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

n-Mannigfaltigkeiten $p-1$-facher Ausdehnung von der Beschaffenheit, dass alle endlichen Verbindungslinien zweier beliebigen, aber festen Punkte a und b die nämliche Mannigfaltigkeit entweder in einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Punkten schneiden und setzte fest, dass ein veränderlicher Punkt x mit dem festen Punkt a als auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite einer beliebigen der n Mannigfaltigkeiten gelegen angesehen werden sollte, je nachdem die Strecke

$$a_1 + \vartheta(x_1 - a_1), \ldots, a_p + \vartheta(x_p - a_p)$$
$$0 \overline{\gtrless} \vartheta \overline{\gtrless} 1$$

der besagten Mannigfaltigkeit in einer geraden oder in einer ungeraden Anzahl von Punkten begegnet. Dadurch, dass weiter diese zwei Seiten der Mannigfaltigkeit als positive und negative unterschieden und für den Punkt a gegenüber jeder Mannigfaltigkeit festgesetzt wurde, auf welcher Seite er gelegen, erhielt auch jeder andere ausserhalb oder innerhalb der n Mannigfaltigkeiten liegende Punkt in Bezug auf dieselben ein ganz bestimmtes Vorzeichensystem. Die durch ein System von n solchen Mannigfaltigkeiten bedingte Eintheilung des ∞^p-fachen Raumes zeigte im Gegensatz zu der Listing'schen Eintheilung die charakteristische Eigenthümlichkeit, dass zwei Punkte y und z, denen betreffs jeder Mannigfaltigkeit das gleiche Vorzeichen zukam, doch nicht immer ausserhalb der n Mannigfaltigkeiten stetig in einander

*) Cauchy: Recherches sur les polyèdres. 2[de] partie. Journal de l'Ecole polytechnique, 16 Cahier. Paris 1813. — Listing: Census der räumlichen Complexe. Göttinger Abhandlungen. Band 10.

übergehen konnten, dass vielmehr Fälle möglich waren, wo jede stetige Verbindungslinie derselben mindestens eine Mannigfaltigkeit eine gerade Anzahl von Malen durchschnitt, wo also y und z zwar zu dem nämlichen Theilgebiet aber zu getrennten Bestandtheilen desselben gehörten.

Unter Ausschluss aller möglichen Grenzfälle, in denen ein h-dimensionales Theilgebiet oder auch nur irgend ein Bestandtheil eines solchen in mehr als $p-h$ der n theilenden Mannigfaltigkeiten zugleich enthalten ist, d. h. unter der Voraussetzung allgemeiner Lage der n Mannigfaltigkeiten gegen einander, fand ich nun folgenden Satz:

Theorem I: *Werden die n theilenden Mannigfaltigkeiten in eine bestimmte Reihenfolge gebracht:*

$$f_1(x_1,\ldots,x_p)=0,\ \ldots,\ f_n(x_1,\ldots,x_p)=0,$$

wird alsdann in dem Systeme der $n-k$ Mannigfaltigkeiten

$$f_{k+1}(x_1,\ldots,x_p)=0,\ \ldots,\ f_n(x_1,\ldots,x_p)=0$$

die Anzahl $\chi_{h,n-k}$ derjenigen mehrtheiligen h-dimensionalen Theilgebiete bestimmt, von deren getrennten Bestandtheilen ein Theil ganz in den Innenraum, ein Theil ganz in den Aussenraum der Fläche $f_k(x_1,\ldots,x_p)=0$ fallen und wird schliesslich aus den so bestimmten $p+1$ Werthen

$$\chi_{p,n-k},\ \chi_{p-1,n-k},\ \ldots,\ \chi_{0,n-k}$$

die Grösse gebildet

$$\chi_{p,n-k}-\chi_{p-1,n-k}+\cdots\pm\chi_{0,n-k}=X_{n-k},$$

so hat die Summe

$$X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1$$

ein von der ursprünglichen Anordnung der n Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ völlig unabhängigen Betrag, nämlich den Werth:

$$\varphi_p-\varphi_{p-1}+\cdots\pm\varphi_0-1.$$

Ich werde im Folgenden zunächst einen Beweis dieses Satzes geben, um alsdann die Theilung des p-dimensionalen Raumes durch Systeme von n linearen Mannigfaltigkeiten $p-1$-facher Ausdehnung ausführlicher zu behandeln.

II.

Es seien die gegebenen n Mannigfaltigkeiten $p-1$-facher Ausdehnung in einer beliebigen aber festen Reihenfolge aufgefasst:

$$f_1(x_1,\ldots,x_p)=0,\ \ldots,\ f_n(x_1,\ldots,x_p)=0.$$

Ein Theilgebiet in dem Systeme S_n derselben werde kurz charakterisirt durch das in Bezug auf sie seinen Elementen zugeordnete Vorzeichensystem

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,$$

wo allgemein ε_i die drei Bedeutungen $+$, $-$, 0 haben kann. Es werden nun die zu einem Systeme S_{n-1} vereinigten $n-1$ Mannigfaltigkeiten

$$f_2(x_1, \ldots, x_p) = 0, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

den p-dimensionalen Raum in resp.

$$\varphi_{p,\,n-1},\ \varphi_{p-1,\,n-1},\ \ldots,\ \varphi_{0,\,n-1}$$

durch ebensoviele verschiedene Vorzeichensysteme

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_n$$

charakterisirte Theilgebiete zerschneiden. Ein solches im allgemeinen aus mehr als einem Bestandtheile sich zusammensetzendes Theilgebiet von S_{n-1} wird der Mannigfaltigkeit $f_1(x_1, \ldots, x_p) = 0$ gegenüber nothwendig eine der folgenden drei Lagen einnehmen:

1) Entweder liegen alle Bestandtheile des Theilgebietes

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_n$$

auf derselben Seite der Mannigfaltigkeit.

2) Oder es liegen ein oder mehrere Bestandtheile zu beiden Seiten der Mannigfaltigkeit, d. h. das Theilgebiet wird von letzterer „durchschnitten“.

3) Oder es liegen einige Bestandtheile auf der einen, die übrigen auf der andern Seite von $f_1(x) = 0$.

Diesen drei Möglichkeiten entsprechend treten in dem Systeme S_n von den drei in Frage kommenden Vorzeichensystemen $+, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $-, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $0, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$

1) entweder nur das erste oder nur das zweite,

2) sowohl das erste als das zweite als das dritte,

3) das erste und das zweite, aber nicht das dritte auf.

Bezeichnet man die Anzahl der h-dimensionalen Theilgebiete erster Art mit $\varphi'_{h,n-1}$, die Anzahl der Gebiete zweiter mit $\psi_{h,n-1}$ und die Anzahl der Gebiete dritter mit $\chi_{h,n-1}$, so gilt die Beziehung:

$$(1) \qquad \varphi_{h,\,n-1} = \varphi'_{h,\,n-1} + \psi_{h,\,n-1} + \chi_{h,\,n-1}.$$

Durch die Einführung der Mannigfaltigkeit $f_1(x) = 0$ in den p-dimensionalen Raum wird die Anzahl $\varphi_{h,\,n-1}$ der vorhandenen h-dimensionalen Theilgebiete ausser um die Anzahlen $\psi_{h,\,n-1}$ und $\chi_{h,\,n-1}$ noch um die Anzahl $\psi_{h+1,\,n-1}$ der von der Mannigfaltigkeit $f_1(x) = 0$ zerschnittenen $h+1$-dimensionalen Theilgebiete des Systemes S_{n-1} vermehrt. Die Anzahl $\varphi_{h,n}$ der h-dimensionalen Theilgebiete im Systeme S_n bestimmt sich daher durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \varphi_{h,n} = \varphi_{h,\,n-1} + \psi_{h,\,n-1} + \chi_{h,\,n-1} + \psi_{h+1,\,n-1},$$
$$(h = p,\ p-1,\ \ldots,\ 1,\ 0)$$

wo jedoch $\psi_{p+1,\,n-1} = \psi_{0,\,n-1} = 0$ zu setzen ist.

Vermöge dieser $p+1$ Relationen geht der Ausdruck

(3) $$\varphi_{p,n} - \varphi_{p-1,n} + \cdots \pm \varphi_{0,n}$$

über in:

(4) $$\varphi_{p,n-1} - \varphi_{p-1,n-1} + \cdots \pm \varphi_{0,n-1} + \chi_{p,n-1} - \chi_{p-1,n-1} + \cdots \pm \chi_{0,n-1}.$$

Setzt man abkürzungsweise:

(5) $$\begin{aligned} \varphi_{p,n} - \varphi_{p-1,n} + \cdots \pm \varphi_{0,n} &= \Phi_n, \\ \varphi_{p,n-1} - \varphi_{p-1,n-1} + \cdots \pm \varphi_{0,n-1} &= \Phi_{n-1}, \\ \chi_{p,n-1} - \chi_{p-1,n-1} + \cdots \pm \chi_{0,n-1} &= \mathrm{X}_{n-1}, \end{aligned}$$

so hat man die Beziehung:

(6) $$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \mathrm{X}_{n-1}.$$

Indem man die an dem Systeme S_n soeben vollzogenen Ueberlegungen jetzt an dem System S_{n-1}, darauf an dem Systeme S_{n-2} und successive an allen folgenden ausführt, erhält man folgendes der ursprünglich festgesetzten Reihenfolge

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$$

eindeutig entsprechendes Gleichungensystem:

(7) $$\begin{aligned} \Phi_n &= \Phi_{n-1} + \mathrm{X}_{n-1}, \\ \Phi_{n-1} &= \Phi_{n-2} + \mathrm{X}_{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_2 &= \Phi_1 + \mathrm{X}_1. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt:

(8) $$\Phi_n = \Phi_1 + \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{X}_{n-h}.$$

Es ist aber:

$$\Phi_1 = \varphi_{p,1} - \varphi_{p-1,1} + \cdots \pm \varphi_{0,1}$$

und

$$\varphi_{p,1} = 2, \ \varphi_{p-1,1} = 1, \quad \varphi_{p-2,1} = \cdots = \varphi_{0,1} = 0..$$

Also folgt:

(9) $$\Phi_n = 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{X}_{n-h}. \quad \text{q. e. d.}$$

Der vorstehenden Betrachtung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die n theilenden Mannigfaltigkeiten sich gegeneinander in unabhängiger Lage befinden, d. h. dass in einem h-dimensionalen Theilgebiete sich genau $p-h$ und nicht mehr Mannigfaltigkeiten durchdringen. Um die Giltigkeit des abgeleiteten Satzes auch nach Aufhebung dieser Beschränkung aufrecht halten zu können, ist es nothwendig und hinreichend zwei durch verschiedene Vorzeichensysteme

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \quad \text{und} \quad \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$$

charakterisirte Gebiete dann als ein einziges Theilgebiet aufzufassen, wenn in den beiden Zeichenreihen mindestens $p - h$ Paare ε_i, ε_i' die Combination 0, 0 und kein weiteres Paar ε_k, ε_k' die Combinationen $+$, $-$, oder $-$, $+$ aufweist.

Alsdann bleibt nämlich die Relation

$$\varphi_{h,n} = \varphi_{h,n-1} + \psi_{h,n-1} + \chi_{h,n-1} + \psi_{h+1,n-1}$$

und demnach auch die übrigen aus derselben gezogenen Folgerungen bestehen.

III.

Eine besonders einfache Fassung gewinnt das Theorem in dem unter I. erwähnten Falle, wo der Theilung des p-dimensionalen Raumes ein System von n Linearmannigfaltigkeiten $p - 1$-facher Ausdehnung zu Grunde liegt. Da nämlich in einem derartigen Systeme sowohl bei allgemeiner wie bei gegenseitig abhängiger Lage der n Mannigfaltigkeiten verschiedene Vorzeichensysteme auch verschiedene Theilgebiete definiren, jedes der letzteren aber einen einzigen continuirlichen Raumtheil darstellt, so verschwinden sämmtliche Grössen χ und X. Man erhält daher den Satz:

Theorem 2. *Für jedes System von n den p-fach unendlichen Raum zerschneidenden Linearmannigfaltigkeiten*

$$f_i(x) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p + c_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

hat die Grösse

$$\varphi_p - \varphi_{p-1} + \cdots \pm \varphi_0$$

einen sowohl von der Dimension p des Raumes, als von der Anzahl n der theilenden Mannigfaltigkeiten, als endlich auch von deren gegenseitiger Lage völlig unabhängigen, invarianten Zahlenwerth, nämlich den Werth $+1$.

Sind die in einem gegebenen Systeme statthabenden singulären Lagenbeziehungen bekannt, so kann der Satz zur Berechnung der einzelnen Anzahlen φ_n dienen, da derselbe die für den p-dimensionalen Raum zu lösende Aufgabe auf n entsprechende des $p-1$-dimensionalen Raumes, jede dieser auf $n-1$ des $p-2$-dimensionalen Raumes u. s. w. zurückführt.

Um den allgemeinsten Fall zu betrachten, seien die n Mannigfaltigkeiten

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p + c_1 = f_1(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p + c_n = f_n(x) = 0$$

als linear unabhängig, die $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ Determinanten

$$\sum \pm a_{i_1 1} \ldots a_{i_p p}$$

also sämmtlich von 0 verschieden angenommen. Diese Voraussetzung schliesst die anderen in sich, dass auch die $n-1$ Mannigfaltigkeiten $p-2$-facher Ausdehnung, in welchen eine Mannigfaltigkeit $f_i(x)=0$ von den $n-1$ übrigen geschnitten wird und allgemeiner, überhaupt die $n-h$ Mannigfaltigkeiten $p-h-1$-facher Ausdehnung, in welchen das den h Mannigfaltigkeiten

$$f_{i_1}(x)=0, \ldots, f_{i_h}(x)=0$$

gemeinsame Gebiet $p-h^{\text{ter}}$ Dimension von den $n-h$ übrigen getroffen wird, linear unabhängig sind.

Nun ist bei stetiger Bewegung der n Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ ein Wechsel in den zugehörigen Vorzeichensystemen d. h. eine Aenderung in der Anzahl, in der Construction und in der gegenseitigen Lage der Theilgebiete nothwendig an die Kreuzung*) von $p+1$ Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ d. h. an deren Durchgang durch einen gemeinsamen Schnittpunkt gebunden. Gesetzt, es kreuzten sich bei entsprechend erfolgender Bewegung zuerst die $p+1$ Mannigfaltigkeiten

$$f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0, \ldots, f_{p+1}(x)=0,$$

und es gehöre zu dem kurz vor ihrem Eintritt in die singuläre Lage von ihnen begrenzten p-dimensionalen Theilgebiete bezw. zu einem Grenzgebiete desselben das Vorzeichensystem

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n,$$

so wird dem nach erfolgter Kreuzung neu entstandenen analogen Theilbezw. Grenzgebiete das andere Vorzeichensystem entsprechen

$$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_n,$$

während die übrigen Vorzeichensysteme ungeändert bleiben. Die Anzahl der Theilgebiete wird daher vor wie nach der Kreuzung die gleiche sein und nur für die singuläre Lage verändert, nämlich um $2^{p+1}-2$ Einheiten vermindert**) werden.

*) Als ein specieller Fall von Kreuzung ist der Durchgang des Schnittpunktes von p Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ durch das Unendliche zu betrachten, indem nämlich alle unendlich fernen Punkte x zu einer $n+1^{\text{ten}}$ $p-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gerechnet werden können.

**) Schneiden die Mannigfaltigkeiten $f_1(x)=0, \ldots, f_{p+1}(x)=0$ zu je p sich in den $p+1$ Punkten $a, b, c, \ldots, m$, so sind die Elemente x des von ihnen begrenzten (endlichen) p-dimensionalen Theilgebietes definirt durch

$$x_i = \vartheta_1 a_i + \vartheta_2 b_i + \cdots + \vartheta_{p+1} m_i, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_{p+1} = 1$$
$$(i=1, 2, \ldots, p)$$

wo $0 \overline{\gtrless} \vartheta_h \leqq 1$ ist. Für ein h-dimensionales Grenzgebiet verschwinden $p-h$ von den ϑ, während die übrigen wie vorher alle möglichen echten Brüche als

Wenn also ein allgemeines System

$$f_1(x)=0,\quad f_2(x)=0,\ \ldots,\ f_n(x)=0$$

in ein zweites allgemeines System

$$\bar{f}_1(x)=0,\quad \bar{f}_2(x)=0,\ \ldots,\ \bar{f}_n(x)=0$$

stetig übergeführt wird, indem etwa unter Festhaltung der n $(p-2)$-dimensionalen Durchschnitte

$$f_i(x)=0,\quad \bar{f}_i(x)=0$$

die Mannigfaltigkeiten des ersten Systemes durch Drehung um dieselben der Reihe nach in die entsprechenden Mannigfaltigkeiten des zweiten Systemes übergeführt werden, so wird das erste System durch eine ganz bestimmte Reihe von singulären Systemen des vorbeschriebenen Charakters aber ohne Aenderung der Anzahlen φ in das zweite übergehen.

Diese Betrachtungen zeigen, dass die Anzahl φ_p lediglich von den Zahlen p und n abhängt, und dass gesetzt werden kann

$$\varphi_p=\varphi(p,n).$$

Dann aber ergeben sich unmittelbar die weiteren Relationen

$$\varphi_{p-1}=\binom{n}{1}\varphi(p-1,\ n-1),\quad \varphi_{p-2}=\binom{n}{2}\varphi(p-2,\ n-2),\ldots$$
$$\ldots,\ \varphi_0=\binom{n}{p}\varphi(0,\ n-p),$$

und die Formel

$$\varphi_p-\varphi_{p-1}+\cdots\pm\varphi_0=1$$

geht über in die Recursionsformel

$$\varphi(p,n)-\binom{n}{1}\varphi(p-1,\ n-1)+\binom{n}{2}\varphi(p-2,\ n-2)-\cdots$$
$$\cdots\pm\binom{n}{p}\varphi(0,\ n-p)=1.$$

Für die Annahmen $p=0,1,2,3,\ldots$ ergiebt dieselbe successive:

$$\varphi(0,n)=1,\quad \varphi(1,n)=\binom{n+1}{1},\quad \varphi(2,n)=1+\binom{n+1}{2},$$
$$\varphi(3,n)=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{3}.$$

. . . .

Werthe annehmen können. Die Anzahl der h-dimensionalen Grenzgebiete beträgt daher $\binom{p+1}{h+1}$, und es ist die Gesammtzahl der Grenzgebiete des betrachteten Theilgebietes gegeben durch

$$\binom{p+1}{1}+\binom{p+1}{2}+\cdots+\binom{p+1}{p-1}+\binom{p+1}{p}=2^{p+1}-2,$$

und es ergiebt sich $2^{p+1}-2$ als die Anzahl der mit eintretender Kreuzung verschwindenden Gebiete.

Allgemein

1) bei geradem p:

$$\varphi(p, n) = 1 + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{p};$$

2) bei ungeradem p:

$$\varphi(p, n) = \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3} + \cdots + \binom{n+1}{p}.$$

Um zu entscheiden, wie viele von den $\varphi(p, n)$ p-dimensionalen Theilgebieten sich in's Unendliche erstrecken, genügt die Bemerkung, dass durch die Unterscheidung von $+\infty$ und $-\infty$ eine $(n+1)^{\text{te}}$, unendlich ferne Grenzmannigfaltigkeit definirt ist. Die Anzahl der unendlichen p-dimensionalen Gebiete ergiebt sich demnach

1) für ein gerades p:

$$\varphi_1(p, n) = 2\varphi(p-1,\ n-1) = 2\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{p-1}\right),$$

2) für ein ungerades p:

$$\varphi_1(p, n) = 2\varphi(p-1, n-1) = 2\left(1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{p-1}\right).$$

Auf analoge Weise sind auch die Anzahlen der in's Unendliche sich erstreckenden Theilgebiete niederer Dimensionen zu bestimmen.

IV.

Die Theilgebiete in dem Systeme von $n \gtreqless p+1$ linearen Mannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ sind die Analoga der gewöhnlichen convexen Polyeder. Für die letzteren gilt bekanntlich die Euler'sche Relation:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_0 = 2,$$

wo φ_2 die Anzahl f der Seitenflächen, φ_1 die Anzahl k der Kanten und φ_0 die Anzahl e der Ecken eines solchen Gebildes bezeichnet. Es liegt die Frage nahe, ob allgemein für ein entsprechendes p-dimensionales Polyeder der Ausdruck

$$\varphi_{p-1} - \varphi_{p-2} + \varphi_{p-3} - \cdots \pm \varphi_0$$

gleichfalls einen von der Anzahl und der Lage der Grenzflächen $f_i(x) = 0$ unabhängigen Werth besitzt. Hierbei reicht es hin, die Betrachtung auf endliche Polyeder zu beschränken, da ein aus zwei, im Endlichen getrennten, im Unendlichen zusammenhängenden Theilgebieten (Gebieten entgegengesetzter Vorzeichensysteme) bestehendes Polyeder durch eine entsprechende lineare Transformation leicht in ein endliches Polyeder übergeführt werden kann.

Gesetzt, $R_{p,n}$ sei ein von allen n Mannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ irgendwie begrenzter Körper, und zwar bezeichne allgemein φ_h die

Anzahl seiner Grenzgebiete R_h der h^{ten} Dimension. Als blosses Theilgebiet in dem Systeme seiner n Grenzmannigfaltigkeiten aufgefasst, wird er durch das in der Mannigfaltigkeit $f_n(x) = 0$ gelegene Grenzgebiet $R_{p-1,m-1}$ von einem zweiten Theilgebiet $R'_{p,m}$ getrennt, wo m mindestens gleich $p+1$ und höchstens gleich n ist. Beide Polyeder bestimmen zusammen ein drittes von den $n-1$ Mannigfaltigkeiten

$$f_1(x) = 0,\quad f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_{n-1}(x) = 0$$

begrenztes Polyeder $R''_{p,n-1}$.

Es mögen nun bezeichnen:

(1) $$\varphi'_{p-1},\ \varphi'_{p-2},\ \ldots,\ \varphi_1',\ \varphi_0'$$

die respectiven Anzahlen der Grenzgebiete von $R'_{p,m}$,

(2) $$\varphi''_{p-1},\ \varphi''_{p-2},\ \ldots,\ \varphi_1'',\ \varphi_0''$$

die respectiven Anzahlen der Grenzgebiete von $R''_{p,n-1}$,

(3) $$\psi_{p-2},\ \psi_{p-3},\ \ldots,\ \psi_1,\ \psi_0$$

die respectiven Anzahlen der Grenzgebiete von $R_{p-1,m-1}$,

(4) $$\psi''_{p-1},\ \psi''_{p-2},\ \ldots,\ \psi_1''$$

die respectiven Anzahlen derjenigen Grenzgebiete von $R''_{p,n-1}$, welche durch die bezüglichen Grenzgebiete von $R_{p-1,m-1}$ in je ein Grenzgebiet von $R_{p,n}$ und eines von $R'_{p,m}$ zerschnitten werden und

(5) $$\psi'_{p-2},\ \psi'_{p-3},\ \ldots,\ \psi_0'$$

die respectiven Anzahlen dieser zerstückenden Grenzgebiete von $R_{p-1,m-1}$, sodass allgemein $\psi''_{h+1} = \psi_h'$ gilt.

Es besteht dann offenbar die Beziehung

$$\varphi_h + \varphi_h' = \varphi_h'' + \psi_h'' + \psi_h + \psi_h',$$

wenn $h \leqq p-2$ ist, und

$$\varphi_{p-1} + \varphi'_{p-1} = 2 + \psi''_{p-1} + \varphi''_{p-1},$$

wenn $h = p-1$ ist. Es ist daher

$$\sum_{h=1}^{p} \pm \varphi_{p-h} = \sum_{h=1}^{p} \pm (\varphi''_{p-h} - \varphi'_{p-h}) + \sum_{h=1}^{p-1} \pm (\psi''_{p-h} - \psi'_{p-h-1})$$
$$- \sum_{h=1}^{p-1} \pm \psi_{p-h-1} + 2,$$

wo innerhalb der 4 Summen das obere oder das untere Vorzeichen Geltung hat, je nachdem h eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Da aber $\sum_{h=1}^{p-1} \pm (\psi''_{p-h} - \psi'_{p-h-1}) = 0$ ist, so folgt

$$\sum_{h=1}^{p} \pm \varphi_{p-h} + \sum_{h=1}^{p} \pm \varphi'_{p-h} = 2 + \sum_{h=1}^{p} \pm \varphi''_{p-h} - \sum_{h=1}^{p-1} \pm \psi_{p-h-1}.$$

Angenommen jetzt, es sei für alle Polyeder R_{p_1, n_1}, bei denen $p_1 \leqq p$ und $n_1 < n$ ist, bereits bewiesen, dass der Ausdruck

$$\varphi_{p_1-1} - \varphi_{p_1-2} + \cdots \pm \varphi_0$$

1) bei geradem p_1 den Werth 0,

2) bei ungeradem p_1 den Werth 2 hat,

dass also im Besonderen

1) bei geradem p:

$$\sum_{h=1}^{p} \pm \varphi'_{p-h} = \sum_{h=1}^{p} \pm \varphi''_{p-h} = 0, \quad \sum_{h=1}^{p-1} \pm \psi_{p-h-1} = 2,$$

2) bei ungeradem p:

$$\sum_{h=1}^{p} \pm \varphi'_{p-h} = \sum_{h=1}^{p} \pm \varphi''_{p-h} = 2, \quad \sum_{h=1}^{p-1} \pm \psi_{p-h-1} = 0,$$

so folgt aus der vorstehenden Formel, dass der Ausdruck

$$\varphi_{p-1} - \varphi_{p-2} + \cdots \pm \varphi_0$$

gleichfalls entweder den Werth 0 oder den Werth 2 ergiebt, je nachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Nun gilt in der That im eindimensionalen Gebiete für jede Strecke:

$$\varphi_0 = 2,$$

und im zweidimensionalen Gebiete für ein convexes Polygon:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 0.$$

Demgemäss resultirt folgende Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes:

Theorem 3.*) *In einem durch Linearmannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ bestimmten p-dimensionalen Polyeder ergiebt die Anzahl der Grenzgebiete unpaarer Dimension vermindert um die Anzahl der Grenzgebiete paarer Dimension den Werth 0 oder den Werth 2, je nachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.*

V.

In dem allgemeinen Falle, bei welchem die n Grenzmannigfaltigkeiten $f_i(x) = 0$ des betrachteten Polyeders $R_{p,n}$ ausser linearer Dependenz stehen, gestattet die Relation

---

*) In etwas anderer Fassung findet sich der Satz bei Stringham: Regular Figures in n-dimensional Space. American Journal of Mathematics, Band 3. — Vgl. auch: Biermann: Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension. Wiener Berichte. Band XC. 1884. — Hoppe: Grunert's Archiv, Band 67. — Schlegel: Nova acta der kais. Leop. Carol. Deutschen Academie der Naturforscher. Band 44.

(1) $$\varphi_h + \varphi_h' = \varphi_h'' + \psi_h'' + \psi_h + \psi_h'$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$$

eine zweite bemerkenswerthe Anwendung, nämlich die Berechnung der Zahl φ_h selbst.

Zufolge der gemachten Voraussetzung ist zunächst

$$\psi_h = \psi_h' = \psi_{h+1}'',$$

und die obige Relation geht über in

(2) $$\varphi_h + \varphi_h' = \varphi_h'' + 2\psi_h + \psi_{h-1}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p-2)$$

und für $h = 0$ in

(2a) $$\varphi_0 + \varphi_0' = \varphi_0'' + 2\psi_0.$$

Es gilt daher auch

(3) $$\varphi_h - \varphi_h'' = 2\psi_h + \psi_{h-1} - \varphi_h'.$$

Unter der Annahme, es sei bereits bewiesen, dass alle diejenigen Polyeder R_{p_1, n_1}, $(p_1 \leqq p,\ n_1 < n)$, deren Grenzmannigfaltigkeiten linear unabhängig sind, die gleiche Zahl $\chi(p_1, n_1, h)$ von h-dimensionalen Grenzgebieten besitzen, und dass sonach die rechte Seite der Gleichung (2), nämlich der Ausdruck

$$2\psi_h + \psi_{h-1} - \varphi_h' \equiv 2\chi(p-1, m-1, h) + \chi(p-2, m-1, h-1), \\ - \chi(p, m, h)$$

einen von der Zahl n unabhängigen Werth hat, folgt aus der Gleichung (2), dass auch die Differenz

$$\varphi_h - \varphi_h'' \equiv \chi(p, n, h) - \chi(p, n-1, h)$$

für alle möglichen n stets ein und denselben Werth ergiebt, dass also auch gilt

(4) $$\chi(p, n, h) - \chi(p, n-1, h) = \chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h).$$

Es besteht dann die Gleichungenkette:

$$\begin{aligned}
\chi(p, n, h) \quad - \chi(p, n-1, h) &= \chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h),\\
\chi(p, n-1, h) - \chi(p, n-2, h) &= \chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
\chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h) \quad &= \chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h),
\end{aligned}$$

und diese ergiebt

(5) $$\chi(p, n, h) = \chi(p, p, h) + (n-p)\big(\chi(p, p+1, h) - \chi(p, p, h)\big)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p-2).$$

Die Zahlen $\chi(p, p, h)$ und $\chi(p, p+1, h)$ sind aber leicht zu bestimmen, nämlich es ist:

$$\chi(p, p, h) = \frac{p!}{h!\,(p-h)!}, \quad \chi(p, p+1, h) = \frac{p!}{h!\,(p-h)!} + \frac{p!}{(h+1)!\,(p-h-1)!}.$$

Aus denselben berechnen sich mittelst der stets gültigen Relation (2) successive und zwar eindeutig alle Anzahlen $\chi(p_1, n_1, h)$. Demnach ist auch die Gleichung (5) richtig, und es resultirt

$$(6)\qquad \chi(p, n, h) = \frac{p!}{h!\,(p-h)!} + (n-p)\,\frac{p!}{(h+1)!\,(p-h-1)!}.$$

Also gilt der Satz:

Theorem IV. *In allen durch n linear unabhängige $p-1$-dimensionale Linearmannigfaltigkeiten begrenzten p-dimensionalen Polyedern sind die Anzahlen der h-dimensionalen Grenzgebiete constant und zwar gegeben durch*

$$\chi(p, n, h) = \frac{p!}{h!\,(p-h)!} + (n-p)\,\frac{p!}{(h+1)!\,(p-h-1)!}$$
$$- h = 1, 2, \ldots, p-2 -.$$

Um noch die Anzahl $\chi(p, n, 0)$ der Grenzecken eines allgemeinen Polyeders $R_{p,n}$ zu berechnen, dient die Relation

$$(2a)\qquad \varphi_0 - \varphi_0'' = 2\psi_0 - \varphi_0',$$

die unter Benutzung des Zeichens χ die Gestalt annimmt

$$\chi(p, n, 0) - \chi(p, n-1, 0) = 2\chi(p-1, m-1, 0) - \chi(p, m, 0).$$

Den früheren durchaus analoge Schlüsse ergeben hieraus

$$(3a)\qquad \chi(p, n, 0) - \chi(p, n-1, 0) = 2\chi(p-1, p, 0) - \chi(p, p+1, 0)$$
$$= 2p - (p+1) = p-1$$

und schliesslich

$$(4a)\qquad \chi(p, n, 0) = p + 1 + (n-p-1)(p-1).$$

Im Besonderen folgt für den Raum von 3 Dimensionen:

Ein von n Ebenen in allgemeiner Lage begrenztes Polyeder besitzt allemal $3n-6$ Kanten und $2n-4$ Ecken.

Königsberg, im April 1889.

Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

Zweiter Theil.

Simultane Covarianten zweier cubischer Formen.

§ 1.

Dem Aronhold'schen Process δ, mit dessen Hilfe eine besondere Art von Covarianten der Form sechster Ordnung $f(x)$ gekennzeichnet wurde, kann man, wie schon in der Einleitung angeführt wurde, unter gewissen Umständen auch, wenn man $f(x)$ in zwei cubische Factoren:

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \bar{a}_i x_1^i x_2^{3-i}, \quad \psi(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \bar{\alpha}_i x_1^i x_2^{3-i}$$

zerlegt, die Form geben:

$$\delta = \sum_{i=0}^{3} G_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} + \sum_{i=0}^{3} \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_i}, \tag{1}$$

wobei

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{i}{3} G_i x_1^i x_2^{3-i} = G(x), \quad \sum_{i=0}^{3} \binom{i}{3} \Gamma_i x_1^i x_2^{3-i} = \Gamma(x)$$

simultane Covarianten von φ und ψ sind. Verwandelt man zugleich die neun Covarianten von f, durch welche sich die sämmtlichen Covarianten dieser besondern Art ausdrücken lassen, in simultane Covarianten von φ und ψ, so muss nothwendig das analoge stattfinden: man muss simultane Covarianten bekommen, die sich aus diesen so erhaltenen neun Covarianten rational zusammensetzen lassen, wenn man an einer derselben die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ mit Hilfe der Form (1) des Aronhold'schen Processes ausführt. Es wird also auch durch diesen

Aronhold'schen Process (1) eine besondere Art von simultanen Covarianten gekennzeichnet. Aber bei näherer Untersuchung zeigt es sich, dass diese neun Covarianten nicht das fundamentalste derartige System bilden, sondern dass sich dieselben durch neun einfachere Covarianten ausdrücken lassen, die schon für sich diese Eigenschaft besitzen, und ferner, dass der Ausdruck (4) in der Einleitung nicht die einzige derartige Function ist, welche für $G(x)$ und $\Gamma(x)$ zu dem Aronhold'schen Process benutzt werden kann. Ich werde vielmehr zeigen, dass *die neun Covarianten*

$$
\begin{array}{lll}
 & (\varphi,\psi)_\lambda, & \lambda = 0, 1, 2, 3, \\
(2) & (\nabla, \Delta)_\mu, & \mu = 0, 1, 2, \\
 & (p, \pi)_\nu, & \nu = 0, 1
\end{array}
$$

der Art eine Gruppe bilden, dass man immer wieder ein Aggregat derselben erhält, wenn man an einer von ihnen die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ *ausführt und dabei zu dem Aronhold'schen Process Functionen* $G(x)$ *und* $\Gamma(x)$ *nimmt, welche* v_1, v_2 *in der zweiten Dimension enthalten, und von denen die erstere,* $G(x)$, *bezüglich der Coefficienten* $\bar{a}_i$ *von* $\varphi(x)$ *von dem zweiten, bezüglich der Coefficienten* $\bar{\alpha}_i$ *von* $\psi(x)$ *von dem ersten Grade, und* $\Gamma(x)$ *aus* $G(x)$ *durch gegenseitige Vertauschung der* $\bar{a}_i$ *und* $\bar{\alpha}_i$ *entsteht.* —

Den Beweis könnte ich ebenso wie den analogen in § 1 des ersten Theils führen. Nur ginge hier die Betrachtung nicht so glatt von statten; denn wenn ich durch Abzählen des Grades und der Ordnung die allgemeinste Form des Ausdruckes, den ich durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ aus einer der obigen neun Covarianten erhalte, bestimmt habe, so werden sich in demselben ausser jenen neun Covarianten noch weitere Covarianten vorfinden, und ich muss zeigen, dass sich dieselben unter Benutzung der Eigenschaft der Ausdrücke, symmetrische oder alternirende Functionen der $\bar{a}_i$ und $\bar{\alpha}_i$ zu sein, mit Hilfe der Syzyganten entfernen lassen. Dadurch wird die Betrachtung weit umfangreicher, und da sie ausserdem noch überflüssig wird, wenn ich für die verschiedenen Functionen, die ich an Stelle von $G(x)$ und $\Gamma(x)$ nehmen kann, die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ thatsächlich ausführe, so ziehe ich vor, sie zu unterlassen.

§ 2.

Die Function $G(x)$ soll nach der Voraussetzung vom ersten Grade in den Coefficienten $\bar{\alpha}_i$, vom zweiten in den Coefficienten $\bar{a}_i$ und von der zweiten Ordnung bezüglich der Variablen v_1, v_2, von der dritten bezüglich der Variablen x_1, x_2 sein. Sie muss daher, wie man aus

der Tabelle des vollständigen Formensystems zweier simultaner cubischer Formen ersieht, wenn

$$\varphi(x) = a_x^3 = b_x^3 = \cdots,$$
$$\psi(x) = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots$$

bezeichnet wird, eine lineare Function der Covarianten*)

$$(1)\quad \begin{array}{c} \Theta_v^2 a_x^3,\ \ \Theta_v\Theta_x a_v a_x^2,\ \ \Theta_x^2 a_v^2 a_x,\ \ \Delta_v^2 \alpha_x^2,\ \ \Delta_v\Delta_x \alpha_v \alpha_x^2,\\ \Delta_x^2 \alpha_v^2 \alpha_x,\ \ J a_v a_x^2 (xv),\ \ \zeta_v \zeta_x^2 (xv),\ \ p_x (xv)^2 \end{array}$$

sein. Diese neun Covarianten sind nun nicht linear unabhängig. Denn, wenn ich mit D die Polarenbildung unter Einführung von v_1, v_2 bezeichne, so liefert die Clebsch-Gordan'sche Entwicklung nach Polaren die beiden Gleichungssysteme:

$$(2)\quad \begin{aligned} \Delta_v^2 \alpha_x^3 &= D^2 \Delta \psi + \tfrac{6}{5}\, \zeta_v \zeta_x^2 (xv) + \tfrac{1}{2}\, p_x (xv)^2,\\ \Delta_v \Delta_x \alpha_v \alpha_x^2 &= D^2 \Delta \psi + \tfrac{1}{5}\, \zeta_v \zeta_x^2 (xv) - \tfrac{1}{6}\, p_x (xv)^2,\\ \Delta_x^2 \alpha_v^2 \alpha_x &= D^2 \Delta \psi - \tfrac{4}{5}\, \zeta_v \zeta_x^2 (xv) + \tfrac{1}{6}\, p_x (xv)^2 \end{aligned}$$

und, da

$$(\varphi, \Theta)_1 = \zeta + \tfrac{1}{2} J \varphi, \quad (\varphi, \Theta)_2 = - \tfrac{1}{2} p$$

(Gall, S. 427) ist:

$$(3)\quad \begin{aligned} \Theta_v^2 a_x^3 &= D^2 \Theta \varphi + \tfrac{3}{5}\, (2\zeta_v \zeta_x^2 + J a_v a_x^2)(xv) - \tfrac{1}{4}\, p_x (xv)^2,\\ \Theta_v \Theta_x a_v a_x^2 &= D^2 \Theta \varphi + \tfrac{1}{10} (2\zeta_v \zeta_x^2 + J a_v a_x^2)(xv) + \tfrac{1}{12}\, p_x (xv)^2,\\ \Theta_x^2 a_v^2 a_x &= D^2 \Theta \varphi - \tfrac{2}{5}\, (2\zeta_v \zeta_x^2 + J a_v a_x^2)(xv) - \tfrac{1}{12}\, p_x (xv)^2. \end{aligned}$$

Zu Folge dieser Gleichungen werden vier von den neun Covarianten (1) lineare Functionen der fünf übrigen. Für diese fünf Covarianten, durch welche die übrigen ausgedrückt werden sollen, will ich theils der Gleichförmigkeit halber, theils mit Rücksicht auf die leichtere Ausführung der Operation δ die Functionen

$$(4)\quad \Theta_v^2 a_x^3,\ \ \Theta_v \Theta_x a_v a_x^2,\ \ \Theta_x^2 a_v^2 a_x,\ \ \Delta_v^2 \alpha_x^3,\ \ J a_v a_x^2 (xv)$$

nehmen. Die Darstellung der übrigen durch diese ist, wie sich aus den Gleichungssystemen (2) und (3) ergiebt, die folgende:

*) Was die Definitionen und Bezeichnungen anbelangt, so schliesse ich mich an den Aufsatz von Frhrn. v. Gall, Math. Annalen Bd. XXXI, S. 424, „Die irreducibeln Syzyganten zweier cubischer Formen" an, nur schreibe ich φ statt f, ψ statt φ. Im Folgenden werde ich öfters nothwendig haben, Formeln daraus anzuführen, und ich will dies in der Weise thun, dass ich einfach den Namen „Gall" und die Seitenzahl eingeklammert beifüge.

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
\Delta_v \Delta_x \alpha_v \alpha_x^2 &= \Theta_v^2 a_x^3 - 3\Theta_v \Theta_x a_v a_x^2 + 2\Theta_x^2 a_v^2 a_x + \Delta_v^2 \alpha_x^3 \\
&\qquad + \frac{1}{2} J a_v a_x^2 (xv), \\
\Delta_x^2 \alpha_v^2 \alpha_x &= -2\Theta_v \Theta_x a_v a_x^2 + 2\Theta_x^2 a_v^2 a_x + \Delta_v^2 \alpha_x^3 + J a_v a_x^2 (xv), \\
\zeta_v \zeta_x^2 (xv) &= \frac{1}{3}\Theta_v^2 a_x^3 + \frac{1}{3}\Theta_v \Theta_x a_v a_x^2 - \frac{2}{3}\Theta_x^2 a_v^2 a_x \\
&\qquad - \frac{1}{2} J a_v a_x^2 (xv), \\
p_x (xv)^2 &= -2\Theta_v^2 a_x^3 + 4\Theta_v \Theta_x a_v a_x^2 - 2\Theta_x^2 a_v^2 a_x . -
\end{aligned}
$$

Es muss sich demnach die Function $G(x)$, da ihr allgemeinster Ausdruck eine lineare Function der neun Covarianten (1) ist, auch linear durch diese fünf Covarianten (4) darstellen lassen. Daraus folgt, da

$$\sum_{i=0}^{3} G_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} = \sum_{\varkappa} \sum_{i=0}^{3} G_i^{(\varkappa)} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i}$$

ist, wenn

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} G_i x_1^i x_2^{3-i} = \sum_{\varkappa} \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} G_i^{(\varkappa)} x_1^i x_2^{3-i},$$

dass die allgemeinste Form der Operation

$$\delta = \sum_{i=0}^{3} G_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} + \sum_{i=0}^{3} \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_i}$$

sich linear aus denjenigen Operationen δ zusammensetzen lässt, in welchen für die Function $G(x)$ diese fünf Covarianten (4) und selbstverständlich für Γ die entsprechenden Covarianten genommen werden, und dass daher die in § 1 behauptete Thatsache allgemein bewiesen ist, sobald man nur den Beweis für diese fünf speciellen Functionen geliefert hat. Dies soll in den nächsten fünf Paragraphen geschehen.

§ 3.

Um zu bezeichnen, dass die Operation δ, bez. $\underset{v=u}{\delta}$ mit den Covarianten

$$G(x) = \Theta_v^2 a_x^3, \quad \Gamma(x) = \Theta_v^2 \alpha_x^3$$

ausgeführt werden soll, will ich dem δ den Index 1 anfügen. Den Aronhold'schen Process zerspalte ich jetzt in der Weise, dass ich diejenigen Terme, in welchen die Differentiation nach den $\bar{a}_i$ erfolgt, in $\Theta_v^2 \delta_1'$, diejenigen, in denen nach den $\bar{\alpha}_i$ differentiirt wird, in $\Theta_v^2 \delta_1''$ zusammenfasse der Art, dass

$$\delta_1 = \Theta_v^2 (\delta_1' + \delta_1'').$$

Dann ist

$$\delta_1' \varphi = \varphi, \qquad \delta_1' \psi = 0,$$
$$\delta_1'' \varphi = 0, \qquad \delta_1'' \psi = \psi,$$

und demgemäss, wenn F eine Covariante vom Grade v_1 in den Coefficienten $\bar{a}_i$ von $\varphi(x)$ und dem Grade v_2 in den Coefficienten $\bar{\alpha}_i$ von $\psi(x)$ bedeutet:

$$\delta_1' F = v_1 F, \qquad \delta_1'' F = v_2 F.$$

Daraus geht hervor, dass

$$\delta_1 F = (v_1 + v_2) \Theta_v^2 F.$$

Bei Anwendung dieser Formel ergiebt sich nun, wenn ich zugleich noch von dem Aronhold'schen Process, indem ich $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ werden lasse, zu der Operation $\underset{v=u}{\delta_1}$ übergehe, und der Gleichmässigkeit halber $(\varphi, \psi)_2$ statt $\Theta_u^2 = \Theta$ schreibe, das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \underset{v=u}{\delta_1} (\varphi, \psi)_\lambda = 2(\varphi, \psi)_2 (\varphi, \psi)_\lambda, & \lambda = 0, 1, 2, 3, \\ \underset{v=u}{\delta_1} (\nabla, \Delta)_\mu = 4(\varphi, \psi)_2 (\nabla, \Delta)_\mu, & \mu = 0, 1, 2, \\ \underset{v=u}{\delta_1} (p, \pi)_\nu = 6(\varphi, \psi)_2 (p, \pi)_\nu, & \nu = 0, 1, \end{cases}$$

welches die in § 1 ausgesprochene Behauptung für die Operation $\underset{v=u}{\delta_1}$ beweist.

§ 4.

Fast eben so einfach gestaltet sich die Betrachtung, wenn

$$G(x) = \Theta_v \Theta_x a_v a_x^2, \qquad \Gamma(x) = \Theta_v \Theta_x \alpha_v \alpha_x^2$$

ist. Denn da

$$\Theta_v \Theta_x a_v a_x^2$$
$$= \Theta_v (\Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2) \left(v_1 \sum_\varkappa \binom{2}{\varkappa} \bar{a}_{\varkappa+1} x_1^\varkappa x_2^{2-\varkappa} + v_2 \sum_\varkappa \binom{2}{\varkappa} \bar{a}_\varkappa x_1^\varkappa x_2^{2-\varkappa} \right),$$

(wo der Summationsbuchstabe $\varkappa$, ebenso wie in den folgenden Gleichungen dieses Paragraphen, die Werthe 0, 1, 2 zu durchlaufen hat,) so ist der Aronhold'sche Process, den ich zum Unterschied mit δ_2 bezeichnen will, der folgende:

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad \delta_2 = \tfrac{1}{3} \Theta_v \Big\{ & \Theta_1 v_1 \Big(\sum_\varkappa (\varkappa+1) \bar{a}_{\varkappa+1} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_{\varkappa+1}} + \sum_\varkappa (\varkappa+1) \bar{\alpha}_{\varkappa+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\varkappa+1}} \Big) \\ & + \Theta_1 v_2 \Big(\sum_\varkappa (\varkappa+1) \bar{a}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \bar{a}_{\varkappa+1}} + \sum_\varkappa (\varkappa+1) \bar{\alpha}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\varkappa+1}} \Big) \\ & + \Theta_2 v_1 \Big(\sum_\varkappa (3-\varkappa) \bar{a}_{\varkappa+1} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_\varkappa} + \sum_\varkappa (3-\varkappa) \bar{\alpha}_{\varkappa+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_\varkappa} \Big) \\ & + \Theta_2 v_2 \Big(\sum_\varkappa (3-\varkappa) \bar{a}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \bar{a}_\varkappa} + \sum_\varkappa (3-\varkappa) \bar{\alpha}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_\varkappa} \Big) \Big\}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich aber auf Grund der partiellen Differentialgleichungen, denen die Covarianten genügen. Wenn F irgend eine Covariante von der Ordnung n und dem Grade ν_1, bez. ν_2 bezüglich der Coefficienten $\bar{a}_i$, bez. $\bar{\alpha}_i$ bedeutet, so sind dieselben bekanntlich:

$$\sum_\varkappa (\varkappa+1)\bar{a}_{\varkappa+1}\frac{\partial F}{\partial \bar{a}_{\varkappa+1}} + \sum_\varkappa (\varkappa+1)\bar{\alpha}_{\varkappa+1}\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}_{\varkappa+1}} = u_1\frac{\partial F}{\partial u_1} + \varrho F,$$

$$\sum_\varkappa (3-\varkappa)\bar{a}_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \bar{a}_\varkappa} + \sum_\varkappa (3-\varkappa)\bar{\alpha}_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}_\varkappa} = u_2\frac{\partial F}{\partial u_2} + \varrho F,$$

$$\sum_\varkappa (\varkappa+1)\bar{a}_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \bar{a}_{\varkappa+1}} + \sum_\varkappa (\varkappa+1)\bar{\alpha}_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}_{\varkappa+1}} = u_1\frac{\partial F}{\partial u_2},$$

$$\sum_\varkappa (3-\varkappa)\bar{a}_{\varkappa+1}\frac{\partial F}{\partial \bar{a}_\varkappa} + \sum_\varkappa (3-\varkappa)\bar{\alpha}_{\varkappa+1}\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}_\varkappa} = u_2\frac{\partial F}{\partial u_1},$$

wo ϱ die Abkürzung für

$$\varrho = \frac{1}{2}(3\nu_1 + 3\nu_2 - n).$$

Demgemäss nimmt der aus (1) resultirende Ausdruck von $\delta_2 F$ die Form an:

$$\delta_2 F = \frac{1}{3}\varrho\Theta_v^2 F + \frac{1}{3}\Theta_v\Theta_u\left(v_1\frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2\frac{\partial F}{\partial u_2}\right).$$

Hieraus erhalte ich, wenn ich von dem Aronhold'schen Process zu der Operation $\underset{v=u}{\delta_1}$ übergehe, da

$$u_1\frac{\partial F}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial F}{\partial u_2} = nF$$

ist:

$$\underset{v=u}{\delta_2} F = \frac{1}{6}(3\nu_1 + 3\nu_2 + n)\Theta F.$$

Indem ich diese Formel auf die betreffenden Covarianten anwende, ergeben sich die Gleichungen

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \underset{v=u}{\delta_2}(\varphi,\psi)_\lambda = \frac{1}{3}(6-\lambda)(\varphi,\psi)_2(\varphi,\psi)_\lambda, & \lambda = 0, 1, 2, 3, \\ \underset{v=u}{\delta_2}(\nabla,\Delta)_\mu = \frac{1}{3}(8-\mu)(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_\mu, & \mu = 0, 1, 2, \\ \underset{v=u}{\delta_2}(p,\pi)_\nu = \frac{1}{3}(10-\nu)(\varphi,\psi)_2(p,\pi)_\nu, & \nu = 0, 1, \end{cases}$$

welche zeigen, dass auch die Operation $\underset{v=u}{\delta_2}$ an diesen neun Covarianten ausgeführt, nur Aggregate dieser Covarianten liefert.

§ 5.

Ungleich schwieriger wird die Bestimmung der Ausdrücke, welche durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ aus jenen neun Covarianten entstehen, wenn man dabei

(1) $$G(x) = \Theta_x^2 a_v^2 a_x, \quad \Gamma(x) = \Theta_x^2 \alpha_v^2 \alpha_x$$

angenommen hat. Es wird hier von Vortheil sein, dass man den zu dieser Bestimmung nothwendigen Aronhold'schen Process und die dazu gehörige Rechnung nicht direct bezüglich dieser Functionen (1), sondern vielmehr bezüglich der Functionen

(2) $$G(x) = p_x(xv)^2, \quad \Gamma(x) = \pi_x(xv)^2$$

ausführt, und dann aus den Ausdrücken, die man so erhält, diejenigen, die zu den Functionen (1) gehören und die in diesem Paragraphen bestimmt werden sollen, auf Grund der letzten der Gleichungen (5) in § 2 ableitet.

Den Aronhold'schen Process, der zu den Functionen (2) gehört, will ich mit ${}^0\delta$ bezeichnen. Denselben theile ich wieder:

(3) $${}^0\delta = {}^0\delta' + {}^0\delta'',$$

wo sich ${}^0\delta'$ auf die Differentiation nach den $\bar{a}_i$, ${}^0\delta''$ auf diejenige nach den $\bar{\alpha}_i$ bezieht der Art, dass

(4) $$\begin{aligned} {}^0\delta'\,\varphi(x) &= p_x(xv)^2, & {}^0\delta'\,\psi(x) &= 0, \\ {}^0\delta''\varphi(x) &= 0, & {}^0\delta''\psi(x) &= \pi_x(xv)^2. \end{aligned}$$ —

Bei der Ausführung des Processes ${}^0\delta'$ werde ich nur theilweise so verfahren, wie ich es in § 2 und § 3 des ersten Theils gethan habe, und zwar nur bei der Bestimmung von ${}^0\delta'\Delta$, ${}^0\delta' p$ und ${}^0\delta'\pi$.

Nach der Formel (A') § 1 im ersten Theil ist, wenn

$${}^0\delta'\varphi(x) = \bar{a}_x^3$$

gesetzt wird:

$${}^0\delta'\Delta(x) = {}^0\delta'[(ab)^2 a_x b_x] = 2(\bar{a}b)^2\bar{a}_x b_x,$$

und hieraus folgt, da nach (4) $\bar{a}_x^3 = p_x(xv)^2$, also

(5) $$\bar{a}_\xi^2\,\bar{a}_\eta = \frac{2}{3}\,p_\xi(\eta v)\,(\xi v) + \frac{1}{3}\,p_\eta(\xi v)^2$$

ist, dass

$${}^0\delta'\Delta(x) = \frac{4}{3}\,(pa)a_v a_x(xv) + \frac{2}{3}\,p_x a_v^2 a_x,$$

oder, da identisch $p_x a_v - p_v a_x = (pa)\,(xv)$ ist:

(6) $${}^0\delta'\Delta(x) = \frac{2}{3}\,p_v a_v a_x^2 - 2\,\lambda_v\lambda_x(xv).$$ —

Ebenso ist, wenn ${}^0\delta'\Delta(x) = \overline{\Delta}_x^2$ bezeichnet wird:

$$ {}^0\delta' p(x) = {}^0\delta'[(\alpha\Delta)^2\alpha_x] = (\alpha\overline{\Delta})\,\alpha_x, $$

also

$$ {}^0\delta' p(x) = \frac{2}{3}(a\alpha)^2 a_v \alpha_x p_v - 2(\lambda\alpha)\lambda_v\alpha_v\alpha_x, $$

oder, da*)

$$ (a\alpha)^2 a_v \alpha_x p_v = \Theta_v^2 p_x - t_v(xv), $$

$$ (\lambda\alpha)\,\lambda_v\alpha_v\alpha_x = \Theta_v^2 p_x + \frac{1}{2}\Delta_v^2\pi_x $$

ist:

$$ (7) \qquad {}^0\delta' p(x) = -\frac{4}{3}\Theta_v^2 p_x - \Delta_v^2\pi_x - \frac{2}{3}t_v(xv). \;- $$

Sodann ist

$$ {}^0\delta'\pi(x) = {}^0\delta'[(\alpha\nabla)^2\alpha_x] = (\bar{\alpha}\nabla)^2\bar{\alpha}_x, $$

mithin auf Grund der Formel (5):

$$ (8) \qquad {}^0\delta'\pi(x) = \frac{1}{3}\nabla_v^2 p_x - \frac{2}{3}\sigma_v(xv). \;- $$

Bei der weitern Bestimmung werde ich aber einen andern Weg einschlagen, der mir hier, wo die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ an den sämmtlichen Ueberschiebungen derselben beiden Functionen ausgeführt werden soll, vortheilhafter erscheint. Auf die Producte

$$ {}^0\delta'[\varphi(x).\psi(y)], \quad {}^0\delta'[\nabla(x).\Delta(y)], \quad {}_0\delta'[p(x), \pi(x)], $$

und auf die Ausdrücke, die ich dafür aus den Gleichungen (4), (6), (7) und (8) erhalte, wende ich den Omegaprocess an:

$$ \Omega = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_1}\right), $$

---

*) Die beiden Ausdrücke für $(a\alpha)^2 a_v\alpha_x p_v$ und $(\lambda\alpha)\lambda_v\alpha_v\alpha_x$ sind nicht unmittelbar in dem erwähnten Aufsatze von Gall zu finden. Ich erhielt sie folgendermassen:

1) Es ist

$$ (a\alpha)^2 a_v\alpha_x p_v = (a\alpha)^2 a_v\alpha_v p_x + (\alpha p)(a\alpha)^2\alpha_v(xv) = \Theta_v^2 p_x + \left[(\Theta p)\Theta_v - \frac{1}{2}(a\alpha)^3 p_v\right](xv), $$

oder da

$$ (\Theta p)\Theta_v = (\Theta, p)_1 = \frac{1}{2}Jp_v - t_v $$

(Gall, S. 427) ist:

$$ (a\alpha)^2 a_v\alpha_x p_v = \Theta_v^2 p_x - t_v(xv). $$

2) Aus $\lambda_v^2 = 2(\Delta\Theta)\Delta_v\Theta_v$ (Gall, S. 427) folgt:

$$ (\lambda\alpha)\lambda_v\alpha_v\alpha_x = [(\Delta\Theta)(\Theta\alpha)\Delta_v\alpha_v + (\Delta\Theta)(\Delta\alpha)\Theta_v\alpha_v]\,\alpha_x = (\Delta\alpha)^2\alpha_x\Theta_v^2 - (\Theta\alpha)^2\alpha_x\Delta_v^2, $$

also da, $(\Theta\alpha)^2\alpha_x = (\Theta, \psi)_2 = -\frac{1}{2}\pi_x$ (Gall, S. 427) ist:

$$ (\lambda\alpha)\lambda_v\alpha_v\alpha_x = \Theta_v^2 p_x + \frac{1}{2}\Delta_v^2\pi_x. $$

wo m und n die Ordnung der betreffenden Function in x und y ist, die diesem Process unterworfen wird. Dadurch komme ich zu den drei Gleichungssystemen:
erstens

$$\begin{aligned}
{}^0\delta'[a_x^3\alpha_y^3] &= p_x\alpha_y^3(xv)^2,\\
{}^0\delta'[(a\alpha)a_x^2\alpha_y^2] &= \frac{2}{3}\,p_x\alpha_v\alpha_y^2(xv) + \frac{1}{3}\,(p\alpha)\alpha_y^2(xv)^2,\\
{}^0\delta'[(a\alpha)^2a_x\alpha_y] &= \frac{1}{3}\,p_x\alpha_v^2\alpha_y + \frac{2}{3}\,(p\alpha)\alpha_v\alpha_y(xv),\\
{}^0\delta'[(a\alpha)^3] &= (p\alpha)\alpha_v^2;
\end{aligned}$$

zweitens

$$\begin{aligned}
{}^0\delta'[\nabla_x^2\Delta_y^2] &= \frac{2}{3}\,p_v\nabla_x^2a_va_y^2 - 2\lambda_v\lambda_y\nabla_x^2(yv),\\
{}^0\delta'[(\nabla\Delta)\nabla_x\Delta_y] &= \frac{2}{3}\,(\nabla a)\nabla_xa_va_yp_v + \nabla_v\nabla_x\lambda_v\lambda_y - (\nabla\lambda)\nabla_x\lambda_v(yv),\\
{}^0\delta'[(\nabla\Delta)^2] &= \frac{2}{3}\,(\nabla a)^2a_vp_v + 2(\nabla\lambda)\lambda_v\nabla_v;
\end{aligned}$$

und drittens

$$\begin{aligned}
{}^0\delta'[p_x\pi_y] &= \frac{1}{3}\,\nabla_v^2p_xp_y - \frac{2}{3}\,\sigma_vp_x(yv) - \frac{4}{3}\,\Theta_v^2p_x\pi_y - \Delta_v^2\pi_x\pi_y\\
&\quad - \frac{2}{3}\,t_v\pi_y(xv),\\
{}^0\delta'[(p\pi)] &= \frac{2}{3}\,\sigma_vp_v - \frac{4}{3}\,(p\pi)\Theta_v^2 - \frac{2}{3}\,t_v\pi_v.
\end{aligned}$$

Hierin lasse ich nun die Werthepaare x_1, x_2 und y_1, y_2 mit u_1, u_2 identisch werden, und gehe ausserdem zugleich von dem Aronhold'schen Process zu der Operation ${}^0\underset{v=u}{\delta'}$ über, indem ich u_1, u_2 an Stelle von v_1, v_2 setze. Da $(p\alpha)\alpha_u^2 = (p, \psi)_1 = \nu$ und

$$(\nabla\lambda)\nabla_u\lambda_u = (\nabla, \lambda)_1 = E\Delta - C\Theta$$

(Gall, S. 427) ist, so erhalte ich

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\varphi, \psi)_0 = 0,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\varphi, \psi)_1 = 0,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\varphi, \psi)_2 = \frac{1}{3}\,\psi p,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\varphi, \psi)_3 = \nu,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\nabla, \Delta)_0 = \frac{2}{3}\,\varphi p\nabla,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\nabla, \Delta)_1 = -\frac{2}{3}\,p\xi + \lambda\nabla,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(\nabla, \Delta)_2 = \frac{2}{3}p\pi - 2C\Theta + 2E\Delta,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(p, \pi)_0 = \frac{1}{3}p^2\nabla - \pi^2\Delta - \frac{4}{3}p\pi\Theta,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta'}(p, \pi)_1 = \frac{2}{3}\sigma p - \frac{2}{3}t\pi - \frac{8}{3}\omega\Theta,
\end{aligned}\right.$$

worin u_1, u_2 überall die Variablen sind.

Das entsprechende System für ${}^0\underset{v=u}{\delta''}$ bekomme ich durch die gegenseitige Vertauschung der Coefficienten $\bar{a}_i$ und $\bar{\alpha}_i$. Da dadurch φ und ψ, Δ und ∇, p und π, ξ und ζ, λ und μ, σ und t, D und E gegenseitig in einander übergehen, während ω, ν, J und ϑ ihr Vorzeichen wechseln und C und Θ ganz ungeändert bleiben, so ergiebt sich

$$\text{(B)}\quad\left\{\begin{aligned}
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\varphi, \psi)_0 = 0,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\varphi, \psi)_1 = 0,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\varphi, \psi)_2 = \frac{1}{3}\varphi\pi,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\varphi, \psi)_3 = \nu,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\nabla, \Delta)_0 = \frac{2}{3}\psi\pi\Delta,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\nabla, \Delta)_1 = \frac{2}{3}\pi\zeta - \mu\Delta,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(\nabla, \Delta)_2 = \frac{2}{3}p\pi - 2C\Theta + 2D\nabla,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(p, \pi)_0 = \frac{1}{3}\pi^2\Delta - p^2\nabla - \frac{4}{3}p\pi\Theta,\\
&{}^0\underset{v=u}{\delta''}(p, \pi)_1 = \frac{2}{3}\sigma p - \frac{2}{3}t\pi - \frac{8}{3}\omega\Theta.
\end{aligned}\right.$$

Auf Grund der Formel (3) finde ich nun die Ausdrücke, die durch die Operation ${}^0\underset{v=u}{\delta}$ entstehen, indem ich einfach die auf der rechten Seite der entsprechenden Gleichungen der beiden Systeme (A) und (B) stehenden Terme addire. In den Ausdrücken, die ich so erhalte, treten aber Glieder, wie ψp, $\varphi p\nabla$, $\pi\zeta$, u. s. w. auf, und es ist daher noch nothwendig, sie so umzuformen, dass in ihnen nur die neun Covarianten $(\varphi, \psi)_\lambda$, $(\nabla, \Delta)_\mu$ und $(p, \pi)_\nu$ vorkommen. Dies geschieht mittels der folgenden Syzyganten:

(a) $2J\vartheta - 2\Theta^2 + 2\Delta\nabla - \psi p - \varphi\pi = 0$, (Gall, S. 435),

(b) $2\vartheta\nu + \psi\pi\Delta + \varphi p\nabla = 0$, (Gall, S. 439),

(c) $$\nu\Theta - \frac{1}{2}\mu\Delta + \frac{1}{2}\lambda\nabla = 0,$$ (Gall, S. 436),

(d) $$C\vartheta + \frac{1}{2}(\pi\zeta - p\xi) + \frac{1}{4}(\mu\Delta - \lambda\nabla) + \frac{1}{2}J\Delta\nabla = 0,$$ (Gall, S. 436),

(e) $$p\pi + D\nabla - 2C\Theta + E\Delta - J\nu = 0,$$ (Gall, S. 429),

(f) $$4\omega\vartheta + p^2\nabla + 2p\pi\Theta + \pi^2\Delta = 0,$$ (Gall, S. 437),

(g) $$2\omega\Theta + Jp\pi + p\sigma - t\pi = 0,$$ (Gall, S. 430).

Fast ohne Rechnung ergiebt sich auf diese Weise

$$\text{(IIIa)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\underset{v=u}{{}^0\delta}(\varphi, \psi)_0 = 0,\\
&\underset{v=u}{{}^0\delta}(\varphi, \psi)_1 = 0,\\
&\underset{v=u}{{}^0\delta}(\varphi, \psi)_2 = \frac{2}{3}J\vartheta - \frac{2}{3}\Theta^2 + \frac{2}{3}\nabla\Delta,\\
&\underset{v=u}{{}^0\delta}(\varphi, \psi)_3 = 2\nu,\\
&\underset{u=v}{{}^0\delta}(\nabla, \Delta)_0 = -\frac{4}{3}\vartheta\nu,\\
&\underset{u=v}{{}^0\delta}(\nabla, \Delta)_1 = -\frac{4}{3}C\vartheta - \frac{8}{3}\nu\Theta - \frac{2}{3}J\nabla\Delta,\\
&\underset{u=v}{{}^0\delta}(\nabla, \Delta)_2 = -\frac{2}{3}p\pi + 2J\nu,\\
&\underset{u=v}{{}^0\delta}(p, \pi)_0 = \frac{8}{3}\omega\vartheta - \frac{4}{3}p\pi\Theta,\\
&\underset{u=v}{{}^0\delta}(p, \pi)_1 = -8\omega\Theta - \frac{4}{3}Jp\pi.
\end{aligned}\right.$$

Da

$$\vartheta = (\varphi, \psi)_1, \quad \Theta = (\varphi, \psi)_2, \quad J = (\varphi, \psi)_3,$$
$$\nu = (\nabla, \Delta)_1, \quad C = (\nabla, \Delta)_2, \quad 2\omega = (p, \pi)_1,$$

so finden sich thatsächlich auf der rechten Seite dieser Gleichungen nur die betreffenden neun Covarianten vor. —

Aus diesem Gleichungssystem soll jetzt noch dasjenige abgeleitet werden, bei welchem zu der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ die Functionen (1) benutzt werden. Es geschieht dies, wie schon oben hervorgehoben, mit Hilfe der letzten der Gleichungen (5) in § 2, d. i.

$$\Theta_x^2 a_v^2 a_x = 2\Theta_v\Theta_x a_v a_x^2 - \Theta_v^2 a_x^3 - \frac{1}{2}p_x(xv)^2.$$

Denn, wie Ende des zweiten Paragraphen ausgeführt wurde, ist jetzt, wenn man dem δ, um zu zeigen, dass es sich auf die Functionen

$$G(x) = \Theta_x^2 a_v^2 a_x, \quad \Gamma(x) = \Theta_x^2 \alpha_v^2 \alpha_x$$

bezieht, den Index 3 beifügt:

$$\underset{v=u}{\delta_3} = -\underset{v=u}{\delta_1} + 2\underset{v=u}{\delta_2} - \frac{1}{2}\underset{v=u}{{}^0\delta}.$$

Demgemäss erhält man, wenn man noch der Gleichmässigkeit halber $(\varphi, \psi)_1$ für ϑ, $(\varphi, \psi)_2$ für Θ, u. s. w. schreibt, das Gleichungssystem:

$$(\mathrm{III})\quad\left\{\begin{aligned}
\underset{v=u}{\delta_3}(\varphi, \psi)_0 &= 2(\varphi, \psi)_0(\varphi, \psi)_2,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\varphi, \psi)_1 &= \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_1(\varphi, \psi)_2,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\varphi, \psi)_2 &= -\frac{1}{3}(\varphi, \psi)_1(\varphi, \psi)_3 + (\varphi, \psi)_2(\varphi, \psi)_2 - \frac{1}{3}(\nabla, \Delta)_0,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\varphi, \psi)_3 &= -(\nabla, \Delta)_1,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\nabla, \Delta)_0 &= \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_2(\nabla, \Delta)_0 + \frac{2}{3}(\varphi, \psi)_1(\nabla, \Delta)_1,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\nabla, \Delta)_1 &= \frac{1}{3}(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_0 + 2(\varphi, \psi)_2(\nabla, \Delta)_1\\
&\qquad + \frac{2}{3}(\varphi, \psi)_1(\nabla, \Delta)_2,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(\nabla, \Delta)_2 &= -(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_1 + \frac{1}{3}(p, \pi)_0,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(p, \pi)_0 &= \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_2(p, \pi)_0 - \frac{2}{3}(\varphi, \psi)_1(p, \pi)_1,\\
\underset{v=u}{\delta_3}(p, \pi)_1 &= \frac{2}{3}(\varphi, \psi)_3(p, \pi)_0 + 2(\varphi, \psi)_2(p, \pi)_1.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen zeigen an, dass, wie in § 1 behauptet, die betreffenden neun Covarianten auch bezüglich dieser Operation $\underset{v=u}{\delta_3}$ eine geschlossene Gruppe bilden.

§ 6.

Bedeutend einfacher ist die Entwicklung wieder im vierten Fall, wo

$$G(x) = \Delta_v^2 \alpha_x^3, \qquad \Gamma(x) = \nabla_v^2 a_x^3$$

ist. Dem Operationszeichen δ füge ich hier den Index 4 an, und theile dann die Operation δ_4 ebenso wie oben, indem ich diejenigen Glieder, in denen nach den $\bar{a}_i$, und diejenigen, in denen nach den $\bar{\alpha}_i$ differentiirt wird, je zusammenfasse:

$$(1)\qquad \delta_4 = \Delta_v^2 \delta_4' + \nabla_v^2 \delta_4'',$$

wo

$$\delta_4'\,\varphi(x) = \psi(x), \qquad \delta_4'\,\psi(x) = 0,$$
$$\delta_4''\,\varphi(x) = 0, \qquad \delta_4''\,\psi(x) = \varphi(x).$$

Es ist nun bekanntlich (Gall, S. 426)

$$\delta_4''(\varphi,\psi)_0 = \varphi^2, \qquad \delta_4''(\nabla,\Delta)_1 = -\lambda,$$
$$\delta_4''(\varphi,\psi)_1 = 0, \qquad \delta_4''(\nabla,\Delta)_2 = 2D,$$
$$\delta_4''(\varphi,\psi)_2 = \Delta, \qquad \delta_4''(p,\pi)_0 = -p^2,$$
$$\delta_4''(\varphi,\psi)_3 = 0, \qquad \delta_4''(p,\pi)_1 = 0;$$
$$\delta_4''(\nabla,\Delta)_0 = 2\Delta\Theta,$$

und analog durch Vertauschung von $\bar{a}_i$ und $\bar{\alpha}_i$:

$$\delta_4'(\varphi,\psi)_0 = \psi^2, \qquad \delta_4'(\nabla,\Delta)_1 = \mu,$$
$$\delta_4'(\varphi,\psi)_1 = 0, \qquad \delta_4'(\nabla,\Delta)_2 = 2E,$$
$$\delta_4'(\varphi,\psi)_2 = \nabla, \qquad \delta_4'(p,\pi)_0 = -\pi^2,$$
$$\delta_4'(\varphi,\psi)_3 = 0, \qquad \delta_4'(p,\pi)_1 = 0.$$
$$\delta_4'(\nabla,\Delta)_0 = 2\nabla\Theta,$$

Aus diesen beiden Systemen finde ich auf Grund der Formel (1) die Darstellungen von $\delta_4(\varphi,\psi)_0$, $\delta_4(\varphi,\psi)_1, \ldots$ u. s. w. In denselben lasse ich, um zu der Operation $\underset{v=u}{\delta_4}$ überzugehen, $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ werden. Von den Ausdrücken, zu denen ich auf diese Weise gelangt bin, haben einige, diejenigen von $\underset{v=u}{\delta_4}(\varphi,\psi)_0$, $\underset{v=u}{\delta_4}(\nabla,\Delta)_1$, $\underset{v=u}{\delta_4}(\nabla,\Delta)_2$ und $\underset{v=u}{\delta_4}(p,\pi)_0$, noch nicht ihre definitive Form, da in ihnen die Glieder $\Delta\psi^2$, $\mu\Delta$, $E\Delta$, $\pi^2\Delta$ u. s. w. vorkommen. Dieselben eliminire ich mittels der Syzygante (Gall, S. 439)

$$\text{(h)} \qquad 2\vartheta^2 + \Delta\psi^2 - 2\Theta\varphi\psi + \nabla\varphi^2 = 0,$$

und den schon im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten und angeführten Syzyganten (c), (e) und (f). Wenn ich dann noch für die Covarianten $\vartheta, \Theta, \ldots$ ihre Bezeichnungen als Ueberschiebungen einführe, so bin ich zu dem folgenden Gleichungssystem gekommen:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \underset{v=u}{\delta_4}(\varphi,\psi)_0 = 2(\varphi,\psi)_0(\varphi,\psi)_2 - 2(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_1, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\varphi,\psi)_1 = 0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\varphi,\psi)_2 = 2(\nabla,\Delta)_0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\varphi,\psi)_3 = 0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\nabla,\Delta)_0 = 4(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\nabla,\Delta)_1 = 2(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_1, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(\nabla,\Delta)_2 = 2(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_1 + 4(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_2 - 2(p,\pi)_0, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(p,\pi)_0 = 2(\varphi,\psi)_2(p,\pi)_0 + 2(\varphi,\psi)_1(p,\pi)_1, \\ \underset{v=u}{\delta_4}(p,\pi)_1 = 0. \end{cases}$$

Auf der rechten Seite treten entsprechend der Behauptung in § 1 nur dieselben Covarianten auf, wie auf der linken Seite.

§ 7.

Im fünften und letzten Fall, wenn

$$G(x) = J a_v a_x^2 (xv), \quad \Gamma(x) = -J \alpha_v \alpha_x^2 (xv),$$

wo ich dem δ zur Unterscheidung den Index 5 anhängen will, verfahre ich ganz ebenso wie bei der Bestimmung von ${}^0\underset{v=u}{\delta}$ in § 5. Nachdem ich den Aronhold'schen Process in der Weise getrennt habe, dass

$$\delta_5 = J(\delta_5' - \delta_5''), \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned} &\delta_5' \varphi(x) = a_v a_x^2 (xv), \quad \delta_5' \psi(x) = 0, \\ &\delta_5'' \varphi(x) = 0, \qquad\qquad \delta_5'' \psi(x) = \alpha_v \alpha_x^2 (xv), \end{aligned} \tag{2}$$

bestimme ich zuerst wieder $\delta_5' \Delta$, $\delta_5' p$ und $\delta_5' \pi$.

Wenn ich $\delta_5' \varphi(x) = \bar{a}_x^3$ setze, so ist $\bar{a}_x^3 = a_v a_x^2 (xv)$, also

$$a_\xi^2 a_\eta = \frac{1}{3} a_v a_\xi^2 (\eta v) + \frac{2}{3} a_v a_\xi a_\eta (\xi v), \tag{3}$$

und unter Benutzung dieser Gleichung findet man

$$\begin{aligned} \delta_5' \Delta(x) &= \delta_5' [(ab)^2 a_x b_x] = 2(\bar{a} b)^2 \bar{a}_x b_x \\ &= \frac{4}{3} (ab)\, a_v a_x b_v b_x + \frac{2}{3} (ab)^2 a_v b_x (xv), \end{aligned}$$

oder, da $(ab)^2 a_v b_x = \Delta_v \Delta_x$, und $(ab) a_v a_x b_v b_x$ verschwindet, weil der Ausdruck beim Vertauschen der gleichwerthigen Symbole a und b sein Vorzeichen ändert:

$$\delta_5' \Delta(x) = \frac{2}{3} \Delta_v \Delta_x (xv). \text{ —} \tag{4}$$

Ferner wenn ich $\delta_5'(x)$ mit $\bar{\Delta}_x^2$ bezeiche, wo mithin

$$\bar{\Delta}_x^2 = \frac{2}{3} \Delta_v \Delta_x (xv),$$

so ist

$$\begin{aligned} \delta_5' p(x) &= \delta_5' [(\alpha \Delta)^2 \alpha_x] = (\alpha \bar{\Delta})^2 \alpha_x \\ &= \frac{2}{3} (\Delta \alpha) \Delta_v \alpha_v \alpha_x, \end{aligned}$$

also

$$\delta_5' p(x) = -\frac{2}{3} \zeta_v^2 \zeta_x - \frac{2}{9} p_v (xv). \text{ —} \tag{5}$$

Sodann ist mit Hilfe von (3)

$$\begin{aligned} \delta_5' \pi(x) &= \delta_5' [(a \nabla)^2 a_x] = (\bar{a} \nabla)^2 \bar{a}_x \\ &= \frac{2}{3} (a \nabla) \nabla_v a_v a_x + \frac{1}{3} (a \nabla)^2 a_v (xv), \end{aligned}$$

d. i.

(6) $$\delta_5'\pi(x) = \frac{2}{3}\,\xi_v^2\xi_x + \frac{5}{9}\,\pi_v(xv). \text{ —}$$

Nunmehr unterwerfe ich die Functionen

$$\delta_5'[\varphi(x)\,.\,\psi(y)],\ \delta_5'[\nabla(x)\,.\,\Delta(y)],\quad \delta_5'[p(x)\,.\,\pi(y)],$$

und die aus den Gleichungen (2), (4), (5) und (6) sich dafür ergebenden Ausdrücke dem Omegaprocess. Man findet dadurch die drei folgenden Gleichungssysteme:

erstens

$$\delta_5'[a_x^3\alpha_y^3] = a_v a_x^2\alpha_y^3(xv),$$

$$\delta_5'[(a\alpha)a_x^2\alpha_y^2] = \frac{1}{3}\,a_v a_x^2\alpha_v\alpha_y^2 + \frac{2}{3}\,(a\alpha)a_v a_x\alpha_y^2(xv),$$

$$\delta_5'[(a\alpha)^2 a_x\alpha_y] = \frac{2}{3}\,(a\alpha)a_v a_x\alpha_v\alpha_y + \frac{1}{3}\,(a\alpha)^2 a_v\alpha_y(xv),$$

$$\delta_5'[(a\alpha)^3] = (a\alpha)^2 a_v\alpha_v;$$

zweitens

$$\delta_5'[\nabla_x^2\Delta_y^2] = \frac{2}{3}\,\Delta_v\Delta_y\nabla_x^2(yv),$$

$$\delta_5'[(\nabla\Delta)\nabla_x\Delta_y] = -\frac{1}{3}\,\Delta_v\Delta_y\nabla_v\nabla_x + \frac{1}{3}\,(\nabla\Delta)\Delta_v\nabla_x(yv),$$

$$\delta_5'[(\nabla\Delta)^2] = -\frac{2}{3}\,(\nabla\Delta)\Delta_v\nabla_v;$$

und drittens

$$\delta_5'[p_x\pi_y] = \frac{2}{3}\,p_x\xi_v^2\xi_y + \frac{5}{9}\,\pi_v p_x(yv) - \frac{2}{3}\,\pi_y\,\zeta_v^2\,\zeta_x - \frac{2}{9}\,p_v\pi_y\,(xv),$$

$$\delta_5'[(p\pi)] = \frac{2}{3}\,(p\xi)\xi_v^2 - \frac{2}{3}\,(\zeta\,\pi)\,\zeta_v^2 - \frac{7}{9}\,p_v\pi_v.$$

In diesen Gleichungen setze ich wiederum für x_1, x_2 und y_1, y_2 das Variablenpaar u_1, u_2, und lasse zugleich, um von dem Aronhold'schen Process zu der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ zu gelangen, v_1, v_2 in u_1, u_2 übergehen:

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\varphi,\,\psi)_0 = 0,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\varphi,\,\psi)_1 = \frac{1}{3}\,\varphi\psi,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\varphi,\,\psi)_2 = \frac{2}{3}\,\vartheta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\varphi,\,\psi)_3 = \Theta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\nabla,\,\Delta)_0 = 0,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\nabla,\,\Delta)_1 = -\frac{1}{3}\,\nabla\Delta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(\nabla,\,\Delta)_2 = -\frac{2}{3}\,\nu,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(p,\pi)_0 = \frac{2}{3}(p\xi - \pi\zeta),$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(p,\pi)_1 = \frac{2}{3}(p,\xi)_1 + \frac{2}{3}(\pi,\zeta)_1 - \frac{7}{9}p\pi.$$

Die letzten beiden Gleichungen will ich noch umändern. In dem Ausdruck von $\delta_5'(p,\pi)_1$ setze ich für $(p,\xi)_1$ und $(\pi,\zeta)_1$ ihre Werthe $E\Delta - C\Theta + \frac{1}{3}p\pi$ und $D\nabla - C\Theta + \frac{1}{3}p\pi$ (Gall, S. 427), und eliminire $E\Delta$ und $D\nabla$ mit Hilfe der Syzygante (e) in § 5. Sodann ersetze ich $p\xi - \pi\zeta$ in der Gleichung für $\delta_5'(p,\pi)_0$ mittels der Syzyganten (c) und (d) in § 5 durch $2C\vartheta + \nu\Theta + J\Delta\nabla$. Dadurch ergiebt sich

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(p,\pi)_0 = \frac{4}{3}C\vartheta + \frac{2}{3}\nu\Theta + \frac{2}{3}J\Delta\nabla,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5'}(p,\pi)_1 = \frac{2}{3}J\nu - p\pi. -$$

Aus diesem System leite ich dasjenige für $\underset{v=u}{\delta_5''}$ durch gegenseitige Vertauschung von $\bar{a}_i$ und $\bar{\bar{a}}_i$ ab. Wie man sich leicht überzeugt, unterscheiden sich die dadurch entstehenden Gleichungen von den ursprünglichen nur darin, dass die rechte Seite immer das entgegengesetzte Vorzeichen hat, also:

$$\underset{v=u}{\delta_5''}(\varphi,\psi)_0 = 0,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5''}(\varphi,\psi)_1 = -\frac{1}{3}\varphi\psi,$$

$$\underset{v=u}{\delta_5''}(\varphi,\psi)_2 = -\frac{2}{3}\vartheta,$$

u. s. w.

Bei Berücksichtigung der Formel (1) erhält man nun aus diesen beiden Gleichungssystemen das gesuchte Gleichungssystem:

$$(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned}
&\underset{v=u}{\delta_5}(\varphi,\psi)_0 = 0,\\
&\underset{v=u}{\delta_5}(\varphi,\psi)_1 = \frac{2}{3}(\varphi,\psi)_0(\varphi,\psi)_3,\\
&\underset{v=u}{\delta_5}(\varphi,\psi)_2 = \frac{4}{3}(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_3,\\
&\underset{v=u}{\delta_5}(\varphi,\psi)_3 = 2(\varphi,\psi)_2(\varphi,\psi)_3,\\
&\underset{v=u}{\delta_5}(\nabla,\Delta)_0 = 0,\\
&\underset{v=u}{\delta_5}(\nabla,\Delta)_1 = -\frac{2}{3}(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_0,
\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}
\underset{v=u}{\delta_5}(\nabla, \Delta)_2 = -\frac{4}{3}(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_1, \\
\underset{v=u}{\delta_5}(p, \pi)_0 = \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_3(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_0 + \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_2(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_1 \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{8}{3}(\varphi, \psi)_1(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_2, \\
\underset{v=u}{\delta_5}(p, \pi)_1 = \frac{4}{3}(\varphi, \psi)_3(\varphi, \psi)_3(\nabla, \Delta)_1 - 2(\varphi, \psi)_3(p, \pi)_0.
\end{array}\right.$$

Durch dasselbe ist auch für diesen Fall die obige Behauptung bewiesen. Und da nun jede derartige Operation $\underset{v=u}{\delta}$ sich aus den Operationen $\underset{v=u}{\delta_1}, \underset{v=u}{\delta_2}, \ldots, \underset{v=u}{\delta_5}$ linear zusammensetzen lässt, so ist der Beweis jetzt allgemein geliefert: *Die oben näher definirte Operation* $\underset{v=u}{\delta}$ *kennzeichnet eine Reihe von Covarianten der Art, dass, wenn man die Operation* $\underset{v=u}{\delta}$ *an einer derselben ausführt, man immer wieder Covarianten dieser besonderen Art erhält.* —

§ 8.

Die Veranlassung zu dieser Untersuchung gaben, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, die partiellen Differentialgleichungen der Thetafunctionen zweier Argumente, in denen die Differentiation nach den Parametern in die Form eines solchen Aronhold'schen Processes, wie wir ihn eben betrachtet haben, gebracht werden kann. Diese Differentialgleichungen lassen sich, wenn $\Theta(u_1, u_2)$ die Weierstrass'sche Thetafunction, und 4ω die sogenannte Determinante der realen Perioden bedeutet, und wenn

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega}}\,\Theta = \mathrm{Th}$$

gesetzt wird, in der folgenden Weise schreiben*):

$$(1)\qquad 6\delta_0 \mathrm{Th} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} v_1^{4-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2}\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{1}{2}\Lambda\,\mathrm{Th} = 0.$$

Die verschiedenen Darstellungen der Operation δ_0 sind schon oben angegeben. Insbesondere, wenn Th eine gerade Thetafunction bedeutet, so wird man, da die einzelnen Glieder der Entwicklung einer geraden Thetafunction aus simultanen Covarianten der beiden cubischen Factoren φ und ψ von f bestehen, der Operation δ_0 die Form (4) in der Einleitung geben:

*) Vergl. den Aufsatz des Verf., Math. Annalen, Bd. XXXIII, S. 286. Nur habe ich hier $u_2, -u_1$, bez. $v_2, -v_1$ an Stelle von u_1, u_2, bez. v_1, v_2 gesetzt, damit u_1, u_2 und v_1, v_2 unmittelbar die Variablen der Covarianten sein können.

$$\delta_0 = \sum_{i=0}^{3} \overline{G}_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i} + \sum_i \overline{\Gamma}_i \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_i},$$

wo bei der Bezeichnung $f = \varphi \cdot \psi = A_x^6$:

$$\overline{G}(x) = \left\{(Aa) A_v^3 A_x^2 a_x^2 - \frac{1}{4}\left((\alpha b)\alpha_x \alpha_v b_v^2 + (\alpha b)\alpha_v^2 b_v b_x\right) a_x^3\right\} : 2(xv)$$

ist.

Diese Differentialgleichungen können, wie ebenfalls schon in der Einleitung erwähnt wurde, dazu benutzt werden, um eine Recursionsformel abzuleiten, mittelst deren man die Glieder höherer Dimension in der Entwicklung der geraden Thetafunction in eine Potenzreihe aus den Gliedern niederer Dimension ableitet. Substituirt man nämlich in die Differentialgleichung

$$\mathrm{Th} = t(1 + N_2 + N_4 + N_6 + \cdots),$$

wo $N_{2\lambda}$ die Glieder von der Dimension 2λ in den Argumenten bedeutet, und t^8 das Product der Discriminanten von φ und ψ ist, lässt alsdann die Variablen v_1, v_2 in u_1, u_2 übergehen, so erhält man, da die Glieder gleich hoher Dimension in den Argumenten einzeln verschwinden müssen, die folgenden Beziehungen:

$$12 \underset{v=u}{\delta_0} t + N_2 t = 0,$$

$$24 t \underset{v=u}{\delta_0} N_{2\lambda-2} + 24 N_{2\lambda-2} \underset{v=u}{\delta_0} t + 2\lambda(2\lambda - 1) N_{2\lambda} t + 2\Lambda N_{2\lambda-4} t = 0,$$

und aus diesen ergiebt sich durch Elimination von $\underset{v=u}{\delta_0} t$ die gesuchte Recursionsformel:

$$2\lambda(2\lambda - 1) N_{2\lambda} = -24 \underset{v=u}{\delta_0} N_{2\lambda-2} + 2 N_2 N_{2\lambda-2} - 2\Lambda N_{2\lambda-4}.$$

Da nun*)

$$2\Lambda = \frac{3}{25}(12\Theta^2 + 15\nabla\Delta - 10J\vartheta),$$

und

$$N_0 = 1, \qquad N_2 = \frac{9}{10}\Theta$$

bekannt sind, so kann man mittels derselben die Glieder vierter, sechster, u. s. w. Dimension leicht bestimmen, sobald man nur noch die Ausdrücke kennt, die durch die Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ aus den betreffenden Covarianten entstehen. — Man schliesst ferner aus dieser Formel, da in derselben unmittelbar nur die Covarianten $\vartheta = (\varphi, \psi)_1$, $\Theta = (\varphi, \psi)_2$,

*) Siehe den Aufsatz des Verf., Math. Annalen Bd. XXIX, S. 296 und 297. Durch Vergleichung der dort stehenden Differentialgleichung mit der Gleichung (1) ergiebt sich, dass

$$2\Lambda = \frac{6}{25}\Theta^2 + 3\nabla\Delta - \frac{3}{5}(\varphi\pi + \psi p),$$

und hieraus resultirt mit Hilfe der Syzygante (a) in § 5 der obige Ausdruck. —

$J=(\varphi,\psi)_3$ und $\nabla\Delta=(\nabla,\Delta)_0$ auftreten und die einzige Operation, welche neue Covarianten erzeugt, die Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ ist, welche die in diesem Aufsatz betrachtete Form hat, dass *die Covarianten, aus denen die Glieder der Entwicklung der geraden Thetafunction in eine Potenzreihe bestehen, Covarianten dieser besondern Art sind, welche sich durch diese neun Covarianten* $(\varphi,\psi)_\lambda$, $(\nabla,\Delta)_\mu$, $(p,\pi)_\nu$ *rational ausdrücken lassen.*

Es bleibt jetzt, um diese Betrachtung über die Reihenentwicklung der geraden Thetafunctionen zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen, noch übrig, die Ausdrücke zu bestimmen, in welche durch die Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ diese neun Covarianten übergehen. Zu dem Zwecke muss ich die Operation δ_0 auf die Operationen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_5$ zurückführen. Da

$$A_x^6=a_x^3\alpha_x^3,$$

so ist

$$A_v^3A_x^3=\frac{1}{20}\left\{a_x^3\alpha_v^3+9a_va_x^2\alpha_v^2\alpha_x+9a_v^2a_x\alpha_v\alpha_x^2+a_v^3\alpha_x^3\right\},$$

und demgemäss

$$\begin{aligned}\overline{G}(x)=\Big\{\frac{1}{20}\big[&(ab)a_x^2b_x^2\alpha_v^3+6(ab)a_v\alpha_xb_x^2\alpha_v^2\alpha_x+3(\alpha b)\alpha_v^2b_x^2a_va_x^2\\&+3(ab)a_v^2b_x^2\alpha_v\alpha_x^2+6(\alpha b)\alpha_v\alpha_xb_x^2a_v^2a_x+(\alpha b)\alpha_x^2b_x^2a_v^3\big]\\&-\frac{1}{4}\left[(\alpha b)\alpha_v\alpha_xb_v^2a_x^3+(\alpha b)\alpha_v^2b_vb_xa_x^3\right]\Big\}:2(xv).\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck verwandele ich mit Hilfe der drei identischen Gleichungen

$$\begin{aligned}(\alpha b)\alpha_v^2b_x^2a_va_x^2&=(ab)a_va_xb_x^2\alpha_v^2\alpha_x+(\alpha a)a_va_x\alpha_v^2b_x^3,\\(\alpha b)\alpha_v\alpha_xb_x^2a_v^2a_x&=(ab)a_v^2b_x^2\alpha_v\alpha_x^2+(\alpha a)a_v^2\alpha_v\alpha_xb_x^3,\\(\alpha b)\alpha_x^2b_x^2a_v^3&=(ab)a_v^2b_x^2\alpha_v\alpha_x^2+(\alpha a)a_v^2\alpha_x^2b_vb_x^2,\end{aligned}$$

indem ich zugleich die Gleichwerthigkeit der Symbole a und b berücksichtige, in

$$\begin{aligned}\overline{G}(x)=\{&[(\alpha b)\alpha_v\alpha_xb_v^2-(ab)\alpha_v^2b_vb_x]a_x^3+[(\alpha b)\alpha_x^2b_v^2-(\alpha b)\alpha_v^2b_x^2]a_va_x^2\\&+5[(ab)a_v^2b_x^2-(ab)a_x^2b_v^2]\alpha_v\alpha_x^2\\&+5[(ab)a_va_xb_x^2-(ab)a_x^2b_vb_x]\alpha_v^2\alpha_x\}:40(xv),\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich mit Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned}\alpha_xb_v-\alpha_vb_x&=(\alpha b)(xv),\\a_xb_v-a_vb_x&=(ab)(xv)\end{aligned}$$

die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}\overline{G}(x)=\frac{1}{40}\{&(\alpha b)^2\alpha_vb_va_x^3+(\alpha b)^2[\alpha_xb_v+\alpha_vb_x]a_va_x^2\\&-5(ab)^2[a_xb_v+a_vb_x]\alpha_v\alpha_x^2-5(ab)^2a_xb_x\alpha_v^2\alpha_x\},\end{aligned}$$

oder

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{40}\left\{\Theta_v^2 a_x^3 + 2\Theta_v\Theta_x a_v a_x^2 - 10\Delta_v\Delta_x \alpha_v a_x^2 - 5\Delta_x^2\alpha_v^2\alpha_x\right\},$$

und dieser Ausdruck geht bei Benutzung der Gleichungen (5) § 2 in

$$\overline{G}(x) = -\frac{1}{40}\left\{9\Theta_v^2 a_x^3 - 42\Theta_v\Theta_x a_v a_x^2 + 30\Theta_x^2 a_v^2 a_x + 15\Delta_v^2\alpha_x^3 + 10 J a_v a_x^2 (xv)\right\}$$

über.

Auf Grund der Betrachtung am Ende des zweiten Paragraphen folgt aus dieser Gleichung

$$\underset{v=u}{\delta_0} = -\frac{1}{40}\left\{9\underset{v=u}{\delta_1} - 42\underset{v=u}{\delta_2} + 30\underset{v=u}{\delta_3} + 15\underset{v=u}{\delta_4} + 10\underset{v=u}{\delta_5}\right\},$$

und gemäss dieser Beziehung resultirt aus den Gleichungssystemen (I), (II), . . ., (V) für die Operation $\underset{v=u}{\delta_0}$ das Gleichungssystem

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\varphi,\psi)_0 = -\frac{1}{60}\left\{36(\varphi,\psi)_0(\varphi,\psi)_2 - 45(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_1\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\varphi,\psi)_1 = -\frac{1}{60}\left\{10(\varphi,\psi)_0(\varphi,\psi)_3 - 18(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_2\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\varphi,\psi)_2 = -\frac{1}{60}\left\{5(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_3 - 12(\varphi,\psi)_2(\varphi,\psi)_2 + 30(\nabla,\Delta)_0\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\varphi,\psi)_3 = -\frac{1}{60}\left\{-6(\varphi,\psi)_2(\varphi,\psi)_3 - 45(\nabla,\Delta)_1\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\nabla,\Delta)_0 = -\frac{1}{60}\left\{36(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_0 + 30(\varphi,\psi)_1(\nabla,\Delta)_1\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\nabla,\Delta)_1 = -\frac{1}{60}\left\{5(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_0 + 42(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_1 + 30(\varphi,\psi)_1(\nabla,\Delta)_2\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(\nabla,\Delta)_2 = -\frac{1}{60}\left\{-20(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_1 + 18(\varphi,\psi)_2(\nabla,\Delta)_2 - 30(p,\pi)_0\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(p,\pi)_0 = -\frac{1}{60}\left\{20(\varphi,\psi)_3(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_0 + 20(\varphi,\psi)_2(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_1 + 40(\varphi,\psi)_1(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_2 - 24(\varphi,\psi)_2(p,\pi)_0 + 20(\varphi,\psi)_1(p,\pi)_1\right\},$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}(p,\pi)_1 = -\frac{1}{60}\left\{20(\varphi,\psi)_3(\varphi,\psi)_3(\nabla,\Delta)_1 - 18(\varphi,\psi)_2(p,\pi)_1\right\}.$$

Durch dasselbe wird, da

$$\underset{v=u}{\delta_0} = \sum_{\lambda=0}^{3}\frac{\partial}{\partial(\varphi,\psi)_\lambda}\underset{v=u}{\delta_0}(\varphi,\psi)_\lambda + \sum_{\mu=0}^{2}\frac{\partial}{\partial(\nabla,\Delta)_\mu}\underset{v=u}{\delta_0}(\nabla,\Delta)_\mu + \sum_{\nu=0}^{1}\frac{\partial}{\partial(p,\pi)_\nu}\underset{v=u}{\delta_0}(\pi,p)_1$$

ist, die Entwicklung der geraden Thetafunction zweier Argumente in eine Potenzreihe auf eine ganz einfache Rechnung zurückgeführt.

Halle, im Juni 1889.

Bemerkung zu v. Gall's Untersuchung über „Die Grundsyzyganten zweier simultanen biquadratischen binären Formen."*)

Von

E. Stroh in München.

Der von Hammond zuerst ausgesprochene Satz, dass jede (irreducible) Grundsyzygante eine *binäre* Combination der Grundformen enthalten müsse, hatte sich bis jetzt in allen untersuchten Fällen als zutreffend erwiesen und bei Aufstellung vollständiger Syzygantensysteme wesentliche Erleichterungen gewährt. Die allgemeine Giltigkeit dieses Theorems ist indessen zweifelhaft geworden, nachdem durch Herrn v. Gall in der genannten Abhandlung ein Beispiel gefunden wurde, welches dem Satze zu widersprechen scheint. Die Relation zwischen den acht Invarianten der Formen vierter Ordnung nämlich enthält als einfachsten Term die vierte Potenz D^4 einer Grundform und konnte nicht weiter reducirt werden, auch liess sich keine Syzygante mit dem Term D^2 auffinden, wie sie nach dem Hammond'schen Satze existiren müsste.

Es ist nun denkbar, dass die von Herrn v. Gall benützten Hilfsmittel der symbolischen Methode nicht hinreichend gewesen sind, um die betreffende Syzygante aufzufinden, da keineswegs feststeht, dass durch diese Hilfsmittel *alle existirenden* Syzyganten erhalten werden können. Die Klärung dieses Falles schien mir daher in mehrfacher Hinsicht von Interesse und veranlasste mich zu folgender Untersuchung.

Seien die gegebenen Formen durch

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$
$$f' = b_0 x_1^4 + 4b_1 x_1^3 x_2 + 6b_2 x_1^2 x_2^2 + 4b_3 x_1 x_2^3 + b_4 x_2^4$$

bezeichnet, dann lassen sich unschwer sämmtliche acht Invarianten in entwickelter Form hinschreiben. Man hat:

*) Math. Annalen Bd. 34, pag. 332.

$$
\begin{aligned}
E &= (ff')^4 &&= a_0 b_4 - 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 - 4a_3 b_1 + a_4 b_0,\\
i &= (ff)^4 &&= 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),\\
i' &= (f'f')^4 &&= 2(b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2)\\
j &= \big((ff)^2 f\big)^4 &&= 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4),\\
j' &= \big((f'f')^2 f'\big)^4 &&= 6(b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4),\\
C &= \big(f(f'f')^2\big)^4 &&= a_0 h_4' - 4a_1 h_3' + 6a_2 h_2' - 4a_3 h_1' + a_4 h_0',\\
C' &= \big(f'(ff)^2\big)^4 &&= b_0 h_4 - 4b_1 h_3 + 6b_2 h_2 - 4b_3 h_1 + b_4 h_0,\\
D &= [(ff)^2(f'f')^2]^4 &&= h_0 h_4' - 4h_1 h_3' + 6h_2 h_2' - 4h_3 h_1' + h_4 h_0'.
\end{aligned}
$$

Hierin sind die Coefficienten der Hesse'schen Formen $(ff)^2$ und $(f'f')^2$ durch h_i bez. h_i' bezeichnet, nämlich es ist

$$
\begin{aligned}
h_0 &= 2(a_0 a_2 - a_1^2),\\
h_1 &= a_0 a_3 - a_1 a_2,\\
h_2 &= \frac{1}{3}(a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2),\\
h_3 &= a_1 a_4 - a_2 a_3,\\
h_4 &= 2(a_2 a_4 - a_3^2)
\end{aligned}
$$

nebst ähnlichen Werthen für die h_i'.

Aus den angegebenen 8 Invarianten lassen sich nun im ganzen 12 Producte bilden, die in den Coefficienten jeder der Grundformen vom Grade 4 sind d. h. die gesuchte Syzygante müsste die Gestalt haben:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 D^2 + \lambda_2 E^4 + \lambda_3 E^2 D + \lambda_4 ECC' + \lambda_5 E^2 ii' + \lambda_6 Ejj'\\
\text{(I)}\quad &+ \lambda_7 Dii' + \lambda_8 Cji' + \lambda_9 C'ij' + \lambda_{10} C^2 i + \lambda_{11} C'^2 i'^2\\
&+ \lambda_{12} i^2 i'^2 = 0
\end{aligned}
$$

worin die λ_i ganze Zahlen sind.

Diese Identität muss für alle Werthe der Coefficienten a_i und b_i erfüllt sein, demnach auch wenn insbesondere

$$a_0 = a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$$

angenommen wird. Alsdann nehmen aber die oben angegebenen Invarianten die folgenden Werthe an

$$
\begin{aligned}
&i = i' = j = j' = 0; \quad E = a_4 b_0 - 4a_3 b_1\\
&C = -2a_4 b_1^2; \quad C' = -2b_0 a_3^2; \quad D = 4a_3^2 b_1^2.
\end{aligned}
$$

und die Syzygante (I) geht in

$$\text{(II)}\qquad \frac{1}{16}\lambda_1 \beta^4 + \lambda_2(\alpha-\beta)^4 + \frac{1}{4}\lambda_3 \beta^2(\alpha-\beta)^2 + \frac{1}{4}\lambda_4 \alpha\beta^2 = 0$$

über, wenn abkürzend

$$a_4 b_0 = \alpha \quad \text{und} \quad 4a_3 b_1 = \beta$$

gesetzt wird.

Aus (II) folgen nun für die Coefficienten λ_i die Bedingungen

$$\lambda_2 = 0,$$

$$6\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{4}\lambda_4 = 0,$$

$$\frac{1}{16}\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 = 0,$$

woraus leicht zu entnehmen ist, dass alle Coefficienten von λ_1 bis λ_4 verschwinden müssen.

Damit ist dann bewiesen, dass eine Grundsyzygante mit dem Term D^2 überhaupt nicht existirt.

Wenn nun eine Syzygante (440) dennoch existiren sollte, so fehlen in derselben jedenfalls die 4 ersten Terme in der linken Seite der Identität (I). Allein durch die Substitutionen

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

und

$$a_1 = a_2 = a_4 = b_0 = b_2 = b_3 = 0$$

kommt man leicht zu dem Resultate, dass auch λ_5 und λ_6 verschwinden müssen und da der übrigbleibende Theil der Syzygante die Invariante E nicht mehr enthält und zwischen 7 Invarianten keine Relation besteht, so folgt, dass keine andere Grundsyzygante (440) existiren kann.

Damit ist dann der strenge Beweis geliefert, dass der von Hammond aufgestellte Satz nicht allgemein gültig ist.

München, den 10. October 1889.

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

Par

G. Peano à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y, uniformes et continues d'une variable (réelle) t, qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0, 1)$, prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continue, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2; et considérons une suite illimitée de chiffres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

(Pour ce moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par $\mathbf{k}a$ le chiffre $2 - a$, *complementaire* de a; c'est-à-dire, posons

$$\mathbf{k}0 = 2, \quad \mathbf{k}1 = 1, \quad \mathbf{k}2 = 0.$$

Si $b = \mathbf{k}a$, on deduit $a = \mathbf{k}b$; on a aussi $\mathbf{k}a \equiv a$ (mod. 2).

Désignons par $\mathbf{k}^n a$ le résultat de l'operation $\mathbf{k}$ répétée n fois sur a. Si n est pair, on a $\mathbf{k}^n a = a$; si n est impair, $\mathbf{k}^n a = \mathbf{k}a$. Si $m \equiv n$ (mod. 2), on a $\mathbf{k}^m a = \mathbf{k}^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots, \quad Y = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les rélations

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = \mathbf{k}^{a_1} a_2, \quad b_2 = \mathbf{k}^{a_2} a_3, \quad c_2 = \mathbf{k}^{a_1+a_3} a_4, \quad b_3 = \mathbf{k}^{a_2+a_4} a_5, \ldots$$

$$b_n = \mathbf{k}^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = \mathbf{k}^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Donc b_n, $n^{\text{ième}}$ chiffre de X, est égal à a_{2n-1}, $n^{\text{ième}}$ chiffre de rang impaire dans T, ou à son complementaire, selon que la somme $a_2 + \cdots + a_{2n-2}$ des chiffres de rang pair, qui le precedent, est paire ou impaire. Analoguement pour Y. On peut aussi écrire ces rélations sous la forme:

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = \mathbf{k}^{b_1} c_1, \quad a_3 = \mathbf{k}^{c_1} b_2, \quad a_4 = \mathbf{k}^{b_1+b_2} c_2, \ldots,$$

$$a_{2n-1} = \mathbf{k}^{c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}} b_n, \quad a_{2n} = \mathbf{k}^{b_1+b_2+\cdots+b_n} c_n.$$

Si l'on donne la suite T, alors X et Y résultent déterminées, et si l'on donne X et Y, la T est déterminée.

Appelons *valeur* de la suite T la quantité (analogue à un nombre décimal ayant même notation)

$$t = \text{val.}\, T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots.$$

A chaque suite T correspond un nombre t, et l'on a $0 \leq t \leq 1$. Réciproquement les nombres t, dans l'intervalle $(0, 1)$ se divisent en deux classes:

α) Les nombres, différents de 0 et de 1, qui multipliès par une puissance de 3 donnent un entier; il sont représentés par deux suites, l'une

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n\, 2\, 2\, 2 \ldots$$

où a_n est égal à 0 ou à 1; l'autre

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n'\, 0\, 0\, 0 \ldots$$

où $a_n' = a_n + 1$.

β) Les autres nombres; ils sont représentés par une seule suite T.

Or la correspondence établie entre T et (X, Y) est telle que si T et T' sont deux suites de forme différente, mais val. $T =$ val. T', et si X, Y sont les suites correspondantes à T, et X', Y' celles correspondantes à T', on a

$$\text{val.}\, X = \text{val.}\, X', \quad \text{val.}\, Y = \text{val.}\, Y'.$$

En effet considérons la suite

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n}\, 2\, 2\, 2\, 2 \ldots$$

où a_{2n-1} et a_{2n} ne sont pas toutes deux égales à 2. Cette suite peut répresenter tout nombre de la classe α. Soit

$$X = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n b_{n+1} \ldots$$

on a:

$$b_n = \mathrm{k}^{a_2+\cdots+a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = \mathrm{k}^{a_2+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n}}\, 2.$$

Soit T' l'autre suite dont la valeur coincide avec val. T,

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1}' a_{2n}'\, 0\, 0\, 0\, 0 \ldots$$

et

$$X' = 0,\ b_1 \ldots b_{n-1} b_n' b_{n+1}' \ldots.$$

Les premiers $2n - 2$ chiffres de T' coincident avec ceux de T; donc les premiers $n - 1$ chiffres de X' coincident aussi avec ceux de X; les autres sont déterminés par les rélations

$$b_n' = \mathrm{k}^{a_2+\cdots+a_{2n-2}} a_{2n-1}', \quad b_{n+1}' = b_{n+2}' = \cdots = \mathrm{k}^{a_2+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n}'}\, 0.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $a_{2n} < 2$, ou $a_{2n} = 2$.

Si a_{2n} a la valeur 0 ou 1, on a $a'_{2n} = a_{2n} + 1$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1}$, $b'_n = b_n$,

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a'_{2n} = a_2 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n} + 1,$$

d'où

$$b'_{n+1} = b'_{n+2} = \cdots = b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^{a_2 + \cdots + a_{2n}}\, 2.$$

Dans ce cas les deux séries X et X' coincident en forme et en valeur.

Si $a_{2n} = 2$, on a $a_{2n-1} = 0$ ou 1, $a'_{2n} = 0$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, et en posant

$$s = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}$$

on a

$$b_n = \mathbf{k}^s a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b^{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^s 2,$$

$$b'_n = \mathbf{k}^s a'_{2n-1}, \quad b'_{n+1} = b'_{n+2} = \cdots = \mathbf{k}^s 0.$$

Or, puisque $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, les deux fractions $0, a_{2n-2}\, 222\ldots$ et $0, a'_{2n-1}\, 0\,0\,0 \ldots$ ont la même valeur; en faisant sur les chiffres la même opération $\mathbf{k}^s$ on obtient les deux fractions $0, b_n b_{n+1} b_{n+2} \ldots$ et $0, b'_n b'_{n+1} b'_{n+2} \ldots$, qui ont aussi, comme l'on voit facilement, la même valeur; donc les fractions X et X', bien que de forme différente, ont la même valeur.

Analoguement on prouve que val. $Y =$ val. Y'.

Donc si l'on pose $x =$ val. X, et $y =$ val. Y, on déduit que x et y sont deux fonctions uniformes de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont continues; en effet si t tend à t_0, les $2n$ premiers chiffres du développement de t finiront par coincider avec ceux du développement de t_0, si t_0 est un β, ou avec ceux de l'un des deux développements de t_0, si t_0 est un α; et alors les n premiers chiffres de x et y correspondantes à t coincideront avec ceux des x, y correspondantes à t_0.

Enfin à tout couple (x, y) tel que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ correspond au moins un couple de suites (X, Y), qui en expriment la valeur; à (X, Y) correspond une T, et à celle-ci t; donc on peut toujours déterminer t de manière que les deux fonctions x et y prennent des valeurs arbitrairement données dans l'intervalle $(0, 1)$.

On arrive aux mêmes consequences si l'on prend pour base de numération un nombre impaire quelconque, au lieu de 3. On peut prendre aussi pour base un nombre pair, mais alors il faut établir entre T et (X, Y) une correspondence moins simple.

On peut former un arc de courbe continue qui remplit entièrement un cube. Faisons correspondre à la fraction (en base 3)

$$T = 0, \; a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

les fractions

$$X = 0,\, b_1 b_2 \ldots, \quad Y = 0,\, c_1 c_2 \ldots, \quad Z = 0,\, d_1 d_2 \ldots$$

où

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = \mathbf{k}^{b_1} a_2, \quad d_1 = \mathbf{k}^{b_1 + c_1} a_3, \quad b_2 = \mathbf{k}^{c_1 + d_1} a_4, \ldots$$

$$b_n = \mathbf{k}^{c_1 + \cdots + c_{n-1} + d_1 + \cdots + d_{n-1}} a_{3n-2},$$

$$c_n = \mathbf{k}^{d_1 + \cdots + d_{n-1} + b_1 + \cdots + b_n} a_{3n-1},$$

$$d_n = \mathbf{k}^{b_1 + \cdots + b_n + c_1 + \cdots + c_n} a_{3n}.$$

On prouve que $x = \text{val}.\, X$, $y = \text{val}.\, Y$, $z = \text{val}.\, Z$ sont des fonctions uniformes et continues de la variable $t = \text{val}.\, T$; et si t varie entre 0 et 1, x, y, z prennent tous les ternes de valeurs qui satisfont aux conditions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

M. Cantor, (Journal de Crelle, t. 84, p. 242) a démontré qu'on peut établir une correspondence univoque et réciproque (unter gegenseitiger Eindeutigkeit) entre les points d'une ligne et ceux d'une surface. Mais M. Netto (Journal de Crelle, t. 86, p. 263), et d'autres ont démontré qu'un telle correspondence est nécessairement discontinue. (Voir aussi G. Loria, *La definizione dello spazio ad n dimensioni ... secondo le ricerche di G. Cantor*, Giornale di Matematiche, 1877). 1887 Dans ma Note on démontre qu'on peut établir d'un coté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondence n'est point univoquement réciproque, car aux points (x, y) du carré, si x et y sont des β, correspond bien une seule valeur de t, mais si x, ou y, ou toutes les deux sont des α, les valeurs correspondantes de t sont en nombre de 2 ou de 4.

On a démontré qu'on peut enfermer un arc de courbe plane continue dans une aire arbitrairement petite:

1) Si l'une des fonctions, p. ex. la x coincide avec la variable independente t; on a alors le théorème sur l'integrabilité des fonctions continues.

2) Si les deux fonctions x et y sont à variation limitée (Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 599). Mais, comme démontre l'exemple précédent, cela n'est pas vrai si l'on suppose seulement la continuité des fonctions x et y.

Ces x et y, fonctions continues de la variable t, manquent toujours de dérivée.

Turin, Janvier 1890.

Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr.

Vierter Theil (Schluss). *)

Die Transformationsgruppen zerfallen nach ihrer Zusammensetzung in zwei grosse Abtheilungen, jenachdem sie Kegelschnittsgruppen zu Untergruppen haben oder nicht. Die Gruppen der letzteren Art haben eine sehr hervortretende Eigenschaft, welche schon längst von den Herren Lie und Engel erkannt worden ist. Zu denselben gehören diejenigen, welche ich als Gruppen vom Range null bezeichnet und in § 9 (Bd. 31. S. 285—290) genauer untersucht habe. Diese bilden die eine Classe von hierhergehörigen Gruppen. Wie sich im Folgenden zeigt, bestimmen alle weiteren Gruppen dieser Abtheilung eine zweite Classe, da sie eine Gruppe vom Range null zur Hauptuntergruppe haben. Die Gruppen der ersten Classe haben nur solche zweigliedrige Untergruppen, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind; dagegen kommen in den Gruppen der zweiten Classe auch zweigliedrige Untergruppen mit einer Haupttransformation vor; alsdann gehören aber alle Haupttransformationen bereits einer Gruppe vom Range null an.

In der zweiten Abtheilung, welche die Gruppen mit Kegelschnitts-Untergruppen umfasst, unterscheiden wir wieder zwei Classen. Zu der ersten Classe rechnen wir diejenigen Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind; die Gruppen der zweiten Classe haben die Eigenschaft, dass sie zwar nicht selbst ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, dass aber die wiederholte Aufsuchung der Hauptuntergruppe zu einer Gruppe von dieser Eigenschaft führt. Wenn wir die Gruppen der letzteren Art sämmtlich derselben Classe einreihen, ohne zu be-

---

*) Der erste Theil ist veröffentlicht in den Annalen Bd. 31, S. 252—290, der zweite Bd. 33, S. 1—48, der dritte Bd. 34, S. 57—122.

rücksichtigen, wie oft wir die angegebene Operation wiederholen müssen, so nöthigt hierzu die grosse Aehnlichkeit in der Zusammensetzung; in diesem Falle ist nämlich, wie § 30 lehrt, die Hauptuntergruppe entweder einfach oder halbeinfach oder durch Zusammensetzung einer einfachen (resp. halbeinfachen) mit einer solchen vom Range null gebildet. Die erste Classe theilen wir endlich noch in drei Schaaren: a) einfache, b) halbeinfache, c) solche, welche aus einer einfachen oder halbeinfachen mit einer invarianten Untergruppe vom Range null gebildet sind.

Die Unterschiede der beiden Abtheilungen werden in § 28 genauer dargelegt. Hier möge es gestattet sein, auf einen mehr äusserlichen Punkt aufmerksam zu machen. Sucht man alle Gruppen der zweiten Art von gegebener Gliederzahl, so erhält man eine endliche Zahl von verschiedenen Zusammensetzungen; man kann aber eine endliche Zahl von Typen aufstellen und weiss, dass jede Gruppe der bezeichneten Art und der angegebenen Gliederzahl einem dieser Typen holoedrisch isomorph sein muss. So sind für $r = 4$ alle zur zweiten Abtheilung gehörigen Gruppen von gleicher Zusammensetzung. Diese Eigenschaft besteht nicht für die Gruppen der ersten Abtheilung, wofern die Gliederzahl grösser als zwei ist; vielmehr giebt es dann bei gegebener Gliederzahl immer unendlich viele Arten der Zusammensetzung. Lassen wir z. B. durch die drei Gleichungen $(X_1 X_2) = 0$, $(X_3 X_1) = X_1$, $(X_3 X_2) = \alpha X_2$ die Zusammensetzung einer dreigliedrigen Gruppe bestimmt sein, so darf hier α jeden reellen oder imaginären Werth annehmen. Zwar lässt die Umwandlung von α in seinen reciproken Werth die Zusammensetzung ungeändert; aber im allgemeinen entspricht verschiedenen Werthen von α auch eine verschiedene Zusammensetzung.

Hiermit dürfte ein Unterschied zusammenhängen, welcher in meiner Arbeit hervortritt. Für die Gruppen der zweiten Art können in sehr vielen Fällen alle Coefficienten c, durch welche die Zusammensetzung bestimmt ist, vollständig angegeben werden; jedenfalls aber lehren die gefundenen Resultate, die grössere Zahl dieser Coefficienten unmittelbar niederzuschreiben und die fehlenden mit Leichtigkeit zu berechnen. Das ist mir für die erste Classe nicht möglich geworden; hier bietet vielmehr die explicite Darstellung einige Schwierigkeit, wofern die Gliederzahl irgend beträchtlich gross ist. Ich beabsichtige jedoch nicht, die Zusammensetzung der Gruppen der ersten Abtheilung näher zu untersuchen, vielmehr gedenke ich, mit der vorliegenden Arbeit meine Veröffentlichungen über die Zusammensetzung der Gruppen vorläufig zu schliessen. Ich glaube, dass die vorliegenden vier Theile als ein einheitliches Ganze betrachtet werden können, wenngleich ich nicht leugnen will, dass ich an einzelnen Stellen kleine Aenderungen

vornehmen würde, wenn ich die ersten Theile jetzt in ihre definitive Form zu bringen hätte.

Auch auf die Lehre von den Untergruppen gehe ich nicht näher ein, als es bereits im Verlauf der Arbeit selbst nöthig war. Diese Lehre ist, wie Herr Lie längst erkannt hat, mit der Lehre von der Zusammensetzung auf's engste verknüpft, und diese Verbindung tritt in meinen Untersuchungen sehr deutlich hervor, da mein Ausgangspunkt durch das Problem gebildet wird, alle zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen eine gegebene eingliedrige Untergruppe angehört. Dieselben Principien, welche ich in meinen Arbeiten anwenden musste, führen mit besonderer Leichtigkeit zur Lösung des Problems, alle Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu bestimmen, denen eine gegebene Transformation angehört. Die Lösung dieser Aufgabe bietet nach den mitgetheilten Resultaten keinerlei Schwierigkeit, wenn die gegebene eingliedrige Untergruppe ganz allgemeiner Natur ist. Aber auch die Wahl einer speciellen eingliedrigen Untergruppe ändert die Untersuchungsmethode nicht wesentlich. Ich glaube jedoch, es bei diesem Hinweis bewenden lassen zu sollen.

Dagegen möchte ich einige weitere Bemerkungen hier beifügen.

Mit Herrn Lie bezeichne ich mehrere Gruppen als gleich zusammengesetzt (holoedrisch isomorph), wenn alle Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ durch passende Wahl der bestimmenden eingliedrigen Untergruppen gleich gemacht werden können; in diesem Sinne wird die Zusammensetzung durch die Coefficienten c bestimmt. Ich habe mir nie verhehlt, dass dieser Name Nachtheile mit sich bringt, welche darauf beruhen, dass die Gruppen in einfache und zusammengesetzte eingetheilt, und doch von der Zusammensetzung der einfachen Gruppen gesprochen wird. Dennoch glaube ich nicht, dass der eingeführte Name beseitigt werden kann. Aber es dürfte sich empfehlen, einen zweiten Ausdruck für diesen Begriff zu haben. Desshalb spreche ich zuweilen von der „Gestaltung" der Gruppen und gebrauche „gleich gestaltet" und „gleich zusammengesetzt" als Synonyma.

Vier Zahlen sind es, welche in den jetzt abschliessenden Arbeiten stets in derselben Weise gebraucht werden. Einmal die Zahl r als die Gliederzahl der Gruppe; dann die Zahl p, welche die Gliederzahl für die Hauptuntergruppe angiebt. Hieran schliessen sich zwei weitere Zahlen l und k, welche etwas näher besprochen werden sollen. Die Zahl l ist (Bd. 31, S. 266) definirt als die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{r-1}$ ausdrücken lassen. (Wenn es nachher heisst, dass sich für ein beliebiges l stets l Functionen $P_1 \dots P_l$ so wählen lassen, dass sich die $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ rational durch $P_1 \dots P_l$ ausdrücken lassen, so ist das falsch. Herr Engel machte mich darauf aufmerksam, dass diese Behauptung wahr-

scheinlich unrichtig sei, wenigstens eines Beweises bedürfe. Schon vorher hatte ich Beispiele gefunden, wo eine solche Darstellung nicht möglich ist). Bezeichnet man

$$C_{\iota\varrho} = \sum^{\alpha} \eta_\alpha c_{\alpha\iota\varrho},$$

so lassen sich, wie man leicht sieht und worauf ich an einer andern Stelle (Programm 1889) aufmerksam gemacht habe, alle ψ_ι durch Functionen

$$(1) \qquad \sum C_{\varkappa\varkappa}, \quad \sum_{\varkappa\lambda} C_{\varkappa\lambda} C_{\lambda\varkappa}, \ldots \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s} C_{\varkappa_1\varkappa_2} C_{\varkappa_2\varkappa_3} \ldots C_{\varkappa_s\varkappa_1}$$

und umgekehrt ausdrücken. Man kann daher die Zahl l auch definiren als die kleinste Zahl von Functionen, durch welche alle Functionen (1) sich darstellen lassen. Dass diese Zahl namentlich für diejenigen Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, von hervorragender Bedeutung ist, hat sich durch die früheren Untersuchungen ergeben. Indessen hat in den drei ersten Theilen (abgesehen von den §§ 10 und 19, deren Zweck darin bestand, eine Classe von Gruppen auszuschliessen) den Ausgangspunkt für die Untersuchung immer die Zahl k gegeben, welche definirt wird als die grösste Zahl, für welche alle Unterdeterminanten $(r - k + 1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante identisch verschwinden. Diese Zahl giebt die Gliederzahl für eine Untergruppe an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind und der eine ganz allgemein gewählte Transformation angehört. Dieser Zahl kommt noch eine zweite Eigenschaft zu. Man weiss, dass alle Functionen (1) Invarianten der adjungirten Gruppe sind, und dass sich deren Zahl auf l wesentliche Invarianten zurückführen lässt. Wenn aber $k > l$ ist, so hat diese Gruppe $k - l$ weitere Invarianten oder es giebt ausser den l angeführten noch weitere Lösungen der r Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \sum^{\varrho} C_{\alpha\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varrho} = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r).$$

Wenn die Gruppe in der speciellen Form gegeben ist, welche durch die charakteristische Gleichung gewonnen wird, so ist es nicht schwer, auch diese weiteren Invarianten anzugeben; indessen ist es mir bisher nicht gelungen, eine allgemeine Form für diese Functionen aufzustellen.

Der Unterschied dieser beiden Arten von Invarianten tritt in § 4 (Bd. 31, S. 268) nicht so deutlich hervor, als ich wünschen möchte; vielmehr können Angaben, welche dort gemacht sind, leicht Missverständnisse hervorrufen. Um dieselben zu beseitigen, spreche ich folgende Sätze aus, für deren Beweis ich auf § 4 verweise:

„Wenn $P(\eta)$ eine lineare Invariante der adjungirten Gruppe, also eine lineare Lösung der r Differentialgleichungen (2) ist, so stellt $P(\eta) = 0$ eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe dar.“

„Wenn die einer Gruppe adjungirte Gruppe gerade i von einander unabhängige lineare Invarianten besitzt, so ist die Hauptuntergruppe $(r - i)$-gliedrig und wird durch das Verschwinden der i linearen Invarianten dargestellt.“

Wir bezeichnen noch die l Invarianten, welche durch die Functionen (1) gegeben sind, als solche der ersten Classe, und die übrigen $k - l$ als solche zweiter Classe; dann können wir folgenden Satz beifügen:

„Für eine invariante Untergruppe $r - 1^{\text{ten}}$ Grades, welche durch das Verschwinden einer linearen Invariante der ersten Classe erhalten wird, ist der Rang um eins kleiner als der der gegebenen Gruppe; verschwindet aber eine Invariante der zweiten Classe, so ist der Rang der Untergruppe ebenso gross wie für die gegebene Gruppe selbst.“

Nachdem mehrere Resultate meiner Arbeit: Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen, (Programm 1886), in der vorliegenden Abhandlung erweitert worden sind, halte ich es für angebracht, die weiteren darin enthaltenen Sätze, soweit sie sich auf die Zusammensetzung, also auf die Coefficienten c beziehen, im folgenden zu wiederholen. Ich führe r unbeschränkt veränderliche und von einander unabhängige Grössen $u_1 \dots u_r$ ein und setze der Kürze wegen:

$$(\iota\varkappa) = \sum^{\varrho} c_{\iota\varkappa\varrho} u_\varrho;$$

ebenso soll $(0\varkappa) = u_\varkappa$, $(\varkappa 0) = -u_\varkappa$ sein. Jetzt sei aus der Reihe $1 \dots r$ irgend eine gerade Zahl $2e$ von Nummern $\alpha\beta\gamma \dots \varepsilon\zeta$ ausgewählt; dann ist bekanntlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & \dots & (\alpha\zeta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\zeta\alpha) & (\zeta\beta) & \dots & (\zeta\zeta) \end{vmatrix}$$

das Quadrat eines Ausdrucks $(\alpha\beta\gamma \dots \varepsilon\zeta)$, der auch selbständig definirt werden kann. Zugleich besteht die Gleichung:

$$(3)\quad e \cdot (\alpha\beta\gamma \cdots \zeta) = \sum^{\varrho} \{ c_{\alpha\beta\varrho}(0\gamma \cdots \zeta\varrho) + c_{\alpha\gamma\varrho}(0\delta \cdots \zeta\beta\varrho) + \cdots \},$$

wo in der Klammer auf der rechten Seite $e(2e - 1)$ Producte stehen, deren jedes erhalten wird, indem man aus den Nummern $\alpha\beta \dots \zeta$ zunächst zwei Marken $\alpha'\beta'$ beliebig auswählt und dann die übrigen $2e - 2$ Marken $\gamma' \dots \zeta'$ so hinzufügt, dass $\alpha'\beta'\gamma' \dots \zeta'$ aus $\alpha\beta\gamma \dots \zeta$ durch eine gerade Zahl von Permutationen erhalten wird.

Wählt man aus der Reihe $1 \dots r$ eine ungerade Zahl $2e+1$ von Nummern $\alpha\beta\gamma \dots \varepsilon\zeta\eta$, so erhalten wir die Formel:

$$(4)\qquad \sum_\varrho \{c_{\alpha\beta\varrho}(\gamma \dots \zeta\eta\varrho) + c_{\alpha\gamma\varrho}(\delta \dots \zeta\eta\beta\varrho) + \cdots\} = 0,$$

wo in der Klammer $e(2e+1)$ Producte stehen, welche ganz ähnlich wie oben bestimmt werden.

Die Bedingung, dass der Coefficient $\psi_1(\eta)$ von ω^{r-1} in der charakteristischen Gleichung identisch verschwindet, kann auch in der Form der r Gleichungen geschrieben werden:

$$(5)\qquad \sum_\varrho \frac{\partial(\alpha\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0 \quad (\alpha = 1 \dots r).$$

Dann folgen aber auch, wenn α, β, γ drei, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ fünf und $\alpha\beta \dots \eta$ irgend $2e+1$ verschiedene Marken der Reihe $1 \dots r$ sind, die Gleichungen:

$$\sum_\varrho \frac{\partial(\alpha\beta\gamma\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0, \quad \sum_\varrho \frac{\partial(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0 \cdots \quad \sum_\varrho \frac{\partial(\alpha\beta \dots \zeta\eta\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0.$$

Bildet man die Ausdrücke $(\alpha\beta \dots \eta)$ für die grösste Zahl $r-s$ von Nummern, für welche dieselben nicht identisch verschwinden, so werden, wenigstens im allgemeinen, s Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_s$ gefunden werden können, so dass, wenn $\alpha\beta \dots \eta$, $\varkappa \dots \nu$ eine gerade Permutation von $1 \dots \varrho$ darstellt, die Functionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_s \\ \varkappa & \lambda & \dots & \nu \end{pmatrix} = (\alpha\beta \dots \zeta\eta)$$

ist. Zugleich sind $\varphi_1 \dots \varphi_s$ Invarianten der zweiten adjungirten Gruppe

$$\sum_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial u_\iota} c_{\iota\varkappa\varrho} u_\varrho.$$

In der bezeichneten Arbeit hatte ich behauptet, dass die Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_s$ unter der Bedingung $\psi_1 = 0$ stets existiren. Ich erkannte aber schon im Frühjahr 1886, dass der Satz Ausnahmen erleidet und stellte damals die Bedingungen für seine Gültigkeit vollständig auf. Da ich jedoch den angegebenen Satz jetzt vollständig entbehren kann, habe ich diese Bedingungen nicht veröffentlicht.

§ 27.

Ein allgemeiner Satz über invariante Untergruppen.

Eine Reihe von Sätzen lässt sich leicht aus dem folgenden Theorem herleiten:

Die Hauptuntergruppe einer invarianten Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist selbst wieder eine invariante Untergruppe derselben.

Zum Beweise nehmen wir an, die gegebene Gruppe G_r habe eine invariante Untergruppe G_i; letztere sei weder ihre eigene Hauptuntergruppe, noch seien alle ihre Transformationen mit einander vertauschbar, sie habe vielmehr eine unter G_i enthaltene Hauptuntergruppe G_h. Dann behaupte ich, dass auch G_h eine invariante Untergruppe von G_r ist. Die Herleitung ist ausserordentlich einfach und stützt sich fast nur auf die hier benutzten Begriffe. Die infinitesimalen Transformationen, durch welche G_h bestimmt wird, mögen mit X_α, X_β, X_γ ... bezeichnet werden; für G_i mögen zu den Marken α, β, γ ... die Marken $\iota, \varkappa, \lambda$ ... hinzukommen, und ebenso für G_r zu den $\alpha, \beta, \gamma \dots \iota, \varkappa, \lambda \dots$ noch die Marken ϱ, σ, τ .... Wir deuten eine lineare Function der inf. Transformationen wieder dadurch an, dass wir die entsprechenden Marken in eine eckige Klammer einschliessen. Dann sind durch die gestellten Bedingungen die Gleichungen gegeben:

$$(1)\quad \begin{aligned} &(X_\alpha X_\beta) = [\alpha,\beta,\gamma\dots], \quad (X_\alpha X_\iota) = [\alpha,\beta,\gamma\dots], \quad (X_\iota X_\varkappa) = [\alpha,\beta,\gamma\dots], \\ &(X_\alpha X_\varrho) = [\alpha,\beta,\gamma\dots\iota,\varkappa,\lambda\dots], \quad (X_\iota X_\varrho) = [\alpha,\beta,\gamma\dots\iota,\varkappa,\lambda\dots]. \end{aligned}$$

Hier ist zu beweisen, dass $(X_\alpha X_\varrho) = [\alpha, \beta, \gamma \dots]$ ist. Zu dem Ende bilde man die Jacobi'schen Identitäten (α, β, ϱ), (α, ι, ϱ), $(\iota, \varkappa, \varrho)$, welche die Gleichungen nach sich ziehen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\big(X_\varrho(X_\alpha X_\beta)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \dots], \quad \big(X_\varrho(X_\alpha X_\iota)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \dots], \\ &\qquad\qquad \big(X_\varrho(X_\iota X_\varkappa)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \dots]. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass die Combinirung von irgend einer inf. Transformation mit jedem Ausdruck, zu dem man durch die Operationen $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$ und $(X_\iota X_\varkappa)$ gelangt, zu Transformationen führt, welche allein durch X_α, X_β, X_γ ... dargestellt werden können, also der G_h angehören. Da aber G_h die Hauptuntergruppe von G_i ist, so müssen die sämmtlichen Ausdrücke $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$, $(X_\iota X_\varkappa)$ ebensoviele von einander unabhängige Transformationen liefern, als G_h Glieder hat; es lässt sich also jede inf. Transformation von G_h durch die $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$, $(X_\iota X_\varkappa)$ darstellen. Wenn man also irgend eine inf. Transformation von G_h mit X_ϱ combinirt, so erhält man einen Ausdruck, welcher durch die inf. Transformationen dieser Untergruppe darstellbar ist; im Ausdruck von $(X_\alpha X_\varrho)$ sind also die X_ι, $X_\varkappa$ ... nicht enthalten, oder G_h ist bereits eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe G_r.

Wenn G_i eine invariante Untergruppe von G_r ist, so sind drei Fälle möglich: entweder ist G_i ihre eigene Hauptuntergruppe, oder alle Transformationen von G_i sind mit einander vertauschbar, oder drittens G_i enthält eine Hauptuntergruppe, welche von G_i verschieden ist. Im letzten Falle ist die so erhaltene Hauptuntergruppe für die gegebene Gruppe eine invariante Untergruppe; für diese können wir

wiederum dieselbe Unterscheidung machen und damit fortfahren, bis wir entweder zu einer invarianten Untergruppe gelangen, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, oder zu einer, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. In den letzteren Fall ist natürlich eine eingliedrige invariante Untergruppe einzuschliessen. Speciell können wir also die Sätze aufstellen:

Jede Gruppe, mit Ausnahme der einfachen Gruppen, hat entweder mindestens eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind, oder mindestens eine, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist.

Jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, mit Ausnahme der einfachen und halbeinfachen Gruppen, besitzt eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Für den Beweis des letzteren Satzes haben wir zu berücksichtigen, dass jede solche Gruppe eine invariante Untergruppe vom Range null hat; bildet man deren Hauptuntergruppe und fährt damit fort, so gelangt man zu einer Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Der Umkehrung des an die Spitze des Paragraphen gestellten Satzes geben wir folgende Form:

Wenn G_i eine invariante Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist, aber keine Untergruppe unter sich enthält, welche für die gegebene Gruppe invarianten Charakter besitzt, so müssen entweder alle Transformationen von G_i mit einander vertauschbar sein oder G_i muss ihre eigene Hauptuntergruppe sein.

Einen Theil des hier bewiesenen Satzes habe ich bereits in § 6 meiner Abhandlung: Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen (Programm unseres Lyceums für den Sommer 1886) gegeben. Nur habe ich dort beim Beweise, aber nicht in der Fassung des Satzes darauf Rücksicht genommen, dass eine invariante Untergruppe eine solche unter sich enthalten kann. Der dort angegebene Satz muss also folgende Fassung erhalten:

Wenn unter einer invarianten Untergruppe G_i keine invariante Untergruppe einer gegebenen Gruppe enthalten ist, so muss der Coefficient $\psi_1(\eta)$ von ω^{i-1} in der für G_i gebildeten charakteristischen Gleichung identisch verschwinden.

Dort ist das Verschwinden allgemein behauptet, und nur beim Beweise darauf hingedeutet, dass der Satz nur für die niedrigste invariante Untergruppe gilt.

Es sei gestattet, einige specielle Fälle des im vorstehenden bewiesenen allgemeinen Satzes anzuführen. Wenn eine Gruppe G_r eine zweigliedrige invariante Untergruppe besitzt, so sind deren Trans-

formationen entweder mit einander vertauschbar, oder das Hauptelement der Untergruppe ist eine invariante eingliedrige Untergruppe für G_r. Besitzt eine Gruppe eine invariante Untergruppe von drei, aber nicht von weniger Parametern, so ist letztere entweder eine Kegelschnittsgruppe oder ihre Transformationen sind sämmtlich mit einander vertauschbar. Die Transformationen einer viergliedrigen invarianten Untergruppe einer Gruppe, welche keine in der viergliedrigen enthaltene Untergruppe zur invarianten Untergruppe hat, sind mit einander vertauschbar.

§ 28.

Kegelschnittsgruppen als Untergruppen.

Aus den Entwicklungen des dritten Theiles (Annalen Bd. 34, S. 107) folgt, dass jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, einfache Gruppen zu Untergruppen hat; der zweite Theil lehrt aber, dass jede einfache Gruppe von beliebigem Range wiederum einfache Gruppen des Ranges eins enthält; somit folgt:

Jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, enthält Kegelschnittsgruppen.

Dabei darf man jedoch im allgemeinen eine Transformation der gegebenen Gruppe nicht ganz beliebig wählen, wenn sie einer in ihr enthaltenen Kegelschnittsgruppe angehören soll. Das ist vielmehr nur bei einer ganz bestimmten Classe von solchen Gruppen der Fall, nämlich den in den §§ 7 u. 8 (Bd. 31, S. 278 u. S. 282) angegebenen Gruppen vom Range eins für welche die charakteristische Gleichung im Allgemeinen nur eine einzige verschwindende Wurzel besitzt. Welche weiteren Bedingungen bei den übrigen Gruppen erfüllt sein müssen, soll uns hier nicht beschäftigen. Wir wollen vielmehr jetzt zu denjenigen Gruppen übergehen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, und annehmen, eine solche enthalte Kegelschnittsgruppen unter sich. Soll jetzt eine Transformation einer Kegelschnittsgruppe angehören, welche Untergruppe zu der gegebenen ist, so darf sie wiederum nicht beliebig gewählt werden, sondern sie muss zunächst der Hauptuntergruppe der gegebenen Gruppe angehören. Es gilt nämlich der Satz:

Jede Kegelschnittsgruppe, welche eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist, gehört ihrer Hauptuntergruppe an.

Die gegebene Gruppe werde durch $X_1 \dots X_r$, die Kegelschnittsgruppe durch $\sum \eta_\iota' X_\iota$, $\sum \eta_\iota'' X_\iota$, $\sum \eta_\iota''' X_\iota$ bestimmt. Wenn dann $\varkappa, \lambda, \mu$ irgend eine gerade Permutation der Zahlen $1, 2, 3$ ist, so muss sein:

$$(1) \quad \left(\sum \eta_\iota^{(\lambda)} X_\iota, \ \sum \eta_\iota^{(\mu)} X_\iota\right) = \sum^\iota (a_\varkappa \eta_\iota' + b_\varkappa \eta_\iota'' + c_\varkappa \eta_\iota''') X_\iota$$

und die aus den 9 Coefficienten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ gebildete Determinante muss von null verschieden sein. Nach der Definition der Hauptuntergruppe gehört die rechte Seite von (1) derselben für $\varkappa = 1, 2, 3$ an und da die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so muss auch jede in der Kegelschnittsgruppe enthaltene eingliedrige Untergruppe der Hauptuntergruppe angehören.

Dieser Satz kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

Wenn eine in einer Gruppe G enthaltene Transformation einer Untergruppe U angehört, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss sie zugleich der Hauptuntergruppe H von G angehören.

Wieder sei G durch $X_1 \dots X_r$, U durch $Y_1 \dots Y_m$ bestimmt, und es seien $Y_1 \dots Y_m$ linear durch $X_1 \dots X_r$ darstellbar. Zugleich muss jedes $(Y_\iota Y_\varkappa)$ durch $Y_1 \dots Y_m$ ausgedrückt werden können und umgekehrt müssen alle $Y_1 \dots Y_m$ sich durch eine passend gewählte Anzahl verschiedener Ausdrücke $(Y_\iota Y_\varkappa)$ darstellen lassen. Da H die Hauptuntergruppe von G ist, müssen alle Transformationen $(Y_\iota Y_\varkappa)$ der Gruppe H angehören, folglich auch $Y_1 \dots Y_m$, was bewiesen werden sollte.

Die Gruppen können in zwei Classen eingetheilt werden: die der ersten Classe besitzen solche Untergruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, die der zweiten besitzen solche nicht. Speciell können wir auch sagen, die Gruppen der ersten Classe enthielten Kegelschnittsgruppen, die der zweiten Classe nicht. Es handelt sich jetzt darum, zu entscheiden, wann der eine und wann der andere Fall eintritt, und im ersten Falle alle Untergruppen der bezeichneten Art zu bestimmen. Diese beiden Aufgaben werden in folgender Weise gelöst: Man suche zu der gegebenen Gruppe G die Hauptuntergruppe, d. h. diejenige Gruppe, welche durch die Transformationen $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmt wird. Wenn diese Gruppe mit der gegebenen identisch ist, so gehört die Gruppe der ersten Classe an. Im andern Falle möge H_1 die Hauptuntergruppe sein; deren Hauptuntergruppe sei H_2, deren H_3 u. s. w. Nun ist, wenn nicht H_2 mit H_1 resp. H_3 mit H_2 identisch ist, die Gliederzahl von H_2 kleiner als die von H_1 und die von H_3 wieder mindestens um eins kleiner als die von H_2. Somit führt dieser Process nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen entweder auf eine Gruppe H_m, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, oder auf eine solche, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Im ersten Falle ist H_m selbst eine Untergruppe der betrachteten Art, im zweiten Falle können solche überhaupt nicht vorkommen.

Sobald man die Darstellung der Ausdrücke $(X_\iota X_\varkappa)$ *durch die* $X_1 \dots X_r$ *kennt, erfordert die Entscheidung der Frage, ob die Gruppe Kegelschnittsgruppen enthält oder nicht, nur ganz einfache Eliminationen.*

Wenn der eben angegebene Process auf eine Gruppe H_m führt, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss nach den vorangegangenen Entwicklungen jede derartige Untergruppe ganz in H_m enthalten sein. Die Aufgabe, alle derartigen Untergruppen von G zu finden, führt also auf das Problem:

In einer vorgelegten Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, alle Untergruppen zu bestimmen, denen dieselbe Eigenschaft zukommt.

Die Lösung dieses Problems gehört nicht hierher, es genüge deshalb, folgendes Ergebniss anzugeben:

Wenn eine Gruppe Kegelschnittsgruppen enthält, ohne ihre eigene Hauptuntergruppe zu sein, so sind alle ihre Untergruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, in einer ganz bestimmten Untergruppe enthalten, der dieselbe Eigenschaft zukommt.

Da wir uns im folgenden noch besonders mit den hier charakterisirten Gruppen beschäftigen werden, so wird es nicht nothwendig sein, auf diejenige Darstellung dieser Gruppen einzugehen, welche sich aus den vorstehenden Entwicklungen ergiebt. Wir wollen jetzt zu der zweiten Classe von Gruppen übergehen; für dieselben liefert die vorangehende Untersuchung folgenden Satz:

Wenn eine Gruppe keine Kegelschnittsgruppe enthält, so muss ihre Hauptuntergruppe weniger Glieder enthalten als die gegebene Gruppe, und deren Hauptuntergruppe wieder weniger Glieder u. s. f.,

oder in andern Worten:

Zu einer Gruppe G, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, suche man die Hauptuntergruppe H_1, *zu dieser die Hauptuntergruppe* H_2 *u. s. w. Dann wird die Gliederzahl jedesmal mindestens um eins vermindert, und man gelangt schliesslich zu einer Untergruppe* H_m, *deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.*

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist jede der so gefundenen Untergruppen $H_1, H_2 \dots H_m$ eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe G. Um daher die Gestaltung der Gruppe G darzustellen, kann man, wenn H_m r_1-gliedrig ist, r_1 inf. Transformationen $X_{\iota_1}, X_{\varkappa_1} \dots$ zur Darstellung von H_m benutzen. Zur Darstellung der r_2-gliedrigen Gruppe H_{m-1} füge man $r_2 - r_1$ Transformationen $X_{\iota_2}, X_{\varkappa_2} \dots$ hinzu u. s. w. Endlich mögen zur Bestimmung von H_1 noch die inf. Transformationen $X_{\iota_m}, X_{\varkappa_m} \dots$ hinzutreten. Eine ganz beliebige inf. Transformation von G möge mit X_ϱ bezeichnet werden, und dabei möge es gleichgültig sein, ob dieselbe einer der Untergruppen $H_1 \dots H_m$ angehört oder nicht. Wird diese Bezeichnung zu

grunde gelegt, so gelten folgende Relationen, in denen die eckigen Klammern wieder lineare homogene Gleichungen bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
&(X_{\iota_1}\, X_{\varkappa_1}) = 0, \quad (X_{\iota_1}\, X_\varrho) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots], \quad (X_{\iota_2}\, X_{\varkappa_2}) = [\iota_1, \varkappa_1, \ldots],\\
&(X_{\iota_2}\, X_\varrho) \;= [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots], \quad (X_{\iota_3}\, X_{\varkappa_3}) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots],\\
&(X_{\iota_3}\, X_\varrho) \;= [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots \iota_3, \varkappa_3 \ldots], \ldots\\
&(X_{\iota_m} X_{\varkappa_m}) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_{m-1}, \varkappa_{m-1} \ldots],\\
&(X_{\iota_m} X_\varrho) \;= [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots \iota_m, \varkappa_m \ldots].
\end{aligned}
$$

Wenn man statt der Hauptuntergruppen lieber invariante Untergruppen einführen will, so kann man folgenden Satz aussprechen, den bereits Herr Engel bewiesen hat:

Jede r-gliedrige Gruppe, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, besitzt mindestens eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-1}, diese wieder mindestens eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-2} u. s. w.

Wenn nämlich die Hauptuntergruppe H_1 von G gerade $r-1$ Glieder hat, so ist sie selbst die einzige $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe. Hat aber H_1 nur $r-\alpha$ Glieder, so füge man zu H_1 noch $\alpha - 1$ von einander und von H_1 unabhängige inf. Transformationen aus G hinzu; dann ist die so gebildete Untergruppe sicherlich invariant. Diese ist aber von derselben Eigenschaft; daher gelangt man zu G_{r-2}, G_{r-3} ....

Gruppen der zuletzt betrachteten Art sind zuerst von Herrn Lie (Archiv for Math. B. 3, S. 112—116, 1878) und dann von Herrn Engel (Leipziger Berichte 1886 S. 83—94) untersucht worden. Die neuen Resultate, welche ich in diesem Paragraphen hinzufügen konnte, brauche ich wohl nicht besonders hervorzuheben, da sie bei Vergleichung der angegebenen Arbeiten mit den vorstehenden Entwicklungen sofort zu tage treten.

§ 29.

Welche Gruppen können Hauptuntergruppen sein?

Um die Hauptuntergruppe einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe zu untersuchen, nehmen wir zuvörderst an, die charakteristische Gleichung habe für jedes beliebige System in der r-gliedrigen Gruppe mindestens k verschwindende Wurzeln und zugleich seien alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante identisch gleich null. Dann kann man den $r-k$ nicht verschwindenden Wurzeln, welche die Gleichung für eine ganz allgemeine inf. Transformation hat, ebensoviele von einander unabhängige inf.

Transformationen zuordnen. Es ist selbstverständlich, dass diese der Hauptuntergruppe angehören; aber es fragt sich, unter welchen Bedingungen die Hauptuntergruppe nur $(r-k)$-gliedrig ist, also durch diese $r-k$ Transformationen vollständig bestimmt wird. Das ist nur möglich, wenn die Hauptuntergruppe vom Range null ist; es gilt nämlich der Satz:

Sucht man für irgend eine Transformation die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ordnet jeder nicht verschwindenden Wurzel so viele infinitesimale Transformationen zu, als der Grad der Wurzel beträgt, so *genügen die so erhaltenen Transformationen nur dann zur Bestimmung der Hauptuntergruppe, wenn letztere vom Range null ist.*

Die inf. Transformation allgemeiner Beschaffenheit, für welche die charakteristische Gleichung gebildet ist, möge mit X_r und die den nichtverschwindenden Wurzeln zugeordneten Transformationen mit $X_1 \dots X_{r-k}$ bezeichnet werden; zugleich seien $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Marken der Reihe $1 \dots r-k$. Dann wird jedes $c_{\iota\varkappa\lambda}$ bestimmt verschwinden, wenn die letzte Marke λ nicht gleich einer Nummer $1 \dots r-k$ ist.

Aus den Entwicklungen der §§ 7 und 12 ergiebt sich sofort, dass unter den gemachten Voraussetzungen $c_{\alpha\lambda\lambda} = 0$ und ebenso

$$\sum\nolimits^{\lambda} c_{\alpha\mu\lambda}\, c_{\beta\lambda\mu} = 0$$

ist. Auf dem dort angegebenen Wege kann man weiter gehen und die beiden hingeschriebenen Formeln erweitern. Daraus folgt dann der angegebene Lehrsatz. Ich ziehe es aber vor, einen andern Beweis zu liefern und nur dasjenige Gleichungssystem zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ zu benutzen, welches in § 1 (Bd. 31, S. 257) aufgestellt und zur Grundlage für die Untersuchung der charakteristischen Gleichung gemacht worden ist. Um die allgemeine Gleichung dieser Art aufzustellen, wähle man aus den Nummern $1 \dots r$ einmal $s+1$ feste Marken $\alpha, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_s$ aus und lasse dann weitere $s+1$ Marken $\iota, \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_s$ alle beliebigen Werthe von $1 \dots r$ annehmen, und bilde die Summe:

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \sum \big(& c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} + c_{\alpha\beta_2\iota}\, c_{\beta_3\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_4\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1} \\ &+ \cdots + c_{\alpha\beta_s\iota}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_{s-1}\varkappa_s\varkappa_1}\big)\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} = 0, \end{aligned}$$

wo von den s Producten, welche in der Klammer stehen, jedes folgende aus dem vorangehenden durch cyklische Vertauschung der Marken $\beta_1 \dots \beta_s$ erhalten wird.

Zunächst führen wir den Beweis nur unter der Voraussetzung durch, dass alle Elementartheiler der charakteristischen Gleichung vom ersten Grade sind. Wenn dann α eine der Marken $1 \dots r-k$ ist, so ist $c_{r\alpha\beta}$ für $\alpha \gtrless \beta$ gleich null, dagegen für $\alpha = \beta$ gleich ω_α. Da der Voraussetzung nach durch die Marken $1 \dots r-k$ eine Unter-

gruppe bestimmt wird und die Gleichung (1) für jede Gruppe gültig ist, so können wir Besonderheiten der vorliegenden Untergruppe nur dadurch erhalten, dass wir einige der festen Marken einen Werth annehmen lassen, welcher zu einer mit X_r vertauschbaren Transformation gehört. Nun wissen wir aber im allgemeinen nicht, wie viele solcher von einander unabhängigen Transformationen vorhanden sind, und unser Resultat soll auch für $k = 1$ gelten. Demnach haben wir einige der Marken $\alpha, \beta_1 \dots \beta_s$ gleich r zu setzen. Für $\alpha = r$ folgt aus (1):

$$(\omega_{\beta_1} + \cdots + \omega_{\beta_s}) \sum_{\varkappa_1 \dots \varkappa_s} c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0,$$

so dass entweder der erste oder der zweite Factor verschwinden muss. Da es uns aber darauf ankommt, das allgemeine Verschwinden des zweiten Factors zu beweisen, so müssen wir einen ziemlich weitläufigen Weg einschlagen. Wir setzen daher in (1) zunächst $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = r$ und erhalten:

$$\sum^{\varkappa} c_{\alpha \varkappa \varkappa} \, \omega_{\varkappa}^{s-1} = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes s gilt, so folgt:

$$c_{\alpha \varkappa \varkappa} + c_{\alpha \varkappa_1 \varkappa_1} + c_{\varkappa \varkappa_2 \varkappa_2} + \cdots = 0,$$

wofern $\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa_1} = \omega_{\varkappa_2} = \cdots$ ist.

Ebenso wähle man jetzt für $\beta_2, \beta_3 \dots \beta_s$ den Werth r, lasse aber α und $\beta_1 \, (= \beta)$ zwei beliebige Nummern der Reihe $1 \dots r - k$ sein. Dann muss im ersten Producte $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \cdots = \varkappa_s \, (= \varkappa)$ gesetzt werden, und wir erhalten jedes $c_{\alpha \beta \iota}$ multiplicirt mit

$$\sum^{\varkappa} c_{\iota \varkappa \varkappa} \, \omega_{\varkappa}^{s-1},$$

was nach dem Vorstehenden verschwindet. Die weiteren Producte liefern:

$$\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2} c_{\alpha \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta \varkappa_2 \varkappa_1} \left(\omega_{\varkappa_2}^{s-2} + \omega_{\varkappa_2}^{s-3} \omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-2}\right) = 0,$$

und da diese Gleichung wieder für jedes s gilt, folgt

$$\sum^{\lambda} \left(c_{\alpha \varkappa \lambda} \, c_{\beta \lambda \varkappa} + c_{\nu \varkappa_1 \lambda} \, c_{\beta \lambda \varkappa_1} + \cdots\right) = 0$$

wenn ist:

$$\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa_1} = \cdots.$$

Lässt man α, β_1, β_2 Marken der Reihe $1 \dots r - k$, dagegen $\beta_3 = \cdots = \beta_s = r$ sein, so wird im ersten Product in (1) das $c_{\alpha \beta_1 \iota}$ multiplicirt mit

$$\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2} c_{\iota \varkappa_1 \varkappa_2} \, c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_1} \, \omega_{\varkappa_1}^{s-2},$$

im zweiten das $c_{\alpha\beta_2\iota}$ mit

$$\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_1}\, \omega_{\varkappa_2}^{s-2},$$

welche beiden Producte bereits als verschwindend nachgewiesen sind. Wir erhalten somit die neue Gleichung:

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_1} (\omega_{\varkappa_2}^{s-3} + \omega_{\varkappa_2}^{s-4}\omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_2}\omega_{\varkappa_1}^{s-4} + \omega_{\varkappa_1}^{s-3}) = 0.$$

Wenn man will, kann man hier andere Marken, etwa α, β_1, β_3 der Reihe $1 \ldots r-k$ angehören lassen und erhält eine andere Gleichung. Jedenfalls gilt aber die hingeschriebene Gleichung für jedes s, und man schliesst wieder, dass die Summe

$$\sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_1}$$

verschwindet, wofern die Summation nach $\varkappa_1$ nur über alle Marken erstreckt ist, zu denen die einer festen ω_γ gleichen Wurzeln gehören, während die Summation nach $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sich über $1 \ldots r-k$ erstreckt.

In gleicher Weise kann man beliebig fortfahren; dann beweist man auf dem mehrfach durchgeführten Wege, dass die Gleichung

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} = 0 \tag{2}$$

nicht nur richtig ist, wenn man die Summation von allen $\varkappa_1 \ldots \varkappa_i$ über die Marken $1 \ldots r-k$ erstreckt, sondern auch, wenn man für $\varkappa_1$ nur diejenigen Marken nimmt, für welche die zugehörige Wurzel denselben Werth hat.

Wir bezeichnen die Summe

$$\sum_1^n{}^{\varrho}\, \eta_\varrho\, c_{\varrho\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad C_{\alpha\beta},$$

wenn die Summation über alle Marken $1 \ldots r$ erstreckt wird; dagegen soll die Summe

$$\sum_1^{r-k}{}^{\varrho}\, \eta_\varrho\, c_{\varrho\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad C'_{\alpha\beta}$$

bezeichnet werden, wenn die Summation nach ϱ auf die Marken $1 \ldots r-k$ beschränkt wird.

Multipliciren wir nun die linke Seite von (2) mit $\eta_\alpha\, \eta_{\beta_1} \ldots \eta_{\beta_{i-1}}$ und summiren auch nach α über die Marken $1 \ldots r-k$, so geht die Gleichung (2) über in

$$\sum C'_{\varkappa_1\varkappa_2}\, C'_{\varkappa_2\varkappa_3}\, C'_{\varkappa_3\varkappa_4} \ldots C'_{\varkappa_i\varkappa_1} = 0. \tag{3}$$

Wir stellen für die Hauptuntergruppe die charakteristische Gleichung auf, so lassen sich deren Coefficienten als ganze Functionen von

$$\sum C'_{\varkappa\varkappa}, \quad \sum C'_{\varkappa\lambda} C'_{\lambda\varkappa}, \quad \sum C'_{\varkappa\lambda} C'_{\lambda\mu} C'_{\mu\varkappa} \ldots$$

darstellen. Da die letzteren sämmtlich identisch verschwinden, müssen es auch die ersteren thun; in der vorausgesetzten Hauptuntergruppe sind also stets alle Wurzeln gleich null, was bewiesen werden sollte.

Wir haben jetzt den aufgestellten Satz noch für den Fall zu beweisen, dass nicht alle Elementartheiler vom ersten Grade sind. Wenn die Wurzel ω_α zu einem Elementartheiler $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Grades gehört, so bilden wir die zugeordneten inf. Transformationen so, dass die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_{\alpha^{(\lambda)}}) = \omega_\alpha X_{\alpha^{(\lambda)}} + X_{\alpha^{(\lambda-1)}}, \ldots (X_r X_{\alpha'}) = \omega_\alpha X'_{\alpha'} + X_\alpha, \quad (X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha.$$

Die Ordnungszahl, in welcher, diesen Gleichungen entsprechend, eine inf. Transformation zu ihrer Wurzel gehört, soll dadurch bezeichnet werden, dass man die Marke in | | einschliesst, so dass unter Voraussetzung der vorigen Gleichung ist:

$$|\alpha| = 1, \; |\alpha'| = 2, \ldots |\alpha^{(\lambda)}| = \lambda + 1.$$

Ferner soll, wenn $\varkappa$ irgend eine Marke ist, die zu derselben Wurzel, aber zu der um eins höhern Ordnung gehörige Marke mit $\varkappa'$ bezeichnet werden, so dass die Gleichungen bestehen:

$$|\varkappa'| = |\varkappa| + 1, \quad \omega_{\varkappa'} = \omega_\varkappa, \quad (X_r X_{\varkappa'}) = \omega_\varkappa X_{\varkappa'} + X_\varkappa.$$

Wir benutzen einen in § 8 (Bd. 31, S. 281) bewiesenen Satz. Dort ist nämlich gezeigt worden, dass, wenn X_ι in dem angegebenen Sinne eine Transformation μ^{ter} und $X_\varkappa$ eine solche ν^{ter} Ordnung ist, dann im Ausdruck von $(X_\iota X_\varkappa)$ nur Transformationen vorkommen, deren Ordnungszahl höchstens $\mu + \nu - 1$ beträgt.

In (1) wählen wir $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{i-1}$ so, dass die zugehörigen Transformationen von der ersten Ordnung sind, und setzen

$$\beta_i = \beta_{i+1} = \cdots = \beta_s = r.$$

Dann ist in (1) das erste Glied:

$$\sum^{\iota} c_{\alpha\beta\iota} \sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_s} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3} c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_{i+1}} c_{r\varkappa_{i+1}\varkappa_{i+2}} \ldots c_{r\varkappa_s\varkappa_1},$$

Hier entsprechen $\varkappa_1, \varkappa_s, \ldots \varkappa_{i+2}, \varkappa_{i+1}$ demselben Elementartheiler; zugleich gehören $\alpha, \beta_1 \ldots \beta_{\iota-1}$ und demnach auch ι zu Transformationen erster Ordnung; es muss also sein:

$$|\varkappa_1| \leqq |\varkappa_s| \leqq \cdots \leqq |\varkappa_i| \cdots \leqq |\varkappa_1|,$$

so dass die Ordnungszahl überall dieselbe ist. Somit ist

$$\varkappa_1 = \varkappa_s = \cdots = \varkappa_{i+1},$$

und $c_{\alpha\beta_i\iota}$ wird multiplicirt mit:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_2\varkappa_1\varkappa_2} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} \omega_{\varkappa_1}^{s-i}.$$

Ebenso wird in (1) das $(i+1)^{\text{te}}$ Glied sein:

$$c_{\alpha r \alpha} \sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_s} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2} c_{r\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{r\varkappa_{s-i-1}\varkappa_{s-i}} c_{\beta_1\varkappa_{s-i}\varkappa_{s-i+1}} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_s\varkappa_1}.$$

Hier gehören wieder $\varkappa_2 \ldots \varkappa_{s-i+1}$ zu derselben Wurzel; zugleich sind die Ordnungszahlen dieselben. Deshalb erhalten wir $c_{\alpha r\alpha}$ multiplicirt mit der Summe:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} \omega_{\varkappa_2}^{s-i}.$$

Dieselben beiden Summen würde man aber erhalten haben, wenn die charakteristische Gleichung nur Elementartheiler erster Ordnung enthielte. Demnach bleibt unter der gemachten Beschränkung die Gleichung (2) bestehen.

Wenn jetzt α zu einer Transformation zweiter Ordnung gehört, aber $\beta_1 \ldots \beta_{i-1}$ zu solchen erster Ordnung, so wird in (1) sowohl im ersten Product für $c_{\alpha\beta\iota}$ wie im $(i+1)^{\text{ten}}$ für $c_{\alpha r\iota}$ das ι entweder zu Transformationen erster oder zweiter Ordnung gehören. Für Transformationen erster Ordnung ist bereits das Verschwinden der erhaltenen Summe bewiesen; wir können also von diesen Summen ganz absehen. Von den weiter hinzutretenden Summen werden gewisse ebenfalls verschwinden, wenn wir annehmen, dass selbst für $|\alpha| = 2$ nicht nur die Gleichung (2), sondern auch die Gleichung

$$\sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2} \beta_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1'} = 0 \tag{4}$$

besteht, wofern i kleiner als im vorliegenden Falle gewählt wird. Alsdann verwandelt sich (1) in folgende Gleichung:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} (\omega_{\varkappa_2}^{s-i} + \omega_{\varkappa_2}^{s-i-1} \omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-i})$$
$$+ (s-i) \sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1'} (\omega_{\varkappa_2}^{s-i-1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-i-1}) = 0.$$

Da aber diese Gleichung für jeden Werth von s gilt, so kann man wieder auf die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (2) und (4) schliessen.

Man sieht jetzt aber auch, wie man fortfahren muss, wenn entweder mehrere der Marken $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots$ zu Transformationen zweiter Ordnung gehören oder solche von dritter und höherer Ordnung vor-

kommen. In allen Fällen zeigt sich, dass für die vorausgesetzte Hauptuntergruppe die Coefficienten der charakteristischen Gleichung

$$\psi_1(\eta),\ \psi_2(\eta)\ldots$$

identisch verschwinden. Damit ist der aufgestellte Satz ganz allgemein bewiesen, und es erübrigt nur noch, den Fall näher zu charakterisiren, wo zu den angegebenen $r-k$ inf. Transformationen noch weitere zur Bestimmung der Hauptuntergruppe hinzutreten.

Wir lassen die frühere Voraussetzung bestehen, dass mit dem identischen Verschwinden von k Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch alle entsprechenden Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades identisch verschwinden. Die mit einer allgemeinen Transformation X_r vertauschbaren Transformationen sollen mit $X_{r-1}\ldots X_{r-k+1}$ und die durch die nicht verschwindenden Wurzeln erhaltenen mit $X_1\ldots X_{r-k}$ bezeichnet werden. Soll jetzt die Hauptuntergruppe mehr als $r-k$ Parameter besitzen, so müssen in ihr gewisse Transformationen enthalten sein, die sich als homogene lineare Functionen von $X_r,\ X_{r-1}\ldots X_{r-k+1}$ ausdrücken lassen. Dazu ist nothwendig, dass die Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln ω_ι und $-\omega_\iota$ besitzt. Wir bezeichnen wieder die zu $-\omega_\iota$ gehörige Marke mit ι'. Wenn jetzt die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_{\iota_\varrho}) = \omega_\iota X_{\iota_\varrho} + X_{\iota_{\varrho-1}},\quad (X_r X'_{\iota_\sigma}) = -\omega_\iota X'_{\iota_\sigma} + X'_{\iota_{\sigma-1}},$$

$$(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) = \sum_0^{k-1}{}^{\nu} p_\nu X_{r-\nu}$$

so haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden, ob $\sum^\nu p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ oder $\neq 0$ ist, wo dem ω_ι für $X_{r-\nu}$ die Wurzel $\omega_\iota^{(\nu)}$ entspricht. Im ersten Fall muss auch für jede Reihe einander zugeordneter Wurzeln $\omega_\alpha^{(\nu)}$ sein: $\sum^\nu p_\nu \omega_\alpha^{(\nu)} = 0$, wie aus Gl. (7) § 12 (Bd. 33, S. 16) für Elementartheiler ersten Grades unmittelbar folgt und allgemein auf dem in § 23 (Bd. 34, S. 88, 89) vorgezeichneten Wege bewiesen wird.

Angenommen jetzt, alle zur Bestimmung der Hauptuntergruppe hinzutretenden von null verschiedenen $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ mögen solche Ausdrücke $\sum^\nu p_\nu X_{r-\nu}$ liefern, für welche $\sum^\nu p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ ist. Bezeichnen wir die von einander unabhängigen derartig hinzukommenden inf. Transformationen als $X_{r-k+1}\ldots X_{r-h}$, so muss für alle inf. Transformationen $X_1\ldots X_{r-h}$ die charakteristische Gleichung nur verschwindende Wurzeln besitzen. Jetzt kann man die Gleichung (1) derselben Betrachtung unterziehen, welche vorhin angestellt worden ist, und gelangt zu dem Ergebniss, dass auch die auf die neue Weise erhaltene Hauptuntergruppe vom Range null ist. Diese Betrachtung

wird erleichtert, wenn man die beiden folgenden einfachen Bemerkungen berücksichtigt.

Wofern eine oder mehrere der Marken $\beta_1 \dots \beta_s$ sich als letzte Marke in nicht-verschwindenden Coefficienten $c_{(r-k+1)\iota\varrho} \dots c_{(r-h)\iota\varrho}$ finden, ersieht man unmittelbar, dass

$$\sum_{\varkappa_1 \dots \varkappa_s} c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0$$

ist. Denn wenn z. B. $(X_{r-h} X_{\bar{\beta}})$ durch X_{β_1} allein ausgedrückt werden kann, während $(X_{r-h} X_{\beta_2}) = \dots = (X_{r-h} X_{\beta_s}) = 0$ ist, so setze man in (1) $\alpha = r - h$, $\beta_1 = \bar{\beta}$, $\beta_2 = \beta_2 \dots, \beta_s = \beta_s$, und erhält die aufgestellte Gleichung. Nachdem dies bewiesen ist, kann man auf die Gültigkeit derselben Gleichung auch in den weiter möglichen Fällen schliessen, wenn $\beta_1 \dots \beta_s$ höhere Marken sind, welche an letzter Stelle in einem $c_{(r-h)\iota\varrho}$ vorkommen.

Offenbar ist jedes Product

$$c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0,$$

wenn alle $\beta_1 \dots \beta_s$ der Reihe $r - k + 1 \dots r - h$ angehören; denn wäre dies Product von null verschieden, so müsste

$$|\varkappa_1| > |\varkappa_2| > \dots > |\varkappa_s| > |\varkappa_1|$$

sein, was unmöglich ist.

Demnach setze man niemals α gleich einer Marke $r - k + 1 \dots r - h$, dagegen mögen einige der Marken $\beta_1 \dots \beta_s$ gleich r, andere gleich einer Marke $r - k + 1 \dots r - h$, und wieder andere gleich einer Marke der Reihe $1 \dots r - k$ gesetzt werden. Die oben angestellte Betrachtung ändert sich dann nur insofern, als für manche Marken β und $\varkappa$ zuweilen verschwindende Wurzeln hinzutreten und solche Producte in der Summe ausfallen. Dadurch ist aber kein wesentlicher Unterschied bedingt, weil nach beliebiger Wahl der oben benutzten Zahl i man eine Gleichung (für $s = i$) erhält, in welcher die Wurzeln ganz wegfallen, während in allen weiteren Gleichungen ($s > i$) nicht nur die Summationsbuchstaben auf die Marken $1 \dots r - k$ beschränkt werden, sondern auch einzelne Producte für jeden Summationsbuchstaben ausfallen. Demnach bleibt die Schlussfolgerung ungeändert, dass die Hauptuntergruppe vom Range null ist.

Wenn aber für ein $(X_{\iota_\varrho} X_{\iota'_\sigma}) = \sum p_\nu X_{r-\nu}$ zugleich $\sum^\nu p_\nu \omega_i^{(\nu)} \neq 0$ ist, so enthält die Gruppe nothwendig Kegelschnittsgruppen. Dies ist unmittelbar klar, wenn in der vorstehenden Gleichung ϱ und σ beide gleich Null sind, da alsdann X_ι, $X_{\iota'}$, $(X_\iota X_{\iota'})$ eine solche Untergruppe bestimmen. Wenn aber die angegebene Bedingung erst für grössere Werthe von ϱ und σ erfüllt ist, so kann man die Ergebnisse des § 24 (Bd. 34,

S. 98—106) anwenden. Dann giebt es eine positive Zahl $\mathfrak{a}$, so dass jedesmal $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) = 0$ ist für $\varrho + \sigma < \mathfrak{a}$, aber $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) \neq 0$ für $\varrho + \sigma \geqq \mathfrak{a}$; und für $(X_{\iota_\mathfrak{a}} X'_{\iota_\mathfrak{a}}) = \sum^{\nu} p_\nu X_{r-\nu}$ ist $\sum p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0$; ausserdem stellen die $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ für alle Werthe von ϱ und σ gerade $\mathfrak{a} + 1$ von einander unabhängige inf. Transformationen dar. Deshalb kann man, wie dort näher gezeigt worden ist, die $X_{\iota_\mathfrak{a}}$ und $X'_{\iota_\mathfrak{a}}$ so wählen, dass sie mit $(X_{\iota_\mathfrak{a}} X'_{\iota_\mathfrak{a}})$ einer Kegelschnittsgruppe angehören, womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Unter denjenigen Gruppen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, ist noch eine Classe zu erwähnen. Es sind das diejenigen, welche in den §§ 10 und 19 (Bd. 33, S. 4—10 und Bd. 34, S. 59—66) auf eine allerdings etwas lästige Art und Weise behandelt worden sind; indessen ist es dort gelungen, die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Classe aufzufinden. Die ihr angehörigen Gruppen sind durch die Eigenschaft bestimmt, dass in der charakteristischen Gleichung die letzten k Coefficienten $\psi_r, \psi_{r-1} \ldots \psi_{r-k+1}$ identisch verschwinden, während nicht alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante verschwinden. Indem wir dann X_r wieder als ganz allgemeine inf. Transformationen voraussetzen, können wir weitere $k-1$ inf. Transformationen $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ derartig hinzufügen, dass sie mit X_r eine Untergruppe vom Range null bestimmen. Fernere hiervon und unter einander unabhängige $r-h$ inf. Transformationen $X_1 \ldots X_{r-k}$ sollen den nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung für X_r zugeordnet werden. Dann möge die Hauptuntergruppe durch $X_1 \ldots X_{r-k}$, $X_{r-k+1} \ldots X_{r-h}$ bestimmt sein, wo h von null verschieden ist. Für jede dieser $r-h$ inf. Transformationen hat die charakteristische Gleichung lauter verschwindende Wurzeln, wie am angegebenen Orte (Bd. 33, S 61. Gleichungen (3) und S. 63, Gl. 11) bewiesen ist. Diese Eigenschaft genügt, um die Hauptuntergruppe zu charakterisiren. Wir können wiederum die Gleichung (1) zu grunde legen, darin einige der Marken $\beta_1 \ldots \beta_s$ gleich r und die Marke α nebst weiteren β_ν gleich solchen Marken setzen, deren Transformationen der Hauptuntergruppe angehören. Dann ändern sich die obigen Untersuchungen nicht und das Resultat bleibt dasselbe. Also ist auch in diesem Falle die Hauptuntergruppe vom Range null. Somit sind wir zu dem allgemeinen Resultate gelangt:

Wenn die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe keine Kegelschnittsgruppe enthält, so muss sie vom Range null sein.

Hiermit hängen einige weitere Sätze eng zusammen, deren Beweis bereits durch die vorangehenden Untersuchungen geliefert ist, nämlich unter andern folgende Sätze:

Wenn $P_1 \dots P_l$ die einfachsten Functionen sind, durch welche sich die Coefficienten der charakteristischen Gleichung darstellen lassen, und wenn unter ihnen sich Functionen vom 2^{ten} und von einem höhern Grade befinden, so kann man es bei passender Wahl der bestimmenden inf. Transformationen erreichen, dass sich die Coefficienten der charakteristischen Gleichung für die Hauptuntergruppe durch dieselben Functionen 2^{ten} und höhern Grades ausdrücken lassen.

Eine Gruppe enthält nur dann keine Kegelschnittsgruppe, wenn sich alle Coefficienten der charakteristischen Gleichung durch lineare Functionen ausdrücken lassen.

Bestimmen $X_1 \dots X_p$ die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe und bildet man für dieselbe die charakteristische Gleichung, so ist es nicht möglich, aus deren Coefficienten eine lineare Function von $\eta_1 \dots \eta_p$ herzustellen.

Betreffs der Hauptuntergruppen haben wir zwei Fälle als möglich erkannt: entweder sind sie vom Range null oder sie enthalten Kegelschnittsgruppen. Nun tritt die weitere Frage an uns heran, ob jede Gruppe dieser beiden Arten eine Hauptuntergruppe sein könne. Wenngleich es mir noch nicht möglich ist, ganz erschöpfend die Bedingungen anzugeben, denen eine Hauptuntergruppe genügen muss, so ist es doch leicht zu sehen, dass die aufgestellte Frage verneint werden muss. Denn die Gleichung (1) für $s = 1$ lehrt, dass, wenn die Hauptuntergruppe p-gliedrig ist, der Coefficient von ω^{p-1} in der für sie aufgestellten charakteristischen Gleichung identisch verschwindet, oder mit andern Worten, dass, wenn durch $X_1 \dots X_p$ die Hauptuntergruppe gegeben ist, $\sum_\varrho c_{\alpha\varrho\varrho} = 0$ ist für $\alpha = 1 \dots p$.

Ausserdem tritt jetzt ein zweites Problem an uns heran: die Zusammensetzung aller Gruppen anzugeben, für welche die Gestaltung der Hauptuntergruppe bekannt ist. Die Lösung dieses Problems ist durch die vorangehende Entwicklung bereits wesentlich vorbereitet, aber noch nicht vollständig durchgeführt; für den Fall, dass die Gruppe Kegelschnittsgruppen besitzt, wird sich der folgende Paragraph mit dieser Aufgabe befassen.

§ 30.

Gestaltung einer gewissen Klasse von Gruppen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind.

Wir wollen jetzt diejenigen Gruppen bestimmen, welche zwar nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, aber mit denselben am nächsten verwandt erscheinen, da ihre Hauptuntergruppen für sich betrachtet die Eigenschaft haben, die eigenen Hauptuntergruppen zu

sein. Bezeichnen wir also r von einander unabhängige inf. Transformationen der gegebenen Gruppe mit $X_1 \dots X_r$, so soll für $\iota, \varkappa, \lambda, \mu = 1 \dots r$ zwar nicht die Gruppe $(X_\iota X_\varkappa)$ mit der Gruppe $X_1 \dots X_r$, aber die Gruppe $\big((X_\iota X_\varkappa), (X_\lambda X_\mu)\big)$ mit der durch $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmten Gruppe identisch sein.

Im Anschluss an die früheren Entwicklungen sei X_r eine ganz allgemeine inf. Transformation. Man suche für dieselbe die Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Wenn in derselben k Wurzeln verschwinden, so erhält man $k - 1$ Transformationen $X_{r-1} \dots X_{r-k+1}$, welche unter einander und mit X_r vertauschbar sind; die übrigen $r - k$ inf. Transformationen $X_1 \dots X_{r-k}$, welche zur Bestimmung der Gruppe dienen, können so gewählt werden, dass sie den nicht verschwindenden Wurzeln entsprechen. In der Hauptuntergruppe treten zu $X_1 \dots X_r$ noch gewisse lineare Functionen von $X_r \dots X_{r-k+1}$ hinzu. Auch zeigt der vorige Paragraph bereits, dass in der Hauptuntergruppe eine gewisse durch $X_r \dots X_{r-k+1}$ dargestellte inf. Transformation ganz allgemeinen Character hat und demnach eine solche Transformation X_p in gleicher Weise zur Aufsuchung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung geeignet ist, wie X_r in der gegebenen Gruppe. Um dies noch weiter zu erkennen, kann man entweder auf die Untersuchungen des § 11 (Bd. 33, S. 9—11) zurückgehen, oder man kann für beide Gruppen die charakteristische Gleichung bilden. Daraus ergiebt sich der Satz:

Um eine r-gliedrige Gruppe zu bestimmen, welche zwar nicht selbst ihre eigene Hauptuntergruppe ist, deren Hauptuntergruppe aber mit ihrer eigenen zusammenfällt, nehme man an, diese Hauptuntergruppe sei durch die inf. Transformationen $X_1 \dots X_p$ *bestimmt, und in derselben sei* X_p *eine allgemeine inf. Transformation und mit* $X_{p-1} \dots X_{p-k+1}$ *vertauschbar. Dann ist es zur Bestimmung der r-gliedrigen Gruppe gestattet, zu den p genannten weitere* $r - p$ *inf. Transformationen hinzuzufügen, welche unter einander und mit den* $X_p \dots X_{p-k+1}$ *vertauschbar sind. Dieser Weg genügt, um alle Gruppen von der bezeichneten Eigenschaft zu erhalten.*

Hiermit ist aber der Inhalt des vorigen Paragraphen, soweit er sich auf die angegebene Klasse von Gruppen erstreckt, keineswegs erschöpft. Die Transformation X_p ist nur als allgemeine inf. Transformation in der Hauptuntergruppe, dagegen X_r als solche in der r-gliedrigen Gruppe vorausgesetzt. Wenn also bereits für X_p mehrere Wurzeln verschieden sind, so müssen sie ganz gewiss für X_r verschieden sein. Ist also ω_α für X_p in der Untergruppe eine einfache Wurzel, so entspricht ihr für X_r in der r-gliedrigen Gruppe eine einfache Wurzel ϖ_α; zugleich ist $(X_r X_\alpha) = \varpi_\alpha X_\alpha$, $(X_p X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha$. Für die Hauptuntergruppe haben wir jetzt die allgemeinste Gestaltung zu grunde zu

legen, welche wir in § 24 (Bd. 34, S. 101—105) angegeben haben. Danach gehört eine Hauptwurzel ω_ι einem einzigen Elementartheiler, etwa vom Grade $\mathfrak{a}+1$ an; bezeichnet l den Rang dieser Untergruppe, so kann man bei passender Wahl von X_p, $X_{p-1}\dots X_{p-l+1}$, $X_{p-l}\dots X_{p-h+1}$ erreichen, dass ist $(X_p X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \omega_\iota X_{\iota_\mathfrak{a}}, \dots (X_{p-l+1} X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \omega_\iota^{(l-1)} X_{\iota_\mathfrak{a}}$, dass dagegen sich $(X_{p-l} X_{\iota_\mathfrak{a}}) \dots (X_{p-h+1} X_{\iota_\mathfrak{a}})$ durch $X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} \dots X_{\iota_0}$ ausdrücken lassen.

Um zu dieser Darstellung zu gelangen, lösten wir ein gewisses Gleichungssystem (Gl. 10, auf S. 104), von dem wir nachwiesen, dass es durch eine $(l-1)$-fache Unendlichkeit von Werthen η befriedigt werde. Nun bleibt alles, was über die Abhängigkeit dieser Gleichungen von einander gesagt worden ist, auch jetzt bestehen, da der Beweis sich nur auf die Eigenschaft der betr. Wurzeln stützt, Hauptwurzeln zu sein. Folglich bilden in diesem Falle die Lösungen eine $(r-p+1)$-fache unendliche Mannigfaltigkeit. Somit können auch die inf. Transformationen X_r, $X_{r-1} \dots X_{p+1}$ so gewählt werden, dass ist

$$(X_r X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \varpi_\iota X_{\iota_\mathfrak{a}}, \ (X_{r-1} X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \varpi_\iota' X_{\iota_\mathfrak{a}} \dots$$

Unter den Hauptwurzeln der Hauptuntergruppe kann man immer l von einander unabhängige so auswählen, dass sich alle übrigen durch diese ausdrücken lassen. Wenn dieselben ω_ι, $\omega_\varkappa \dots$ sind, so bestimme man l Coefficienten $n_0, n_1 \dots n_{l-1}$ durch die l Gleichungen:

$$\begin{gathered}\varpi_\iota + n_0 \omega_\iota + n_1 \omega_\iota' + \cdots + n_{l-1} \omega_\iota^{(l-1)} = 0,\\ \varpi_\varkappa + n_0 \omega_\varkappa + n_1 \omega_\varkappa' + \cdots + n_{l-1} \omega_\varkappa^{(l-1)} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

Diese Gleichungen werden stets durch ein einziges System $n_0, n_1, \dots n_{l-1}$ befriedigt. Ersetzt man jetzt das vorhin erhaltene X_r durch

$$X_r + n_0 X_p + n_1 X_{p-1} + \cdots + n_{l-1} X_{p-l+1},$$

so wird für das neue X_r sein:

$$(X_r X_{\iota_\mathfrak{a}}) = 0, \quad (X_r X_{\varkappa_\mathfrak{a}}) = 0.$$

Nun setzen sich alle Hauptwurzeln aus den l ausgewählten linear zusammen; folglich ist X_r mit allen Transformationen vertauschbar, welche als solche höchster Ordnung zu Hauptwurzeln gehören. Ebenso kann man jetzt Coefficienten $n_0', n_1' \dots n_{l-1}'$ durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered}\varpi_\iota' + n_0' \omega_\iota + n_1' \omega_\iota' + \cdots + n_{l-1}' \omega_\iota^{(l-1)} = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

bestimmen; hierdurch wird erreicht, dass das neue X_{r-1} mit den genannten Transformationen vertauschbar ist; u. s. w.

In der p-gliedrigen Hauptuntergruppe bilden die inf. Transformationen $X_p \dots X_{p-l+1}$, welche in der angegebenen Weise gewählt

sind, nebst den X_{ι_a}, $X_{\varkappa_a}$ ... und den weiteren in gleicher Weise zu einer Hauptwurzel gehörigen Transformationen eine einfache oder halbeinfache Untergruppe, während bei der angegebenen Wahl alle übrigen inf. Transformationen eine invariante Untergruppe vom Range null bestimmen. Wir haben gesehen, dass wir in der r-gliedrigen Gruppe die $X_r \dots X_{p+1}$ so wählen können, dass sie mit allen Transformationen der einfachen Gruppe vertauschbar sind. Somit erhalten wir den Satz:

Soll eine Gruppe G_r zur Hauptuntergruppe eine Gruppe G_p haben und soll letztere ihre eigene Hauptuntergruppe sein, so kann man in G_r eine von G_p unabhängige Gruppe G_{r-p} bestimmen, deren Transformationen mit einander und mit einer in G_r enthaltenen einfachen oder halbeinfachen Gruppe gleichen Ranges vertauschbar sind. Wählt man umgekehrt in G_p eine einfache oder halbeinfache Gruppe beliebig, so giebt es stets in G_r eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe von lauter mit einander vertauschbaren Transformationen, welche mit jener Gruppe vertauschbar ist.

Daraus ergiebt sich folgende praktische Regel zur Bildung solcher Gruppen:

„Es sei G_p eine Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, und G_l diejenige einfache oder halbeinfache Gruppe, aus welcher G_p durch Zusammensetzung mit einer Gruppe vom Range null gebildet ist. Um eine Gruppe G_r zu bilden, für welche G_p die Hauptuntergruppe ist, füge man eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe hinzu, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind, und setze fest, dass dieselbe auch mit G_l vertauschbar sein soll."

Um die Voraussetzungen, auf denen der vorstehende Satz beruht, noch einmal vollständig zu übersehen, erinnern wir daran, dass in § 12 (Bd. 33, S. 14—16) die Gleichungen (2) und (3) ganz allgemein gelten, unabhängig von der Wahl der Transformation, für welche die charakteristische Gleichung aufgestellt ist, dass dagegen die Gleichung (6) und die darauf sich stützende Gleichung (7) nur solche Transformationen voraussetzen, welche in einem $(X_\iota X_{\iota'})$ vorkommen. Ist also $(X_\iota X_{\iota'}) \neq 0$, so gehören zu X_ι und $X_{\iota'}$ für jedes beliebige X_r entgegengesetzt gleiche Wurzeln; ebenso wenn $(X_\iota X_\varkappa)$ durch X_λ ausgedrückt wird, so wird stets die zu X_λ gehörige Wurzel die Summe der beiden zu X_ι und $X_\varkappa$ gehörigen sein. Dagegen wird die in § 12 gelehrte Bestimmung aller Wurzeln im vorliegenden Falle nicht mehr möglich sein.

Der vorhin angegebene Satz lehrt die vollständige Gestaltung einer Gruppe, wenn ihre Hauptuntergruppe selbst einfach oder halbeinfach ist; wir erhalten das Theorem:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe eine p-gliedrige Hauptuntergruppe

besitzt und letztere einfach oder halbeinfach ist, so hat sie eine $(r-p)$-*gliedrige ausgezeichnete* (*d. h. mit der ganzen Gruppe vertauschbare*) *Untergruppe.*

Dieser Satz, welchen ich für die Zusammensetzung mit der Kegelschnittsgruppe schon früher (Programm 1886) bewiesen habe, liefert folgende Regel zur Bildung solcher Gruppen:

Um in allgemeinster Weise aus einer p-gliedrigen einfachen oder halbeinfachen Gruppe eine r-gliedrige Gruppe zu bilden, welche jene zur Hauptuntergruppe hat, hat man eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe hinzuzufügen, deren Transformationen mit einander und mit den Transformationen der p-gliedrigen Untergruppe vertauschbar sind.

Beiläufig folgt:

Alle r-*gliedrigen Gruppen, welche dieselbe* p-*gliedrige einfache oder halbeinfache Gruppe zur Hauptuntergruppe haben, sind holoedrisch isomorph.*

Ebenfalls ergiebt sich unmittelbar, dass der Rang der r-gliedrigen Gruppe gleich ist dem der (einfachen oder halbeinfachen) Hauptuntergruppe.

Wir nehmen jetzt an, die Hauptuntergruppe sei nach der in § 22 (Bd. 34, S. 81, 82) angegebenen Regel und unter der weiteren Voraussetzung gebildet, dass alle Nebenwurzeln durch eine einzige gefordert werden. Indem wir wieder durch $X_1 \dots X_p$ die Hauptuntergruppe bestimmt sein lassen, durch die Marken $\iota, \varkappa, \dots$ solche Transformationen bezeichnen, welche einer einfachen Gruppe angehören, dagegen den Nebenwurzeln und den zu ihnen gehörigen Transformationen die Marken $\alpha, \beta \dots$ geben, und die $X_{p+1} \dots X_\varrho \dots X_\sigma \dots X_r$ den obigen Bestimmungen gemäss wählen, erhalten wir

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,\ (X_\alpha X_\iota) = c_{\alpha\iota(\alpha+\iota)} X_{\alpha+\iota},\ (X_\varrho X_\sigma) = 0,\ (X_\varrho X_\iota) = 0.$$

Eine einfache Anwendung der Jacobi'schen Identität lehrt, dass, wenn

$$(X_\varrho X_\alpha) = \varepsilon_\varrho X_\alpha \quad \text{ist, auch} \quad (X_\varrho X_{\iota+\alpha}) = \varepsilon_\varrho X_{\iota+\alpha}$$

sein muss. Indem wir also etwa zu $X_{r-1} \dots X_{p+1}$ je das mit einem passenden Factor multiplicirte X_r hinzufügen, können wir bewirken, dass die neuen $X_{r-1} \dots X_{p+1}$ mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind. Soll also die Gruppe keine ausgezeichnete Untergruppe besitzen, so muss $p = r - 1$ sein. Hieraus folgt:

Eine p-*gliedrige Gruppe enthalte keine* $(p-1)$-*gliedrige invariante Untergruppe, aber eine solche von weniger Gliedern; die Transformationen derselben mögen mit einander vertauschbar und die zugehörigen Nebenwurzeln durch eine einzige gefordert sein. Wenn diese die Hauptuntergruppe einer* r-*gliedrigen Gruppe sein soll für* $r > p$, *so füge man eine inf. Transformation hinzu, welche mit den zu der einfachen oder halbeinfachen Gruppe gehörigen Transformationen vertauschbar ist,*

dagegen mit den zu den Nebenwurzeln gehörigen Transformationen je eine zweigliedrige Untergruppe bildet. Die übrigen inf. Transformationen, welche für $r > p + 1$ hinzuzufügen sind, können so gewählt werden, dass sie mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind.

In der p-gliedrigen Hauptuntergruppe mögen die X_ι, $X_\varkappa$ ... eine einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmen, X_α, X_β ... die invariante Untergruppe, so bestehen die Beziehungen:

$$(X_r X_\iota) = \cdots = (X_{p+1} X_\iota) = 0, \quad (X_r X_\alpha) = \varepsilon X_\alpha,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0,$$

wo ε noch gleich eins oder gleich null gewählt werden kann.
Beiläufig erinnern wir noch daran, dass der Rang der gegebenen Gruppe höchstens um eins grösser sein kann als der der gegebenen Gruppe. Ebenso lehrt der angegebene Lehrsatz, dass alle r-gliedrigen Gruppen, deren Hauptuntergruppe holoedrisch isomorph ist mit einer gegebenen p-gliedrigen Gruppe von der angegebenen Zusammensetzung, in zwei Klassen zerfallen, wo alle Gruppen derselben Klasse gleich zusammengesetzt sind.

Beispiele zu der hier angegebenen Gestaltung können in grosser Menge beigebracht werden. Ich erinnere nur an die allgemeine lineare Gruppe des $(l+1)$-dimensionalen Raumes: p_α, $x_\alpha p_\beta$, $x_\alpha p_\alpha$ für $\alpha, \beta = 1 \cdots l+1$. Hier geben die p_α, $x_\alpha p_\alpha - x_{l+1} p_{l+1}$, $x_\alpha p_\beta$ die Hauptuntergruppe an, und in dieser bestimmen $x_\alpha p_\alpha - x_{l+1} p_{l+1}$, $x_\alpha p_\beta$ eine einfache Gruppe vom Range l, dagegen die p_α die invariante Untergruppe. Als hinzutretende inf. Transformation betrachtet man $x_1 p_1 + \cdots + x_{l+1} p_{l+1} = Y$; dann ist $(Y p^\alpha) = -p_\alpha$, dagegen Y mit allen andern angegebenen Transformationen vertauschbar.

Um die vorangehenden Entwicklungen noch auf eine weitere Klasse von Gruppen anzuwenden, setzen wir solche Gruppen als Hauptuntergruppen voraus, deren Gestaltung in Band 34, S. 86 angegeben ist. Hier wird auch jeder Nebenwurzel ω_α eine inf. Transformation X_α zugeordnet; wenn dann durch ω_α nicht die entgegengesetzt gleiche $-\omega_\alpha$ mit gefordert ist, so nehmen wir auch diese als vorkommend an, setzen $(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y$ und lassen Y mit jeder Transformation der Gruppe vertauschbar sein. Dann folgt aus $(X_r X_\alpha) = \varepsilon_r X_\alpha$ auch $(X_r X_{\iota+\alpha}) = \varepsilon_r X_{\iota+\alpha}$; demnach sind alle derartigen Coefficienten gleich, wenn alle Wurzeln durch eine einzige bedingt sind; andernfalls erhalten wir $(X_r X_{\alpha'}) = \varepsilon_\alpha' X_{\alpha'}$. Jedenfalls muss sein $(X_r Y) = (\varepsilon_r + \varepsilon_r') Y$.

Weitere specielle Gestaltungen anzugeben, wird nicht nöthig sein. Wir gehen deshalb dazu über, den Fall zu untersuchen, wo noch nicht die Hauptuntergruppe mit ihrer eigenen Hauptuntergruppe identisch ist, sondern wo man erst durch mehrfache Wiederholung dieser Operation zu einer solchen Gruppe gelangt. Dabei kann es

nicht unsere Aufgabe sein, wiederum sämmtliche Fälle im einzelnen zu betrachten, vielmehr werden wir uns damit begnügen, einige allgemeine Gesetze hierüber aufzustellen. Wir wollen also zunächst die Frage erörtern, ob jede beliebige der in diesem Paragraphen angegebenen Gruppen Hauptuntergruppe sein kann. Dass diese Frage nicht allgemein bejaht werden kann, hat bereits eine Bemerkung am Schluss des vorigen Paragraphen gelehrt. Wir gehen von den speciellen Zusammensetzungen aus und betrachten zunächst die auf Seite 185, 186 angegebene. Dort waren $X_p \ldots X_\iota$, $X_\varkappa \ldots$ so vorausgesetzt, dass sie eine einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmen; X_α, $X_\beta \ldots$ sind mit einander vertauschbar und geben in der p-gliedrigen Gruppe eine invariante Untergruppe an. Dazu treten $X_{p+1} \ldots X_r$, so dass ist:

$$(X_r X_\iota) = \cdots = (X_{p+1} X_\iota) = 0, \quad (X_r X_\alpha) = \varepsilon X_\alpha,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0,$$

Soll eine Transformation X_{r+1} hinzutreten, so lässt sich dieselbe wiederum so wählen, dass sie mit $X_p \ldots X_\iota$, $X_\varkappa \ldots$ vertauschbar ist. Dann lehrt die Identität $(r+1, r, \alpha)$: $c_{(r+1)rr} c_{r\alpha\alpha} = 0$. Soll daher die gegebene r-gliedrige Gruppe wirklich Hauptuntergruppe sein (also $c_{(r+1)rr} \neq 0$), so muss wegen des Verschwindens von $c_{r\alpha\alpha}$ und der entsprechenden Coefficienten jede Transformation $X_r \ldots X_{p+1}$ mit allen Transformationen derjenige Gruppe vertauschbar sein, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist. Dieselbe Ueberlegung machen wir für die weitere vorhin angegebene Klasse von Gruppen (S. 186); bilden wir wieder die Jacobi'sche Identität $(r+1, r, \alpha)$ unter der Voraussetzung, dass sich $(X_{r+1} X_\alpha)$ und $(X_r X_\alpha)$ nur durch X_α darstellen lassen, so gilt derselbe Schluss; es ist also $(X_r X_\alpha) = (X_r X_{\alpha'}) = 0$ und damit auch $(X_r Y) = 0$.

Nun können wir aber in jeder p-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigene und zugleich die Hauptuntergruppe für eine r-gliedrige Gruppe ist, für gewisse inf. Transformationen die aufgestellte Bedingung erfüllen; wenn X_α eine solche ist, so müssen mit den vorausgesetzten Gleichungen $(X_r X_p) = \cdots = (X_r X_\iota) = 0$ auch die folgenden bestehen: $(X_r X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0$. Entsprechend lässt sich stets beweisen, dass $c_{r\gamma\gamma}$ regelmässig verschwindet, wenn X_γ eine Transformation der p-gliedrigen Hauptuntergruppe ist; dagegen können die Coefficienten $c_{r\gamma_1\gamma_0}$ von null verschieden sein. Stellen wir dies Ergebniss mit denjenigen Resultaten zusammen, welche wir früher (§ 23 u. 24) über die Zusammensetzung erhalten haben, so folgt der wichtige Satz:

Die Hauptuntergruppe muss entweder einfach resp. halbeinfach oder vom Range null sein oder durch Zusammensetzung einer einfachen (resp. halbeinfachen) Gruppe mit einer invarianten Untergruppe vom Range null sich bilden lassen.

Dass dieser Satz auch direct auf dem im vorigen Paragraphen angewandten Wege hergeleitet werden kann, soll nur angedeutet werden. Ebensowenig können wir näher darlegen, wie hohe Bedeutung dieser Satz für die Zusammensetzung der Gruppen hat. Es erübrigt aber noch, einige Sätze anzugeben, welche gelten, wenn eine Gruppe, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, zugleich invariante Untergruppe irgend einer Gruppe ist.

Zu einer solchen Untergruppe gelangt man stets, wenn die fortgesetzte Aufsuchung der Hauptuntergruppe zu einer Gruppe von der bezeichneten Art führt, wenn also die Gruppe überhaupt Kegelschnittsgruppen enthält. Ist nämlich H_1 die Hauptuntergruppe der gegebenen Gruppe, H_2 die von H_1 u. s. w. und schliesslich $G_i = H_a$ die von H_{a-1}, so ist auch G_i eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe. Wir nehmen wieder an, die charakteristische Gleichung habe im allgemeinen k verschwindende und $r - k$ nicht verschwindende Wurzeln, und den ersteren seien die inf. Transformationen $X_r \dots X_{r-k+1}$ den letzteren die $X_1 \dots X_{r-k}$ zugeordnet. Dann können der G_i unmöglich unter der gemachten Voraussetzung lauter solche Transformationen angehören, welche mit X_r vertauschbar sind. Auf eine beliebige andere inf. Transformation wenden wir aber ein Beweisverfahren an, welches wir in § 21, (Bd. 34, S. 72) zu einem ähnlichen Zweck bereits benutzt haben. Wir combiniren nämlich irgend eine gegebene, der invarianten Untergruppe angehörige inf. Transformation so oft mit X_r, bis wir zu einer möglichst einfachen Transformation gelangen. Dann folgt zunächst, dass auch mindestens eine inf. Transformation vorkommt, welche die Form hat $\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \cdots + \eta_{r-k} X_{r-k}$. Indem man dasselbe Verfahren öfters wiederholt, gelangt man schliesslich zu einer Transformation $\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots$, wo erstens $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \dots$ je als erste Transformationen ihren entsprechenden Wurzeln zugeordnet sind, und wo zweitens diese Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma \dots$ sämmtlich einander gleich sind. Alsdann ist aber auch

$$\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots$$

der Wurzel ω_α als erste Transformation zugeordnet, da die Gleichung besteht:

$$(X_r, \eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots) = \omega_\alpha (\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \cdots).$$

In diesem Sinne gilt folgender Satz:

Wenn eine Gruppe G_r eine invariante Untergruppe G_i besitzt und diese ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss G_i mindestens eine inf. Transformation enthalten, welche Haupttransformation zu einer ganz allgemeinen, der G_r angehörigen zweigliedrigen Untergruppe ist.

Hieraus schliesst man weiter, dass man zur Bestimmung der invarianten Untergruppe lauter solche inf. Transformationen benutzen kann,

welche zu Wurzeln der charakteristischen Gleichung gehören. Dann finden aber auf diese invariante Untergruppe dieselben Entwicklungen Anwendung, welche im Anfange dieses Paragraphen für die Hauptuntergruppe angestellt sind. Somit bleiben auch die Resultate vollständig ungeändert. Speciell ergiebt sich also der Satz:

Wenn eine Gruppe G_i ihre eigene Hauptuntergruppe und zugleich die invariante Untergruppe einer Gruppe G_r ist, so möge G_i durch die inf. Transformationen $X_\iota, X_\varkappa \dots$ und $X_\alpha, X_\beta \dots$ bestimmt sein, wo die ersteren eine einfache oder halbeinfache Gruppe, die letzteren die invariante Untergruppe vom Range null ergeben; alle andern zur Bestimmung von G_r nothwendigen inf. Transformationen $X_\varrho, X_\sigma \dots$ können dann so gewählt werden, dass sie mit $X_\iota, X_\varkappa \dots$ vertauschbar sind.

In gleicher Weise bleiben auch die übrigen, oben für die Hauptuntergruppe angegebenen Sätze bestehen. Nimmt man dann noch das auf S. 171 gefundene Resultat hinzu, so sieht man, dass in den meisten Fällen sämmtliche Coefficienten c unmittelbar niedergeschrieben werden können.

Braunsberg im August 1889.

Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume.*)

Von

Heinrich Maschke in Berlin.

Im Folgenden soll eine Configuration von 140 geraden Linien untersucht werden, welche aus einer Anwendung der Gruppentheorie auf die Geometrie der geraden Linie im Raume erwächst, und mehrfach interessante geometrische Eigenschaften aufzuweisen hat. Was die hierzu erforderlichen liniengeometrischen Vorbegriffe betrifft, welche hier in einer eigenthümlichen, dem Charakter der Zahl 7 angepassten Form erscheinen, so sind dieselben in § 1 des Näheren auseinandergesetzt.

In Bezug auf die weitere Untersuchung sei es mir noch gestattet, darauf hinzuweisen, dass die zu besprechende Configuration geradezu als geometrisches Bild der 7! Vertauschungen von 7 Elementen angesehen werden kann, wie aus § 2 unmittelbar hervorgehen wird. In Folge dessen sind die hier abgeleiteten geometrischen Resultate direct zu verwerthen für die Theorie der Gleichungen siebenten Grades. Ich hoffe hierauf in einer demnächst erscheinenden Arbeit noch näher eingehen zu können.

§ 1.

Ueberzählige Liniencoordinaten.

In seiner Arbeit „Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen 6^{ten} und 7^{ten} Grades“ hat Herr Klein überzählige Liniencoordinaten in folgender Weise eingeführt**). Genügen die 7 Grössen $x_0, x_1, \ldots x_6$ den beiden Relationen:

$$(1) \qquad \sum_0^6 x_i = 0, \quad \sum_0^6 x_i^2 = 0,$$

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1889, Nr. 14.

**) Math. Ann. Bd. 28, pag. 206.

so erhält man durch Elimination eines der x, etwa x_0, eine in $x_1, \dots x_6$ homogene quadratische Gleichung

$$\Omega(x_1, \dots x_6) = 0.$$

Diese quadratische Form Ω kann alsdann, indem man die x in geeigneter Weise linear durch die 6 Grössen

$$p_{ik} = z_i z_k' - z_i' z_k \quad \left(i, k = 1, 2, 3, 4; \; i \gtrless k\right)$$

ausdrückt, in die Form

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} \tag{2}$$

umgesetzt werden. Bedeuten jetzt $z_1, \dots z_4$ und $z_1' \dots z_4'$ homogene Coordinaten zweier Punkte, so sind durch die 6 Grössen p_{ik} in bekannter Weise Liniencoordinaten definirt. Einem jeden, den Gleichungen (1) genügenden Werthsystem der 7 Grössen $x_0, \dots x_6$ entspricht demnach ein ganz bestimmtes Werthsystem der 6 Grössen p_{ik}, für welches die Form (2) verschwindet, also eine bestimmte gerade Linie des Raumes.*)

Wir werden indess im Folgenden es gar nicht nöthig haben, ein specielles Punktcoordinatensystem der z zu Grunde zu legen, werden vielmehr ausschliesslich mit den 7 den Gleichungen (1) genügenden überzähligen Liniencoordinaten $x_0, \dots x_6$ rechnen, und aus Gründen der Symmetrie auch stets die genannten 7 Grössen neben einander betrachten, ohne die vorhin angegebene Elimination vorzunehmen.

Einige Vorbemerkungen über das Rechnen mit diesen überzähligen Liniencoordinaten werden noch nöthig sein, um spätere Unterbrechungen zu vermeiden.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Gerade mit den Coordinaten x_i' und x_i'', wobei also die Gleichungen bestehen müssen:

$$\sum_0^6 x_i' = 0, \quad \sum_0^6 x_i'' = 0, \quad \sum_0^6 x_i'^2 = 0, \quad \sum_0^6 x_i''^2 = 0,$$

sich schneiden, ist auch hier einfach folgende:

$$\sum_0^6 x_i' x_i'' = 0. \tag{3}$$

Eine lineare, homogene Gleichung zwischen den 7 Coordinaten

$$\sum_0^6 a_i x_i = 0$$

---

*) Vergl. betreffs der canonischen Liniencoordinaten der 6 Grössen $x_1, \dots x_6$ die Abhandlung von Herrn Klein: Zur Theorie der Liniencomplexe 1ten und 2ten Grades. Math. Ann. Bd. 2, pag. 198.

definirt einen linearen Complex. Welches ist die Invariante dieses Complexes? Die Invariante eines linearen Complexes verschwindet, wenn die Coefficienten selbst Liniencoordinaten bedeuten, wenn also

$$\sum \alpha_i = 0, \quad \sum \alpha_i^2 = 0.$$

Die erste dieser beiden Bedingungen kann aber, auch beim allgemeinen linearen Complexe, stets erfüllt werden, indem man zu $\Sigma \alpha_i x_i$ den mit einem Factor ϱ multiplicirten Ausdruck Σx_i, welcher ja nach der ersten der Gleichungen (1) verschwindet, hinzuaddirt, und nun ϱ so bestimmt, dass

$$\sum_{i=0}^{6} (\alpha_i + \varrho) = 0$$

wird. Dies ergiebt $\varrho = -\frac{1}{7} \Sigma \alpha_i$. Die Gleichung eines linearen Complexes kann demnach stets auf diese „*Normalform*" gebracht werden, indem ich unter der Normalform einer Complexgleichung eine solche verstehe, in welcher die Summe der Coefficienten Null ist.

Nennen wir auch hier*) die 7 Complexe $x_0 = 0, \ldots x_6 = 0$ Fundamentalcomplexe, so sind z. B. deren Normalgleichungen folgende:

$$-6x_0 + \sum_1^6 x_i = 0, \ldots, \sum_0^5 x_i - 6x_6 = 0.$$

Nunmehr werden wir unter der *Invariante eines Complexes* den Ausdruck $\Sigma \alpha_i^2$ verstehen, *vorausgesetzt, dass die Complexgleichung* $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ *in ihrer Normalform gegeben ist.* In gleicher Weise ist $\Sigma \alpha_i \beta_i$ die *simultane Invariante zweier linearen Complexe*, wenn deren Gleichungen $\Sigma \alpha_i x_i = 0$, $\Sigma \beta_i x_i = 0$ *Normalgleichungen* sind.

§ 2.

Problemstellung.

Unterwirft man die 7 Coordinaten einer Geraden $x_0, \ldots x_6$ einer beliebigen Permutation, so werden durch dieselbe die Gleichungen (1) nicht geändert, die permutirten Coordinaten definiren desshalb wiederum gerade Linien. Im Allgemeinen erhält man daher durch Anwendung sämmtlicher 7! Permutationen aus einer Geraden 7! Gerade, welche insofern ein geschlossenes Ganze bilden, als durch eine beliebige Permutation der Coordinaten ihre Gesammtheit nicht geändert wird.

Aber die Anzahl der Geraden dieser Configuration ist im allgemeinen Falle für eine nähere geometrische Untersuchung zu gross.

*) Wie in der citirten Klein'schen Abhandlung die 6 Complexe

$$x_1 = 0, \ldots, x_6 = 0.$$

Diese Anzahl reducirt sich dagegen bedeutend, wenn einige der Coordinaten gleichgesetzt werden. Man kann hierbei, ohne allzu grossen Aufwand von Rechnung, methodisch unter steter Berücksichtigung der Gleichungen (1) sämmtliche möglichen Fälle durchgehen, die Anzahl der Geraden der betreffenden Configuration angeben, insbesondere aber auch nach dem Kriterium (3) zusehen, welche und wie viele Gerade sich schneiden. Diejenige Configuration wird alsdann das grösste Interesse beanspruchen, bei welcher möglichst viele Gerade durch einen Punkt gehen, resp. in einer Ebene liegen.

Andererseits liegt es nahe, sich bei der Aufsuchung solcher Configurationen durch geometrische Ueberlegungen leiten zu lassen. So bleibt z. B. der Inbegriff der 7 Fundamentalcomplexe $x_0=0, \dots x_6=0$ bei den genannten Permutationen ungeändert, folglich auch die Gesammtheit der 21 Directricenpaare, welche durch je 2 der Fundamentalcomplexe definirt sind. Die Coordinaten einer dieser 42 Geraden lauten:

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}(-5+\sqrt{-35}), \quad x_6 = \frac{1}{2}(-5-\sqrt{-35}),$$

die 41 anderen erhält man durch Permutation dieser Grössen. Das Kriterium (3) aber zeigt, dass diese 42 Geraden sämmtlich gegen einander windschief sind.

Mit den 4 Fundamentalcomplexen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ liegen in Involution*) die 3 Complexe:

$$x_4 - x_5 = 0, \quad x_5 - x_6 = 0, \quad x_6 - x_4 = 0.$$

Diese gehören einer und derselben linearen Schaar an, besitzen mithin nur *ein* Directricenpaar. Für dasselbe ergeben sich die Coordinaten

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = \varepsilon, \varepsilon^2, \quad x_6 = \varepsilon^2, \varepsilon,$$

wo ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Geht man in analoger Weise von je vieren der Fundamentalcomplexe aus (oder permutirt man die angegebenen Coordinaten auf alle möglichen Weisen), so erhält man im Ganzen 35 Directricenpaare, also eine Configuration von 70 Geraden. Hier lehrt nun die Gleichung (3), dass jede Gerade von 8 anderen geschnitten wird, dagegen kommt es nicht vor, dass sich 3 Gerade in einer Ebene oder in einem Punkte schneiden.

Ohne noch weitere Beispiele von Geradenconfigurationen aufzuzählen, bezeichne ich gleich die Configuration, in welcher bei relativ niedriger Geradenanzahl möglichst viele Gerade durch einen Punkt gehen resp. in einer Ebene liegen. Es ist dies diejenige Configuration, für deren Gerade 2 mal je 3 Coordinaten gleich sind. Diese Angabe

*) Zwei lineare Complexe liegen in Involution, wenn ihre simultane Invariante verschwindet. Vgl. Math. Ann. Bd. 2, pag. 201.

genügt, wenn man von einem gemeinsamen Proportionalitätsfactor absieht, zur eindeutigen Bestimmung der 7 Coordinaten. Man erhält für dieselben in beliebiger Reihenfolge die Werthe

$$3,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \mu,\ \mu,\ \mu,$$

wo λ und μ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 + z + 2 = 0,$$

also:

$$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-7}) \tag{4}$$

bedeuten. In der That gehen für diesen Fall die Gleichungen (1) in die identischen Relationen

$$\lambda + \mu + 1 = 0,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + 3 = 0$$

über. *Die Anzahl dieser Geraden ergiebt sich als* $\frac{7!}{3!\,3!} = 140$. Aufgabe der folgenden Untersuchung ist also die geometrische Discussion der Configuration, welche durch die bezeichneten 140 Geraden gebildet wird.

Wenn man trotz der genannten Gründe in der Bevorzugung gerade dieser Configuration noch eine gewisse Willkür erblickt, so sei bemerkt, dass auch die übrigen Geradenconfigurationen, welche für die 7! Vertauschungen ungeändert bleiben, leicht zu der genannten Configuration in Beziehung gesetzt werden können, wie dies in § 9 auch z. T. durchgeführt ist.

§ 3.

Das Schneiden der Geraden. Hauptpunkte und Hauptebenen.

Sei jetzt $L \equiv 3, \lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu, \mu$ oder kürzer $3\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu$ diejenige Gerade der Configuration, deren Coordinaten $x_0, \ldots x_6$ die eben hingeschriebenen Werthe in der angegebenen Reihenfolge besitzen. Die Gerade L wird von der Geraden $\mu 3\lambda\mu\mu\lambda\lambda$ geschnitten. Für die genannten beiden Geraden geht nämlich die Gleichung (3) in die Identität über:

$$3\mu + 3\lambda + \lambda^2 + \mu^2 + 3\lambda\mu = 0. \tag{5}$$

Man zeigt leicht, dass die Coordinaten zweier Geraden der Configuration überhaupt die Gleichung (3) nur auf die angegebene Weise (5) erfüllen können. Man kann demnach z. B. sofort schliessen, dass 2 Gerade, welche die Coordinate 3 an derselben Stelle besitzen, zu einander windschief sind, ebenso 2 Gerade, welche λ oder μ mehr oder weniger als einmal an derselben Stelle zu stehen haben etc.

Um jetzt weitere Schnittgerade von L anzugeben, machen wir von einem von Herrn Klein aufgestellten liniengeometrischen Satze

Gebrauch, den derselbe bereits für den Fall der überzähligen Liniencoordinaten in folgender Weise specialisirt hat:*)

Den $\frac{7!}{2}$ *geraden Vertauschungen der* x *entsprechen ebenso viele Collineationen des Raumes, den* $\frac{7!}{2}$ *ungeraden Vertauschungen der* x *eine gleiche Anzahl dualistischer Umformungen des Raumes.*

Permutiren wir also in irgend einer Weise die 7 Coordinaten des sich schneidenden Geradenpaares

$$(6)\qquad \begin{array}{c} 3\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu \\ \mu 3\lambda\mu\mu\lambda\lambda \end{array}$$

simultan, so erhalten wir auf jeden Fall wiederum ein sich schneidendes Geradenpaar. Nun wenden wir auf das Geradenpaar (6) sämmtliche Vertauschungen der x an, welche die Gerade L ungeändert lassen. Es sind dies offenbar diejenigen $6 \,.\, 6 = 36$ Vertauschungen, welche nur $x_1 x_2 x_3$ unter sich und $x_4 x_5 x_6$ unter sich permutiren. Von diesen fallen für das Linienpaar (6) je 2 identisch aus, weil auch für die zweite Gerade $x_5 = x_6$ ist. Man erhält demnach aus (6) durch die genannten Vertauschungen 18 Transversale der Geraden L.

Da die Gleichung (5) symmetrisch ist in Bezug auf λ und μ, so schneidet sich auch das Geradenpaar, welches man aus (6) durch Vertauschung von λ mit μ erhält, nämlich:

$$\begin{array}{c} 3\mu\mu\mu\lambda\lambda\lambda, \\ \lambda 3\mu\lambda\lambda\mu\mu. \end{array}$$

Wendet man hierauf die Vertauschung $(x_1 x_4)$, $(x_2 x_5)$, $(x_3 x_6)$ an, so erhält man das sich schneidende Geradenpaar:

$$(6\,\mathrm{a})\qquad \begin{array}{c} 3\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu, \\ \lambda\lambda\mu\mu 3\mu\lambda. \end{array}$$

Die erste dieser beiden Geraden ist wiederum L, und genau wie vorhin erhält man aus der zweiten wieder 18 neue Transversale von L. Weitere Transversalen von L existiren nicht. Wir haben mithin den Satz:

1) *Jede Gerade unserer Configuration wird von* 36 *Geraden der Configuration geschnitten.*

Um jetzt festzustellen, ob sich mehr als 2 Gerade in einem Punkte oder in einer Ebene von L schneiden, betrachten wir die beiden in (6) und (6a) aufgestellten Transversalen von L:

$$(7)\qquad \begin{array}{c} \mu 3\lambda\mu\mu\lambda\lambda, \\ \lambda\lambda\mu\mu 3\mu\lambda. \end{array}$$

*) Math. Ann. Bd. 28, pag. 507.

Multipliciren wir die entsprechenden Coordinatenwerthe und addiren, so ergiebt sich wiederum nach Gleichung (5) identisch Null. Also schneiden sich die Geraden (7) auch unter sich, gehen mithin mit L durch einen Punkt, oder liegen mit L in einer Ebene, oder beides.

Wenden wir nun auf die beiden Geraden (7) die cyklische Vertauschung $(x_1 x_2 x_3)$ $(x_4 x_5 x_6)$ und deren 2[te] Potenz an, so erhalten wir folgende 6 Gerade

$$(8) \qquad \begin{array}{ll} \mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda, & \lambda \lambda \mu \mu 3 \mu \lambda, \\ \mu \lambda \mu 3 \lambda \lambda \mu, & \lambda \mu \mu \lambda \mu \lambda 3, \\ \mu \mu 3 \lambda \lambda \mu \lambda, & \lambda \mu \lambda \mu \lambda 3 \mu, \end{array}$$

welche unter den 36 Transversalen von L enthalten sind. Eine leichte Prüfung ergiebt, *dass sich sämmtliche 6 Gerade (8) unter einander schneiden.* Auf diese Geraden (8) wenden wir die *ungerade* Vertauschung $(x_5 x_6)$ an, so erhalten wir folgende 6 Geraden, die auch unter den 36 Transversalen von L enthalten sind

$$(8\text{a}) \qquad \begin{array}{ll} \mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda, & \lambda \lambda \mu \mu 3 \lambda \mu, \\ \mu \lambda \mu 3 \lambda \mu \lambda, & \lambda \mu \mu \lambda \mu 3 \lambda, \\ \mu \mu 3 \lambda \lambda \lambda \mu, & \lambda \mu \lambda \mu \lambda \mu 3. \end{array}$$

Diese schneiden sich ebenfalls sämmtlich unter einander. Die Geraden (8) und (8a) haben die erste $\mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda$ gemeinsam. Dagegen schneidet keine der übrigen 5 Geraden von (8) irgend eine der übrigen 5 Geraden von (8a), also müssen entweder die Geraden (8) durch einen Punkt gehen, und die Geraden (8a) in einer Ebene liegen, oder umgekehrt. Welcher von beiden Fällen eintritt, kann nicht entschieden werden, so lange wir kein bestimmtes Punktcoordinatensystem zu Grunde legen. Wir nehmen willkürlich an, dass die Geraden (8) mit L in einer Ebene liegen, die wir I nennen wollen. Alsdann müssen sich die Geraden (8a) mit L in einem Punkte schneiden, und diesen wollen wir mit 1 bezeichnen.

Wir constatiren leicht, dass es ausser L keine weiteren Geraden giebt, welche gleichzeitig sämmtliche 6 Geraden (8) oder (8a) schneiden.

Ich lege jetzt eine Tabelle an, in welcher sämmtliche 36 Transversalen von L enthalten und in der Weise geordnet sind, dass je 6 in einer Colonne unter einander stehende Geraden sich in einem auf L liegenden Punkte schneiden, der mit der darüber stehenden arabischen Ziffer bezeichnet ist, und dass je 6 in einer Zeile nebeneinander stehende Geraden sich in einer durch L gehenden Ebene schneiden, die mit der daneben stehenden römischen Ziffer bezeichnet ist.

Tabelle der 36 Transversalen der Geraden $L \equiv 3\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu$.

(9)

	1	2	3	4	5	6
I	$\mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda$	$\mu \mu 3 \lambda \lambda \mu \lambda$	$\mu \lambda \mu 3 \lambda \lambda \mu$	$\lambda \lambda \mu \mu 3 \mu \lambda$	$\lambda \mu \lambda \mu \lambda 3 \mu$	$\lambda \mu \mu \lambda \mu \lambda 3$
II	$\mu \mu 3 \lambda \lambda \lambda \mu$	$\mu \lambda \mu 3 \mu \lambda \lambda$	$\mu 3 \lambda \mu \lambda \mu \lambda$	$\lambda \mu \lambda \mu \mu \lambda 3$	$\lambda \mu \mu \lambda 3 \mu \lambda$	$\lambda \lambda \mu \mu \lambda 3 \mu$
III	$\mu \lambda \mu 3 \lambda \mu \lambda$	$\mu 3 \lambda \mu \lambda \lambda \mu$	$\mu \mu 3 \lambda \mu \lambda \lambda$	$\lambda \mu \mu \lambda \lambda 3 \mu$	$\lambda \lambda \mu \mu \mu \lambda 3$	$\lambda \mu \lambda \mu 3 \mu \lambda$
IV	$\lambda \lambda \mu \mu 3 \lambda \mu$	$\lambda \mu \lambda \mu \mu 3 \lambda$	$\lambda \mu \mu \lambda \lambda \mu 3$	$\mu 3 \mu \lambda \mu \lambda \lambda$	$\mu \lambda 3 \mu \lambda \mu \lambda$	$\mu \mu \lambda 3 \lambda \lambda \mu$
V	$\lambda \mu \lambda \mu \lambda \mu 3$	$\lambda \mu \mu \lambda 3 \lambda \mu$	$\lambda \lambda \mu \mu \mu 3 \lambda$	$\mu \lambda 3 \mu \lambda \lambda \mu$	$\mu \mu \lambda 3 \mu \lambda \lambda$	$\mu 3 \mu \lambda \lambda \mu \lambda$
VI	$\lambda \mu \mu \lambda \mu 3 \lambda$	$\lambda \lambda \mu \mu \lambda \mu 3$	$\lambda \mu \lambda \mu 3 \lambda \mu$	$\mu \mu \lambda 3 \lambda \mu \lambda$	$\mu 3 \mu \lambda \lambda \lambda \mu$	$\mu \lambda 3 \mu \mu \lambda \lambda$

Aus dieser Tabelle folgt eine bequeme Bezeichnungsweise der 36 Transversalen von L. Unter der Transversalen V, 6 z. B. oder auch L, V, 6 verstehen wir diejenige Transversale von L, welche in der Ebene V durch den Punkt 6 geht.

Aus dem Vorhergehenden resultirt demnach der Satz:

2. *Die* 36 *Transversalen einer jeden Geraden G schneiden sich zu je* 6 *in* 6 *auf G liegenden Punkten und liegen zu je* 6 *in* 6 *durch G gehenden Ebenen.*

Ich will diese soeben definirten Punkte und Ebenen *Hauptpunkte* und *Hauptebenen* nennen, auch sollen die 140 Geraden unserer Configuration zum Unterschiede von anderen Geraden *Hauptgerade* heissen. Da auf jeder Hauptgeraden 6 Hauptpunkte liegen, und 7 Hauptgerade durch jeden Hauptpunkt gehen, so existiren im Ganzen $\frac{6 \cdot 140}{7}$ Hauptpunkte und ebenso viel Hauptebenen. Also haben wir den Satz:

3. *Die* 140 *Geraden unserer Configuration, die Hauptgeraden, schneiden sich in* 120 *Punkten, den Hauptpunkten, und liegen in* 120 *Ebenen, den Hauptebenen. Durch jeden Hauptpunkt gehen und in jeder Hauptebene liegen* 7 *Hauptgerade.*

Späterer Anwendungen halber notiren wir noch folgende Sätze:

4. *Jeder Punkt und jede Ebene, in welcher sich irgend* 2 *Hauptgerade schneiden, ist ein Hauptpunkt resp. eine Hauptebene.*

5. *Innerhalb einer Hauptebene gehen durch einen Hauptpunkt* 2 *und nur* 2 *Hauptgerade.*

Hieraus folgt nun unmittelbar:

6. *In jeder Hauptebene liegen* 21 *Hauptpunkte und durch jeden Hauptpunkt gehen* 21 *Hauptebenen.*

Dass jeder der bisher aufgestellten Sätze in dualistischer Form erscheint, hat seinen allgemeinen Grund darin, dass überhaupt *unsere Configuration sich selbst dualistisch entspricht.* In der That wird die

Gesammtheit der 140 Hauptgeraden durch eine beliebige ungerade Vertauschung der x nicht geändert. Eine derartige Vertauschung ist aber nach dem oben angeführten Klein'schen Satze gleichbedeutend mit einer dualistischen Umformung des Raumes.

§ 4.

Gruppirung der 6 Hauptpunkte einer Hauptgeraden.

Die 140 Hauptgeraden gehören den 21 linearen Complexen $x_i - x_k = 0$ an, welche wechselseitig in Involution liegen, z. B. $x_1 - x_2 = 0$ mit $x_3 - x_4 = 0$ etc. Jede Hauptgerade ist dabei gleichzeitig in sechsen derselben Complexgerade. So gehört die Gerade L den Complexen an:

$$(10) \qquad \begin{cases} x_5 - x_6 = 0, & x_2 - x_3 = 0, \\ x_6 - x_4 = 0, & x_3 - x_1 = 0, \\ x_4 - x_5 = 0, & x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Ich frage jetzt, welche Punkte entsprechen einer beliebigen Hauptebene von L in den 6 Complexen (10)? Diese Punkte müssen auf L liegen, weil L in allen 6 Complexen Complexgerade ist. Wie man nun unmittelbar aus der Tabelle (9) abliest, geht das Entsprechen nach folgender Tabelle vor sich:

(11)

	x_5-x_6	x_6-x_4	x_4-x_5	x_2-x_3	x_3-x_1	x_1-x_2	$=0$
I	1	2	3	4	5	6	
II	2	3	1	6	4	5	
III	3	1	2	5	6	4	
IV	4	5	6	1	2	3	
V	5	6	4	3	1	2	
VI	6	4	5	2	3	1	

Greift man aus dieser Tabelle die in 2 involutorisch liegenden Complexen den einzelnen 6 Ebenen entsprechenden Punktepaare heraus, so folgt nach einem bekannten Satz, dass diese Punktepaare in Involution liegen. Man berechnet auf diese Weise, dass die Punkte

$$\begin{matrix} 1, 2, 3, \\ 4, 5, 6 \end{matrix}$$

der Geraden L dreimal und zwar in folgender Weise in Involution liegen:

$$(12)\qquad \begin{cases} (1,4)\ (2,6)\ (3,5), \\ (1,5)\ (2,4)\ (3,6), \\ (1,6)\ (2,5)\ (3,4). \end{cases}$$

Wir notiren demnach den Satz:

7) *Die 6 Hauptpunkte einer jeden Hauptgeraden liegen auf 3 verschiedene Weisen in Involution* (und dualistisch).

Wir gelangen zu einer weiteren Eigenschaft der betrachteten 6 Hauptpunkte, welche für die folgenden Entwickelungen von fundamentaler Bedeutung sein wird, wenn wir Complexe von der Form

$$x_i + \lambda x_k + \mu x_l = 0$$

in Betracht ziehen. Auch diese Complexgleichung ist in der Normalform gegeben zu Folge der Identität: $1 + \lambda + \mu = 0$. Dem Complexe

$$(13)\qquad x_0 + \lambda x_3 + \mu x_4 = 0$$

gehört zunächst die Gerade L an, wegen

$$3 + \lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

ausserdem aber auch, wie ein Blick auf die Tabelle (9) lehrt, die Geraden

I 1, III 4, IV 3, VI 6.

Dem zu dem Complexe (13) involutorisch liegenden Complexe $x_1 - x_2 = 0$ gehören ausser L die Geraden an

I 6, II 5, III 4, IV 3, V 2, VI 1.

Der Ebene I entsprechen also in beiden Complexen die Punkte 1 und 6. Diese liegen harmonisch zu den Punkten, in denen die beiden Directricen der Complexe die Gerade L schneiden.

Die Directricen der beiden Complexe haben die Coordinaten

$$(14)\qquad \begin{array}{l} 1,\ -1,\quad 1,\ \lambda,\ \mu,\ 0,\ 0 \\ \text{und } 1,\quad 1,\ -1,\ \lambda,\ \mu,\ 0,\ 0. \end{array}$$

Man verificirt leicht, dass die erste dieser beiden Geraden in der Ebene III durch den Punkt 3 geht, die zweite in der Ebene IV durch den Punkt 4. Daraus folgt, dass die Punkte (1, 6) durch die Punkte (3, 4) harmonisch getrennt werden.

Führt man die analoge Rechnung durch für die Complexe $x_0 + \lambda x_1 + \mu x_4 = 0$ und $x_2 - x_3 = 0$, so schliesst man, dass die Punkte (3, 5) von (2, 6) harmonisch getrennt werden. Endlich folgt aus der Betrachtung von $x_0 + \lambda x_2 + \mu x_4 = 0$ und $x_3 - x_1 = 0$, dass die Punkte (1, 5) von (2, 4) harmonisch getrennt werden.

Wir sehen also, dass die 6 Hauptpunkte von L

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3, \\ 4,\ 5,\ 6 \end{array}$$

dreimal in der Weise harmonisch liegen, dass

$$\begin{array}{lll}(1, 5) & \text{von} & (2, 4),\\ (2, 6) & ,, & (3, 5),\\ (1, 6) & ,, & (3, 4)\end{array}$$

harmonisch getrennt werden. 6 Punkte einer Geraden, die in dieser Beziehung zu einander stehen, will ich *„metharmonisch"* nennen. Wir haben demnach den Satz:

8. *Die* 6 *Hauptpunkte einer jeden Hauptgeraden liegen metharmonisch zu einander. Das Gleiche gilt von den* 6 *Hauptebenen einer Hauptgeraden*, und als unmittelbare Folge hieraus:

9. *Die* 7 *in einer Hauptebene liegenden Hauptgeraden sind so beschaffen, dass eine jede durch die* 6 *anderen in* 6 *metharmonischen Punkten geschnitten wird* (und dualistisch).*)

Zwei solche von 6 metharmonischen Punkten, welche von zwei anderen harmonisch getrennt werden, will ich metharmonisch zusammengehörig nennen.

Wir stellen jetzt die Wirkungen derjenigen Vertauschungen der x auf die 6 Hauptpunkte von L fest, welche die Gerade L ungeändert lassen. Es sind das diejenigen Vertauschungen, welche nur $x_1 x_2 x_3$ und $x_4 x_5 x_6$ unter sich permutiren. Die Gesammtheit derselben liefert eine intransitive Gruppe von 36 Vertauschungen. Wenden wir irgend eine der genannten Vertauschungen auf die 6 Geraden einer Colonne oder Zeile der Tabelle (9) an, so werden dieselben in 6 andere umgesetzt, welche wiederum in irgend einer Zeile oder Colonne stehen. Aus der Umsetzung der Colonnen oder Zeilen schliessen wir unmittelbar auf die Vertauschungen der ihnen entsprechenden Hauptpunkte oder Hauptebenen.

So liefert z. B. die ungerade Vertauschung $(x_5 x_6)$ folgende dualistische Umformung der Punkte und Ebenen:

$$(1\ \mathrm{I}),\ (2\ \mathrm{II}),\ (3\ \mathrm{III}),\ (4\ \mathrm{IV}),\ (5\ \mathrm{V}),\ (6\ \mathrm{VI}).$$

---

*) Hieraus folgt ein merkwürdiger Satz über das vollständige Vierseit in der Ebene. Seien 4 Gerade in einer Ebene beliebig gegeben

$$(y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_1 + y_2 + y_3 = 0),$$

so liegen, wenn man auf jeder derselben in bestimmter, hier nicht näher anzugebender Weise die fehlenden 3 metharmonischen Punkte sucht, (es treten nach beliebiger Fixirung von 3 Punkten für die übrigen 3 keine neuen willkürlichen Parameter, sondern nur rein numerische Constante auf) diese hinzukommenden 12 Punkte zu je vieren auf 3 geraden Linien

$$\left(y_1 - x_2 + \mu y_3 = 0,\ -y_1 + \mu y_2 + y_3 = 0,\ \mu y_1 + y_2 - y_3 = 0,\ \mu = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}\right),$$

welche mit den gegebenen Viereckseiten ein „metharmonisches System" ausmachen, d. h. 7 gerade Linien bilden, von denen jede durch die 6 anderen in 6 metharmonischen Punkten geschnitten wird.

Führen wir die angedeutete Rechnung nun durch für sämmtliche 18 geraden in Betracht kommenden Vertauschungen, welche also Collineationen bedeuten, so zeigt sich, dass denselben nur 6 Vertauschungen der Punkte resp. Ebenen entsprechen. Die Gruppe der Vertauschungen der x ist demnach dreistufig isomorph sowohl auf die Gruppe der Vertauschungen der Punkte, als auch auf die der Ebenen bezogen. Interessant ist hierbei, dass die Beziehung auf die Punkt- und auf die Ebenengruppe eine *durchaus verschiedene* ist. So entsprechen z. B. der Identität der Punktgruppe die 3 Vertauschungen

$$(15)\left\{\begin{array}{l} \quad 1,\ (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_6 x_5),\ \ (x_1 x_3 x_2)(x_4 x_5 x_6) \\ \text{dagegen der Identität der Ebenengruppe folgende 3:} \\ \quad 1,\ (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6),\ \ (x_1 x_3 x_2)(x_4 x_6 x_5). \end{array}\right.$$

Folgendes ist nun die Gruppe der Vertauschungen der Hauptpunkte:

(15a) (123)(456), (132)(465), (14)(26)(35), (15)(24)(36), (16)(25)(34), 1.

Ersetzt man die arabischen Ziffern durch entsprechende römische, so erhält man die Vertauschungsgruppe der 6 Ebenen. Wie man leicht sieht, repräsentiren diese Gruppen Diedergruppen für $n = 3$. Wir haben demnach den Satz:

10. *Die 6 Hauptpunkte einer Hauptgeraden lassen 6 lineare Transformationen in sich zu, welche eine Diedergruppe* ($n=3$) *bilden.**)

---

*) Hieraus folgt, dass die Binärform 6^{ter} Ordnung $f(z_1, z_2) = 0$, welche gleich Null gesetzt, jene 6 Punkte darstellt, in geeigneter Weise linear transformirt, sich unter den von Herrn Bolza („On Binary Sextics with Linear Transformations into themselves". Americ. Journ. of Mathematics, Vol. X, Nr. 1 und „Zur Theorie der Binärformen 6. Ordnung". Math. Ann. Bd 30, pag. 546) aufgestellten Formen vorfinden muss. In der That ergiebt sich für unseren Fall

$$z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^6 = 0.$$

Auf diese Form müssen also 6 metharmonische Punkte nothwendig gebracht werden können. Es kommt dann nur noch eine Bedingung hinzu, aus welcher sich $\alpha = \pm 4\sqrt{7}$ bestimmt. Diese 6 Punkte liegen alsdann, wenn man sie auf der Kugel interpretirt, welche Trägerin der Werthe einer complexen Variabelen z ist, so, dass 3 der Punkte auf demselben Parallelkreise der Breite φ mit den Längen $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ liegen, während die anderen 3 Punkte mit denselben Längen auf dem Parallelkreise der Breite $-\varphi$ liegen, wo φ durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\cos 2\varphi = +\frac{1}{7}.$$

Da demnach bei 6 metharmonischen Punkten nur noch die Constanten einer linearen Substitution willkürlich sind, so folgt, dass 3 Punkte beliebig angenommen werden können, die 3 anderen aber dann nur noch 2 verschiedene, aber bestimmte Lagen, je nach der Wahl des Vorzeichens der $\sqrt{-7}$ annehmen können.

§ 5.

Die 30 Punkt- und Ebenenoctupel.

Wir gehen bei der Untersuchung dieses Paragraphen von der Configuration aus, welche durch die Hauptgerade L mit ihren 36 Transversalen gebildet wird. Fasse ich auf L zwei beliebige Hauptpunkte ins Auge, z. B. die Punkte 1 und 5, so geht nach Satz 5) in einer beliebigen Hauptebene von L, z. B. in I durch diese beiden Punkte ausser L nur noch je eine Hauptgerade.

Diese zwei schneiden sich in einem in der Ebene I liegenden Hauptpunkte, den ich I (1, 5) nennen will. Von diesem Punkte sage ich, er ist in der Ebene I den Punkten 1 und 5 *zugeordnet*. Man erhält in dieser Weise 6 Punkte, welche den Punkten 1 und 5 zugeordnet sind, nämlich in jeder der 6 Hauptebenen einen. Die Frage, die uns jetzt interessirt, ist folgende:

Ist die Verbindungslinie von 2 einem bestimmten Punktepaar (i, k) von L zugeordneten Punkten Hauptgerade oder nicht?

Die Verbindungsgerade der Punkte I (1, 5) und II (1, 5), welche ich kurz (I, II) (1, 5) nennen kann, muss folgende 4 Hauptgeraden schneiden:

$$(16) \qquad \begin{cases} \text{I } 1: & \mu 3 \lambda \mu \mu \lambda \lambda, \\ \text{I } 5: & \lambda \mu \lambda \mu \lambda 3 \mu, \\ \text{II } 1: & \mu \mu 3 \lambda \lambda \lambda \mu, \\ \text{II } 5: & \lambda \mu \mu \lambda 3 \mu \lambda. \end{cases}$$

Ich versuche zunächst, ob ich durch Hauptgeraden der Aufgabe genügen kann. Ein Schneiden kann nur nach der Identität (5) geschehen. Es kann demnach für die zu untersuchende Gerade mit den Coordinaten x' entweder nur x_0', oder x_3' oder $x_6' = 3$ sein, weil andernfalls zwei 3-en unter einander stehen würden. In ähnlicher Weise geht man die einzelnen Fälle durch, und überzeugt sich, dass ausser L in der That noch eine *Hauptgerade* als Transversale existirt, nämlich

$$(17) \qquad \lambda \lambda \mu 3 \mu \lambda \mu.$$

Um die Verbindungsgeraden anderer den beiden Punkten 1, 5 in anderen Ebenen zugeordneten Punkten zu erhalten, wende ich zunächst auf die 5 Geraden (16) und (17), welche mit L ein Tetraeder bilden,

---

Seien $z = \alpha, \beta, \gamma$ die 3 Punkte 1, 2, 3 (in der im Text gewählten Bezeichnung), so erhält man für die 3 anderen 4, 5, 6 mit der Abkürzung:

$$\beta - \gamma = a, \quad \gamma - \alpha = b, \quad \alpha - \beta = c$$

die 3 Werthe

$$\alpha + \frac{2bc}{c - b \pm a\sqrt{-7}}, \quad \beta + \frac{2ca}{a - c \pm b\sqrt{-7}}, \quad \gamma + \frac{2ab}{b - a \pm c\sqrt{-7}}.$$

diejenigen Vertauschungen der x an, welche die Gerade L punktweise ungeändert lassen. Dies sind nach (15) folgende zwei:

(18) $$(x_1 x_2 x_3)(x_4 x_6 x_5) \quad \text{und} \quad (x_1 x_3 x_2)(x_4 x_5 x_6).$$

Diese lassen die Punkte 1 und 5 fest, und führen die Ebenen I und II über in III, I und II, III. Also sind auch die Geraden (III, I) (1, 5) und (II, III) (1, 5) Hauptgeraden.

Endlich wende ich diejenige Vertauschung der x an, welche die Punkte 1 und 5 untereinander vertauscht, also (15) (24) (36) in Nr. (15a). Diese Punktvertauschung wird bewirkt durch

(18a) $$(x_1 x_2)(x_4 x_5).$$

Man erhält hierdurch folgende neue Hauptgeraden:

$$(1, 5)(\text{IV}, \text{VI}), \ (1, 5)(\text{V}, \text{IV}) \quad \text{und} \quad (1, 5)(\text{VI}, \text{V}).$$

Endlich berechne ich direct, wie vorhin, die Geraden (1, 5) (I, IV), (1, 5) (I, V) und (1, 6) (I, VI). Es zeigt sich, dass auch diese Hauptgerade sind, und wenn ich nun auch hierauf (18) und (18a) anwende, so erhalte ich sämmtliche 15 Verbindungsgeraden der 6 den beiden Punkten 1 und 5 zugeordneten Punkte. Also folgt: *Die* 15 *Verbindungsgeraden der* 6 *den beiden Punkten* 1, 5 *in den* 6 *Ebenen zugeordneten Punkte sind sämmtlich Hauptgerade.*

Genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir von dem Punktepaar 1, 6 von L ausgehen. Durch die Diedergruppe (15a), welche das Punktsystem 1, . . . 6 in sich überführt, werden nun die Punktepaare (1, 5) und (1, 6) transformirt in (2, 6), (3, 4) und (2, 4), (3, 5). Diese 6 Punktepaare sind aber sämmtliche in der Punktreihe 1, . . . 6 metharmonisch zusammengehörige Punktepaare. Demnach haben wir den Satz:

11. *Die* 15 *Verbindungslinien der* 6, *irgend einem metharmonisch zusammengehörigen Punktepaar* (i, k) *in den* 6 *durch* i, k *gehenden Hauptebenen zugeordneten Punkte sind Hauptgerade.*

Dieser Satz gewinnt nun noch an Interesse dadurch, dass er auch wirklich *nur* für 2 metharmonisch zusammengehörige Punktepaare gilt. So finde ich z. B. als Verbindungsgerade der 2 dem metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaar 1, 2 in den Ebenen I, II zugeordneten Punkte die Gerade

(19) $$-1, \ 2\lambda, \ 2\mu, \ \mu^3, \ \lambda^3, \ -1, \ -1,$$

welche offenbar nicht Hauptgerade ist.

Nehme ich jetzt zu den 6 dem metharmonisch zusammengehörigen Punktepaar i, k zugeordneten Punkten noch die beiden Punkte i und k mit hinzu, so habe ich eine Configuration von 8 Punkten vor mir, deren sämmtliche $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ Verbindungsgeraden Hauptgerade sind. Hier ist es offenbar unwesentlich, dass wir gerade von L ausgegangen sind, wir

hätten ebenso gut von irgend 2 anderen der 8 Punkte ausgehen können. Eine solche Configuration von 8 Hauptpunkten mit ihren 28 Verbindungsgeraden will ich ein *Punktoctupel* nennen. Die 7 nach Satz 3 durch jeden Hauptpunkt gehenden Hauptgeraden sind hier durch die Verbindungslinien des Punktes mit den 7 übrigen Punkten gegeben. Da jede Gerade 6 metharmonisch zusammengehörige Punktepaare trägt, mithin zur Bildung von 6 von einander verschiedenen Punktoctupeln Veranlassung giebt, an jedem Punktoctupel aber 28 Gerade betheiligt sind, so giebt es im Ganzen $\frac{140 \cdot 6}{28} = 30$ Punktoctupel. Wir notiren daher folgenden Satz:

12. *Es giebt in unserer Configuration* 30 *Octupel von je* 8 *Hauptpunkten, deren je* 28 *Verbindungsgerade Hauptgerade sind.*

Nun liegen auf jeder der 28 Hauptgeraden eines Punktoctupels 6 Hauptpunkte. Davon sind je 4 Nichtoctupelpunkte. Durch einen solchen Punkt kann nicht mehr als eine der 28 Hauptgeraden des Octupels hindurchgehen. Schnitten sich in ihm 2 der 28 Hauptgeraden, welche als Verbindungsgerade der Octupelpunkte P_1, P_2 und P_1', P_2' definirt sein mögen, so würden die 4 Octupelpunkte P_1, P_2, P_1', P_2' in einer Ebene liegen, und z. B. durch P_1 drei in einer Ebene liegende Hauptgerade hindurchgehen. Dies geht aber nicht nach Satz 5. Folglich sind die zu je 4 auf jeder der 28 Hauptgeraden liegenden Nichtoctupelpunkte sämmtlich von einander verschieden, ihre Anzahl mithin $4 \cdot 28 = 112$. Hierzu kommen die 8 Octupelpunkte, welche mit den vorigen zusammen 120, d. h. *alle* Hauptpunkte ausmachen. Also folgt:

13. *Auf den* 28 *Hauptgeraden eines Punktoctupels liegen sämmtliche* 120 *Hauptpunkte.*

Wegen der Wichtigkeit dieser Octupelconfigurationen sei es gestattet, die dualistischen Sätze gesondert auszusprechen. Dieselben lauten:

14. *Die* 15 *Schnittgeraden der* 6 *irgend einem metharmonisch zusammengehörigen Ebenenpaar* (A, B) *in den* 6 *auf der Schnittgeraden von* A, B *liegenden Hauptpunkten zugeordneten Ebenen sind Hauptgerade.* Dabei haben wir unter der einem Ebenenpaar A, B in einem Punkte i der Schnittgeraden A, B zugeordneten Ebene diejenige Ebene zu verstehen, welche die beiden Hauptgeraden enthält, die in A und in B durch i hindurchgehen.

15. *Es giebt in unserer Configuration* 30 *Octupel von je* 8 *Hauptebenen, deren je* 28 *Schnittgerade Hauptgerade sind.*

16. *Durch die* 28 *Hauptgerade eines Ebenenoctupels gehen sämmtliche* 120 *Hauptebenen.*

Die 28 Geraden eines Ebenenoctupels sind übrigens nicht etwa mit denen irgend eines Punktoctupels identisch. Denn in einem Ebenen-

octupel liegen 7 Octupelgeraden in jeder der 8 Hauptebenen, während von den 28 Geraden eines Punktoctupels nur 3 in einer Ebene liegen (Vgl. den Beweis zu Satz 13).

§ 6.

Die zu einem Octupel gehörige Vertauschungsgruppe der x.

Ich untersuche jetzt die Vertauschungen der x, welche das zu den beiden Punkten 1 und 5 in L gehörige Punktoctupel in sich überführen. Wir haben im vorigen Paragraphen bereits Vertauschungen von der Periode 3 und der Periode 2 von der verlangten Beschaffenheit kennen gelernt. Erstere liessen sowohl den Punkt 1 als auch den Punkt 5 ungeändert, letztere vertauschten beide Punkte miteinander. Es liegt nahe, zu fragen, ob es nicht eine Vertauschung der x von der Periode 7 giebt, welche die 7 durch Punkt 1 gehenden Hauptgeraden cyklisch unter sich vertauscht. Bezeichnen wir für den Augenblick die Gerade L mit L_0 und die übrigen durch 1 gehenden Geraden in der in der Tabelle (9) gegebenen Reihenfolge mit $L_1, L_2, \dots L_6$. Wenn eine Vertauschung von der verlangten Beschaffenheit existirt, so muss es stets eine solche Potenz derselben geben, dass durch dieselbe L_0 in L_1 übergeht. Dadurch geht (wegen der Coordinate 3) x_0 in x_1 über. Dieselbe Vertauschung denke ich mir jetzt auf jede der übrigen 6 Geraden ausgeübt, die ich dann L' nennen will. Ich bekomme so für

$$\left.\begin{aligned} L_1' &: x_1 = \mu, \\ L_2' &: x_1 = \mu, \\ L_3' &: x_1 = \mu, \\ L_4' &: x_1 = \lambda, \\ L_5' &: x_1 = \lambda, \\ L_6' &: x_1 = \lambda, \end{aligned}\right\} \text{ also kann nur sein: } \begin{aligned} L_1' &= L_2, L_5, L_6, \\ L_2' &= L_5, L_6, \\ L_3' &= L_2, L_5, L_6, \\ L_4' &= L_0, L_3, \\ L_5' &= L_0, L_3, L_4, \\ L_6' &= L_0, L_3, L_4. \end{aligned}$$

Ich habe demnach nur die beiden Fälle zu prüfen:

$$L_2' = L_5 \quad \text{und} \quad L_2' = L_6.$$

Nehmen wir erst $L_2' = L_5$. Dann wird (wiederum wegen der 3) x_6 aus x_2 und man erhält für

$$\left.\begin{aligned} L_1' &: x_6 = \lambda, \\ L_2' &: x_6 = 3, \\ L_3' &: x_6 = \mu, \\ L_4' &: x_6 = \mu, \\ L_5' &: x_6 = \lambda, \\ L_6' &: x_6 = \mu, \end{aligned}\right\} \text{ also kann nur sein: } \begin{aligned} L_1' &= L_3, L_6, \\ L_2' &= L_5, \\ L_3' &= L_0, L_2, L_4, \\ L_4' &= L_0, L_2, \\ L_5' &= L_1, L_3, L_6, \\ L_6' &= L_0, L_2, L_4. \end{aligned}$$

Combinirt man nun diese Möglichkeiten mit den vorigen, so folgt: $L_0' = L_1$, $L_1' = L_6$. L_6' kann nun nicht $= L_0$ sein, weil die Periode 7 sein soll, also $L_6' = L_4$. Jetzt bleibt nur noch übrig $L_4' = L_0$, und das geht wiederum nicht. Also haben wir

$$L_2' = L_6$$

anzunehmen. Dann wird (wegen der 3) x_5 aus x_2, und man erhält für $L_1' : x_5 = \lambda$ u. s. w. wie oben, nur dass x_5 statt x_6 zu setzen ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} L_1' &= L_2,\, L_4, \\ L_2' &= L_6, \\ L_3' &= L_0,\, L_5, \\ L_4' &= L_0,\, L_3,\, L_5, \\ L_5' &= L_1,\, L_2,\, L_4, \\ L_6' &= L_0,\, L_3,\, L_5. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich nun eindeutig in der That eine Vertauschung von der Periode 7, nämlich:

$$(L_0 L_1 L_2 L_6 L_3 L_5 L_4)$$

woraus man sofort folgende Vertauschung der x erhält:

$$(x_0 x_4 x_6 x_3 x_5 x_2 x_1). \tag{20}$$

Zugleich ist hierdurch bewiesen, dass dies die einzige Vertauschung der x ist, welche die 7 Geraden des Punktes 1 cyklisch unter einander vertauscht und zugleich L_0 in L_1 überführt.

Wenden wir jetzt die genannte Vertauschung auf den Punkt 5 von L an, so gehen aus den 7 Geraden dieses Punktes nur solche hervor, welche unter den 28 Geraden des zu $L(1, 5)$ gehörigen Punktoctupels vorkommen. Man hat, um dies einzusehen, nur nach der Vorschrift des vorigen Paragraphen die 15 zu dem genannten Octupel gehörigen Geraden hinzuschreiben, welche nicht schon in der Tabelle (9) unter 1 und 5 enthalten sind. Da nun aber der Punkt 5 durchaus keine Sonderstellung gegen den Punkt 1 einnimmt, so gilt dieselbe Behauptung auch von jedem der 6 anderen Punkten des Octupels, und so folgt, dass durch (20) in der That das Octupel $L(1, 5)$ in sich selbst übergeführt wird.

Hieraus schliessen wir nun vor allem, *dass die Vertauschungsgruppe, welche die* 8 *Punkte eines Octupels in sich überführt, mindestens zweifach transitiv sein muss.* Denn unter Festhaltung des Punktes 1 können wir an Stelle jeder der 7 durch 1 gehenden Hauptgeraden jede andere vermöge der Vertauschung (20) setzen. Auf jeder der genannten Hauptgeraden liegt aber je einer der noch übrigen 7 Hauptpunkte des Octupels. Also kann allgemein unter Festhaltung irgend eines Octupelpunktes ein beliebiger der 7 anderen in jeden der 7 über-

geführt werden, also überhaupt ein beliebiges Punktepaar punktweise in jedes andere.

Diese Bemerkung benutzen wir nun insbesondere dazu, um nachzuweisen, *dass es keine Vertauschung der x geben kann, welche das Octupel $L(1, 5)$ in das Octupel $L(1, 6)$ überführt.* Es mögen die Punkte des ersten Octupels P mit $P_1 \ldots P_8$, die des zweiten Q mit $Q_1, \ldots Q_8$ bezeichnet werden. Mögen alsdann unter Anwendung irgend einer Vertauschung der x, welche das Octupel P in das Octupel Q überführt, die 2 beliebigen Punkte $P_1 P_2$ in $Q_i Q_k$ übergehen. In Folge der bewiesenen mindestens zweifachen Transitivität könnte ich dann Q_i, Q_k in 2 beliebig vorgegebene Punkte von Q überführen. Es müsste also möglich sein, irgend 2 Punkte von P in irgend 2 Punkte von Q überzuführen. Ich zeige nun aber, dass ich die auf L liegenden Punkte 1 und 5 des Octupels P *nicht* in die Punkte 1 und 6 des Octupels Q überführen kann. Das könnte nämlich nur geschehen durch eine Vertauschung, welche die Gerade L fest lässt. Aber alle Vertauschungen, welche die Gerade L fest lassen und zugleich den Punkt 1 in sich selber überführen, lassen auch jeden der anderen 6 Punkte von L fest, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, können mithin nicht 5 in 6 überführen.

Die 6 Octupel, welche zu einer Hauptgeraden gehören, sondern sich demnach in 2 . 3 derart, dass sich nur die 3 Octupel der einen Art, und die 3 der anderen Art in sich überführen lassen. Da man aber jede Hauptgerade in jede andere überführen kann, so folgt:

16. *Die* 30 *Punktoctupel sondern sich in* 2 . 15 *derart, dass die* 15 *der einen Art nur unter sich gleichberechtigt sind, ebenso die* 15 *der anderen Art* (d. h. dass die Vertauschungen der x nur gestatten, die 15 Octupel je einer Art unter sich zu vertauschen).

Hiernach sind wir im Stande, die Anzahl der Vertauschungen der x zu berechnen, welche ein Punktoctupel ungeändert lassen. Ein Punktoctupel kann nur durch diejenigen Vertauschungen der x wiederum in ein Punktoctupel übergeführt werden, welche Collineationen bedeuten. Dies sind nach dem schon mehrfach citirten Klein'schen Satze $\frac{7!}{2}$. Dieselben führen, auf ein bestimmtes Punktoctupel angewandt, dasselbe nur in 15 verschiedene Lagen über. Also muss es $\frac{7!}{2 \cdot 15} = 168$ Vertauschungen in der Vertauschungsgruppe der x geben, welche ein Punktoctupel ungeändert lassen. Wir notiren daher den Satz:

17. *Ein jedes Punktoctupel wird durch eine Gruppe von* 168 *Collineationen, welche durch Vertauschungen der x gegeben sind, in sich selbst übergeführt.*

Dem mit der Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung vom 8ten Grade vertrauten Leser wird sofort die Uebereinstimmung auffallen,

welche zwischen der im Texte gegebenen Gruppe und der Gruppe der genannten Modulargleichung besteht*). In der That substituiren sich die in der Klein'schen Arbeit mit P_∞, $P_0, \ldots P_6$**) bezeichneten Ausdrücke, von einem simultanen Vorzeichenwechsel abgesehen, genau so, wie die 8 Punkte eines Octupels. Ich stelle die von uns bereits mehrfach benutzten Vertauschungen der x zusammen, welche das die Punkte $L\,1$ und $L\,5$ enthaltende Punktoctupel in sich überführen, und als erzeugende Substitutionen für die G_{168} angesehen werden können. Es sind dies die in (18), (18a) und (20) angeführten Formeln:

(21) $\quad (x_1 x_2 x_3)\,(x_4 x_6 x_5),\ (x_1 x_2)\,(x_4 x_5),\ (x_0 x_4 x_6 x_3 x_5 x_2 x_1).$

Diese 3 Vertauschungen von den Perioden 3, 2 und 7 entsprechen den 3 von Herrn Klein in der citirten Arbeit auf pag (269) ad 1), 2), 3) gegebenen erzeugenden Substitutionen der P_ν.

Wir haben nun noch den Ebenenoctupeln einige Aufmerksamkeit zu widmen. Die Sätze 16 und 17 gelten natürlich wörtlich auch für Ebenenoctupel. Genau dieselben Vertauschungen der x, welche ein Punktoctupel in sich überführen, werden auch ein bestimmtes Ebenenoctupel in sich überführen. Ich will dasselbe kurz mit dem Punktoctupel covariant nennen. Eine Auskunft über die Beziehung, welche zwischen diesen Octupeln herrscht, gebe ich in folgendem Satz:

18. *Man erhält aus einem durch seine* 28 *Hauptgeraden gegebenen Punktoctupel das covariante Ebenenoctupel, wenn man einfach in den Coordinaten der* 28 *Geraden* λ *mit* μ *vertauscht.*

Dass das aus der genannten Vertauschung hervorgehende Octupel mit dem ursprünglichen im obigen Sinne covariant ist, ist evident. Es wäre nur zu zeigen, dass dasselbe ein *Ebenenoctupel* ist. Den hierfür erforderlichen Beweis gebe ich im folgenden Paragraphen, wo er sich den dort zur Sprache kommenden Erörterungen besser anschliesst. Wir ziehen aber aus dem angeführten Satz den Schluss, dass *ein Punktoctupel mit seinem covarianten Ebenenoctupel keine Hauptgerade gemein haben kann.* Entgegengesetzten Falls müssten wegen der Covarianz die beiden Octupel sämmtliche 28 Gerade gemeinsam haben.

*) Vgl. hierüber: Brioschi „Ueber die Jacobi'sche Modulargleichung vom 8ten Grade". Math. Ann. Bd. 15, pag. 241, ferner Klein „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom 7ten und 8ten Grade". Math. Ann. Bd. 15, pag. 251, endlich Noether „Ueber die Gleichungen 8ten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung". Math. Ann. Bd. 15, pag. 89, woselbst auch die einschlägigen Arbeiten von Betti, Kronecker, Hermite und Mathieu angegeben sind.

**) Math. Ann. Bd. 15, pag. 269. Bei Zugrundelegung eines bestimmten Punktcoordinatensystems würden wir diese Klein'schen „8 Hauptpunkte", resp. Ebenen direct unter unseren Octupeln vorfinden. Die auf pag. 273 von Herrn Klein aufgestellten 7-werthigen linearen Complexe sind dann gerade unsere $x_0 = 0, \ldots x_6 = 0$ und gewisse Complexe von der Form: $x_i + x_k + x_l = 0$.

Es kann auch nicht irgend ein Hauptpunkt des Punktoctupels in eine Hauptebene des covarianten Ebenenoctupels hineinfallen, denn eine Hauptebene und ein Hauptpunkt in vereinigter Lage haben 2 Hauptgerade gemeinsam.

§ 7.

Hauptgerade, die einem metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaar zugeordnet sind.

Wie wir in § 5 im Anschluss an den Satz 11 sahen, sind diejenigen Punkte, welche einem metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaar von L in den 6 Hauptebenen zugeordnet sind, so beschaffen, dass sicher nicht alle ihre 15 Verbindungslinien Hauptgerade sind. Ich will jetzt zeigen, *dass nur* 6 *von diesen Verbindungsgeraden Hauptgerade sind.*

Aus dem Satz 14 in § 5 folgt nämlich, dass z. B. sämmtliche dem metharmonisch zusammengehörigen Ebenenpaar (I, VI) in den 6 Hauptpunkten zugeordneten Ebenen sich in Hauptgeraden schneiden, so z. B. die in den Punkten 1 und 2 zugeordneten. Die Schnittgerade dieser beiden Ebenen ist aber dieselbe Gerade, wie die Verbindungslinie der den beiden Punkten 1 und 2 in den Ebenen I und VI zugeordneten Punkte. Hieraus schliessen wir allgemein:

19. *Die* 6 *Geraden, welche je* 2 *solche Punkte verbinden, die einem metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaar in je* 2 *metharmonisch zusammengehörigen Ebenen zugeordnet sind, sind Hauptgerade, und nur diese.*

Um die Gruppirung dieser 6 Hauptgeraden, die ich dem metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaar zugeordnet nennen will, näher zu untersuchen, müssen wir 2 wesentlich verschiedene Arten von metharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaaren unterscheiden. Die Gruppe (15a), welche die 6 Hauptpunkte einer Hauptgeraden in sich transformirt, ist, wie ihr Anblick lehrt, imprimitiv; und zwar bilden die Punkte 1, 2, 3 und 4, 5, 6 die beiden Systeme der Imprimitivität.

Je 2 Punkte, welche demselben System der Imprimitivität angehören, will ich primitiv zusammengehörig nennen oder auch kurz ein primitives Punktepaar; dieselben sind offenbar metharmonisch *nicht* zusammengehörig. Es giebt innerhalb der 6 Hauptpunkte einer Hauptgeraden 6 derartige primitiv zusammengehörige Punktepaare. Die 3 noch übrig bleibenden Punktepaare, (1, 4), (2, 5), (3, 6) gehören weder metharmonisch noch primitiv zusammen.

In Bezug auf 2 primitiv zusammengehörige Punktepaare beweise ich nun folgenden Satz:

20. *Die 6 in den Hauptebenen einer Hauptgeraden einem primitiv zusammengehörigen Punktepaar der Hauptgeraden zugeordneten Punkte liegen in einer Ebene* (und dualistisch). Wir wollen diese Ebene dem primitiven Punktepaar zugeordnet nennen.

Für die Gerade L und das primitive Punktepaar 1, 2 sind die 6 zugeordneten Hauptgeraden leicht anzugeben; es sind folgende:

$$(22)\qquad \begin{cases} (1,2)\,(\mathrm{I\ VI}) & : \mu\lambda\mu\lambda 3\lambda\mu, \\ (1,2)\,(\mathrm{III\ V}) & : \mu\mu\lambda\lambda\mu 3\lambda, \\ (1,2)\,(\mathrm{II\ IV}) & : \mu\lambda\lambda\mu\lambda\mu 3, \\ (1,2)\,(\mathrm{I\ V}) & : \lambda\lambda\mu 3\mu\mu\lambda, \\ (1,2)\,(\mathrm{III\ IV}) & : \lambda\mu 3\lambda\lambda\mu\mu, \\ (1,2)\,(\mathrm{II\ VI}) & : \lambda 3\lambda\mu\mu\lambda\mu. \end{cases}$$

Wie die Anwendung des Kriteriums (3) zeigt, schneiden sich diese Geraden sämmtlich unter einander, und da sie Verbindungsgerade von 6 getrennt liegenden Punkten vorstellen, können sie sich nur in einer Ebene schneiden. Durch Anwendung der Gruppe (15a) folgt dann allgemein der in 20 angegebene Satz.

Aus diesem Satze leiten wir nun eine der merkwürdigsten geometrischen Beziehungen unserer Configuration ab. Da nämlich die in (22) angegebenen 6 Geraden in einer Ebene liegen, so muss dieselbe Hauptebene sein. Folglich muss noch eine 7te in derselben Ebene liegende Hauptgerade existiren. Auf analoge Weise wie die zu den Geraden in Nr. 16 gehörige Transversale berechnet man diese 7te Hauptgerade als

$$3,\ \mu,\ \mu,\ \mu,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda = L'.$$

Diese entsteht aus L durch Vertauschung von λ mit μ. Eine derartige Vertauschung wollen wir durch einen Accent kennzeichnen und allgemein zwei solche Geraden G und G' *Gegengerade nennen.*

Wende ich jetzt auf das primitive Punktepaar 1, 2 diejenigen 6 Vertauschungen der x an, welche dasselbe in die 6 primitiven Punktepaare von L überführt, so lassen dieselben die Gerade L ungeändert; folglich bleibt auch L' ungeändert, weil je 2 Gegengerade sich in Bezug auf die Vertauschungen der x covariant verhalten. Durch die genannten 6 Vertauschungen wird nun auch die Hauptebene der Geraden in Nr. (22) in 6 andere Hauptebenen übergeführt; diese gehen demnach sämmtlich durch L', sind sämmtlich von einander verschieden, sind also nichts anderes als die 6 Hauptebenen von L'. Wir haben demnach folgenden Satz:

21. *Die den 6 primitiven Punktepaaren einer Hauptgeraden G zugeordneten Ebenen sind identisch mit den 6 Hauptebenen der*

Gegengeraden G', oder auch: Die den 6 primitiven Punktepaaren einer Hauptgeraden G zugeordneten 6 . 6 Hauptgeraden sind identisch mit den sämmtlichen 36 Transversalen der Gegengeraden G' (und dualistisch).

Wir knüpfen hieran noch eine allgemeinere Bemerkung. Da die in Nr. (22) angegebenen Geraden in einer Hauptebene von L' liegen, so müssen sich dieselben in unserer Tabelle (9) vorfinden, falls wir daselbst überall λ mit μ vertauschen. In der That gehen dieselben durch die angegebene Vertauschung aus den 6 Hauptgeraden des Punktes 6 von L hervor. Daraus folgt überhaupt, dass durch die Vertauschung von λ mit μ alle Hauptpunkte von L mit den Hauptebenen von L' und umgekehrt vertauscht werden, und hieraus schliessen wir allgemein:

22. *Durch die Vertauschung von λ mit μ vertauschen sich die Hauptebenen unserer Configuration mit den Hauptpunkten.*

Hiermit ist auch der noch ausstehende Beweis zu Satz 18 des vorigen Paragraphen erbracht.

Es fehlt nun noch die Untersuchung der 6 einem weder metharmonisch noch primitiv zusammengehörigen Punktepaar zugeordneten Hauptgeraden.

Dieselben berechnen sich für das Punktepaar (1, 4) in folgender Weise:

$$
\begin{array}{ll}
(1, 4)\,(\mathrm{I}, \mathrm{VI}) & : \lambda\mu 3\mu\lambda\lambda\mu, \\
(1, 4)\,(\mathrm{VI}, \mathrm{II}) & : \mu\lambda\mu\mu 3\lambda\lambda, \\
(1, 4)\,(\mathrm{II}, \mathrm{IV}) & : \lambda\mu\mu 3\lambda\mu\lambda, \\
(1, 4)\,(\mathrm{IV}, \mathrm{III}) & : \mu\mu\lambda\mu\lambda\lambda 3, \\
(1, 4)\,(\mathrm{III}, \mathrm{V}) & : \lambda 3\mu\mu\mu\lambda\lambda, \\
(1, 4)\,(\mathrm{V}, \mathrm{I}) & : \mu\mu\mu\lambda\lambda 3\lambda.
\end{array}
$$

Das Kriterium (3) zeigt, dass hier jede Gerade die folgende schneidet, und die letzte wieder die erste, dass aber sonst ein Schneiden dieser 6 Geraden nicht stattfindet.

Durch Anwendung der Gruppe (5a) folgt demnach:

23. *Die einem weder metharmonisch noch primitiv zusammengehörigen Punktepaar zugeordneten 6 Hauptgeraden bilden ein geschlossenes windschiefes Sechsseit.*

§ 8.

Geradenquadrupel und Tripel von Octupeln.

Ich frage jetzt nach Hauptgeraden, welche in 2 oder mehreren Punktoctupeln gemeinsam vorkommen, und zwar beschränke ich mich auf die 15 Octupel einer Art.

Die beiden Octupel $L(1, 5)$ und $L(2, 6)$ haben nun zunächst die Gerade L gemeinsam. Das erste wird in das zweite übergeführt durch die Vertauschung $(x_1\, x_2\, x_3)$. Bei derselben bleiben alle Geraden ungeändert, für welche wie bei L $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda$ ist. Es sind dies folgende 4:

$$(24) \qquad \begin{cases} 3\,\lambda\lambda\lambda\mu\mu\mu, \\ \mu\lambda\lambda\lambda 3\mu\mu, \\ \mu\lambda\lambda\lambda\mu 3\mu, \\ \mu\lambda\lambda\lambda\mu\mu 3. \end{cases}$$

Diese 4 Geraden kommen nun aber sämmtlich in dem Octupel $L(1,5)$ vor; folglich müssen sie auch in dem Octupel $L(2, 6)$ vorkommen. Weitere Geraden aber haben diese beiden Octupel nicht gemeinsam. Da durch $(x_1\, x_2\, x_3)$ $L(2, 6)$ in $L(3, 4)$ übergeführt wird, so gehören die 4 Geraden (24) auch dem Octupel $L(3, 4)$ an. Wir haben demnach 3 Punktoctupel vor uns, welche 4 (windschiefe) Geraden gemeinsam haben. Es giebt im Ganzen offenbar soviele derartiger Tripel von Octupeln, als es Linienquadrupel (24) giebt. Das Quadrupel (24) wird aber durch sämmtliche möglichen Vertauschungen der x in $\frac{7!}{3!\,4!} = 35$ Quadrupel übergeführt, also giebt es 35 Tripel von Punktoctupeln der einen Art. 2 Octupel, welche an einem Tripel Theil nehmen, bestimmen das dritte eindeutig. Ist jedes Octupel an x Tripeln betheiligt, so muss sein $\frac{15 \cdot x}{3} = 35$, also $x = 7$. *Jedes Octupel ist mithin an* 7 *Tripeln betheiligt*, und daraus folgt, dass es mit jedem der 14 anderen Octupel in einem Tripel vorkommt. Wir fassen dies in dem Satze zusammen:

24. *Versteht man unter einem Tripel von Octupeln* 3 *solche, welche* 4 *Hauptgerade gemeinsam haben, so bestimmen* 2 *Octupel eines Tripels das dritte eindeutig. Jedes der* 15 *Octupel einer Art bestimmt mit jedem anderen derselben Art ein Tripel. Die Anzahl der letzteren ist* 35.

Die 28 *Geraden eines Punktoctupels O sondern sich demnach in* 4 . 7. *Je* 4 *bilden die gemeinsamen Geraden eines der* 7 *Tripel, an denen O Theil nimmt.*

Hiernach ist es nun sehr leicht, die 28 Geraden eines Octupels hinzuschreiben. Um z. B. die Geraden des Octupels $L(1, 5)$ zu erhalten, notire man zunächst aus der Tabelle (9) die unter 1 aufgeführten Geraden incl. L, und schreibe zu jeder dieser 7 Geraden die 3 anderen, welche man erhält bei Festhaltung von λ durch Vertauschung von $3, \mu, \mu, \mu$.

Zugleich folgt aus dem Vorigen:

25. *Irgend 2 der 15 Punktoctupel einer Art haben keinen Hauptpunkt gemeinsam.*

Die 120 Hauptpunkte liegen also getrennt zu je 8 in den 15 Punktoctupeln der einen Art.

Was nun die Ebenenoctupel anbetrifft, so gelten die analogen Sätze. Es sei aber noch bemerkt, dass die in Nr. (24) aufgeführten Geraden 2 Punkte verbinden, welche 2 metharmonisch zusammengehörigen Punkten in 2 metharmonisch zusammengehörigen Ebenen zugeordnet sind. Hieraus folgt, dass dieselben Geraden (24) auch einem Ebenenoctupel angehören müssen. *Demnach sind die 4 gemeinsamen Geraden eines Tripels von Punktoctupeln auch gemeinsame Gerade eines Tripels von Ebenenoctupeln.*

Die Tripel der 15 Octupel der anderen Art endlich erhält man, wenn man bei der Construction der 4 gemeinsamen Hauptgeraden eines derselben nicht λ sondern μ festhält.

Da die 4 in (24) angegebenen Geraden dem Octupel $L(1, 5)$ angehören, so schneidet z. B. die 2[te] derselben 2 von den Hauptebenen von L, die Ebenen (I, VI) nämlich, in 2 Hauptpunkten. Dieselbe Gerade aber, als dem Octupel $L(2, 6)$ angehörig, schneidet 2 andere von den Hauptebenen von L nämlich (II, VI) wiederum in 2 Hauptpunkten, und ebenso noch 2 andere nämlich (III, IV), als dem Octupel $L(3, 4)$ angehörig. *Die genannte Gerade hat demnach die ausgezeichnete Eigenschaft, die 6 Hauptebenen von L in 6 Hauptpunkten zu schneiden.*

Da die 4 Geraden (24) aber auch gemeinsame Geraden eines Tripels von Ebenenoctupeln sind, so folgt dualistisch: *Die genannte Gerade hat die weitere Eigenschaft, dass ihre 6 Hauptebenen aus der Geraden L die 6 Hauptpunkte herausschneiden.*

Dasselbe gilt offenbar von je zweien der 4 gemeinsamen Geraden eines Tripels von Octupeln, also folgt:

26. *Die 4 einem Tripel von Octupeln gemeinsamen Geraden stehen in der merkwürdigen Beziehung zu einander, dass jede durch die 6 Hauptebenen jeder der 3 anderen in ihren 6 Hauptpunkten geschnitten wird.*

Von 2 Octupeln verschiedener Art, welche zur Geraden L gehören, mache ich nur die Angabe, dass solche entweder 7 Gerade gemeinsam haben, wie z. B. die Octupel $L(1, 5)$ und $L(1, 6)$, oder 4 Gerade, wie z. B. $L(1, 5)$ und $L(2, 4)$, dass letztere 4 aber durchaus verschieden sind von den Geraden, welche 2 Octupel derselben Art gemeinsam haben. Nach diesen Bemerkungen ist man im Stande, nachzuweisen, dass man in der Geraden L mit ihren 6 Punctoctupeln im Verein mit der Gegengeraden L' mit ihren 6 Ebenenoctupeln sämmtliche 140 Gerade der Configuration vor sich hat.

§ 9.

Nebengerade der Configuration.

Wir haben in (19) eine Gerade mit den Coordinaten

$$N \equiv -1,\ 2\lambda,\ 2\mu,\ \mu^3,\ \lambda^3,\ -1,\ -1$$

kennen gelernt, welche durch 2 Hauptpunkte geht, nämlich durch die dem Punktepaare 1, 2 in den Ebenen I, II zugeordneten Punkte, und welche nach Satz (20) in § 7 in einer Hauptebene liegt. Es ist nicht schwer, alle Hauptgeraden anzugeben, welche die Gerade N schneiden. Man erhält dieselben sämmtlich, indem man auf die 7 Geraden eines Büschels, welche von der Geraden N geschnitten werden, alle 6 Vertauschungen von x_0, x_5, x_6 anwendet, bei denen offenbar N ungeändert bleibt. Es resultiren im Ganzen 24 Transversalen der Geraden N. Eine leichte Untersuchung derselben ergiebt, dass 3 mal je 7 derselben durch einen auf N liegenden Punkt gehen, während die 3 übrig bleibenden Transversalen von N, welche ich l_1, l_2, l_3 nennen will, zu einander windschief sind. *Also liegen auf N 3 Hauptpunkte.* Interessant ist es nun zu sehen, wie sich diese Verhältnisse dualistisch umkehren. Man braucht zu dem Zwecke nur auf N und ihre 24 Transversalen eine ungerade Vertauschung der x anzuwenden, welche N ungeändert lässt, z. B. (x_5, x_6). Alsdann wandeln sich die 3 Hauptpunkte in 3 Hauptebenen um in der Weise, dass unter Aufnahme der vorhin ausgeschiedenen 3 Geraden l_1, l_2, l_3 in die Geraden der 3 Hauptebenen, jetzt 3 andere Gerade m_1, m_2, m_3 ausscheiden, welche durch die 3 Hauptpunkte gehen, und ebenfalls unter einander windschief sind.

Wenden wir auf N die 7! Vertauschungen der x an, so erhalten wir 840 Gerade, die wir Nebengerade 1ter Ordnung nennen wollen. Wir haben alsdann den Satz:

27. *Die 120 Hauptpunkte liegen 840 mal zu je dreien auf je einer Nebengeraden erster Ordnung, ebenso schneiden sich die 120 Hauptebenen 840 mal zu je dreien in denselben Nebengeraden.*

Ausser den Hauptgeraden und diesen Nebengeraden existiren keine Geraden, auf welchen mehr als 2 der 120 Hauptpunkte liegen. Die Verbindungsgeraden zweier Hauptpunkte, welche keine weiteren Hauptpunkte enthalten, haben entweder in beliebiger Reihenfolge die Coordinaten:

$$1,\ -1,\ 1,\ \lambda,\ \mu,\ 0,\ 0$$

(Nebengerade zweiter Ordnung. Ihre Anzahl ist 1260. Es sind dies übrigens die in (14) bereits erwähnten Geraden) oder folgende:

$$2,\ \lambda^2,\ \lambda^2,\ \mu^2,\ 3+2\lambda,\ 3+2\mu.$$

(Nebengerade dritter Ordnung. Ihre Anzahl ist ebenfalls 1260).

Man zählt leicht ab, dass durch jeden Hauptpunkt 21 Nebengerade erster, 21 Nebengerade zweiter und 21 Nebengerade dritter Ordnung gehen. Hieraus folgt:

28. *In Bezug auf einen Hauptpunkt P spalten sich die* 119 *übrigen in* 35 + 42 + 42. *Die* 35 *liegen zu je* 5 *auf den durch P gehenden* 7 *Hauptgeraden, die ersten* 42 *zu je zweien auf den* 21 *durch P gehenden Nebengeraden erster Ordnung, die letzten* 42 *einzeln auf den durch P gehenden* 21 *Nebengeraden zweiter und* 21 *Nebengeraden dritter Ordnung.*

Berlin, den 3. Juli 1889.

Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven.

Von

E. Study in Marburg.

Herr Olivier hat in zwei auf die Theorie der algebraischen Curven bezüglichen Abhandlungen mehrere Sätze aufgestellt, welche die Aufmerksamkeit einiger Mathematiker erregt haben.*) Diese Sätze und viele andere sind als besondere Fälle in einem allgemeineren Theorem enthalten, das, soweit es sich auf Curven mit einfachen Schnittpunkten bezieht, so ausgesprochen werden kann:

Sind auf einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung C^n vier Punktgruppen a, b, γ, δ gelegen, von welchen a und b residual sind zu γ und δ, so dass die Paare (a, γ), (a, δ), (b, γ), (b, δ) je ein volles Schnittpunktsystem der C^n bezüglich mit einer C^l, C^m, C^{m_1}, C^{l_1} ausmachen; so liegen die Punktgruppen d, c, β, α, in welchen sich die Curven C^l und C^{m_1}, C^m und C^{l_1}, C^l und C^m, C^{l_1} und C^{m_1} noch weiterhin durchdringen, auf einer C^{n_1}, deren Ordnung sich aus den Relationen ergibt:

$$(1)\qquad l + l_1 = m + m_1 = n + n_1.$$

Dieser Satz ist keineswegs neu; er enthält nur eine vollständige geometrische Einkleidung der Identität des sogenannten *Restsatzes*. Seien nämlich die linken Seiten der Gleichungen, welche die betreffenden Curven darstellen, ebenso bezeichnet, wie die Curven selbst, so hat man, wenn γ und δ vermöge C^l und C^m residual sind zu a, und b vermöge C^{l_1} residual ist zu δ, nach dem Nöther'schen Fundamentalsatze eine Identität von der Form $C^l \cdot C^{l_1} = C^m \cdot C^{m_1} + C^n \cdot C^{n_1}$, aus welcher eben geschlossen wird, dass b auch residual ist zu a vermöge einer Curve, deren Ordnung m_1 sich aus der Gleichung $l + l_1 = m + m_1$ ergibt.**) Wir mögen nun aber die Identität,

---

*) Olivier, „Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven." Crelle's J. Bd. 70, S. 156 ff. „Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven". Ebenda, Bd. 71, S. 1 ff. Bacharach, „Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz", Math. Ann. Bd. 26, S. 292 u. ff.

**) Brill und Nöther, „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie." Math. Ann. Bd. 7, S. 273.

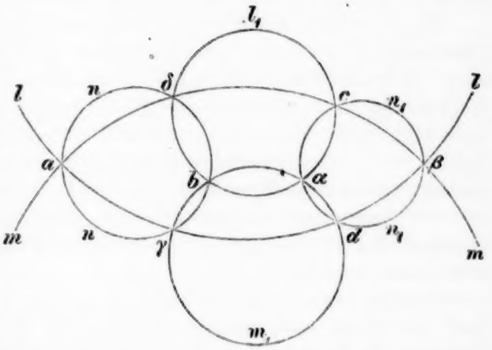
indem wir etwa $-C^{l_1}$ für C^{l_1} setzen, zunächst symmetrischer schreiben:

(2) $$C^l \cdot C^{l_1} + C^m \cdot C^{m_1} + C^n \cdot C^{n_1} = 0$$

und dann bemerken, dass auch der letzte Factor C^{n_1} einer einfachen geometrischen Deutung fähig ist: Gleich Null gesetzt, stellt er gerade die Curve dar, deren Vorhandensein in obigem Satze behauptet wurde.

Besondere Beachtung verdient nun die Symmetrie der Identität (2). Die Curven C^l, C^{l_1}, C^m, C^{m_1}, C^n, C^{n_1} ordnen sich in bestimmter Weise zu Paaren; eine einzelne unter ihnen ist aber nicht ausgezeichnet. Daraus folgt, dass man von *irgend* einer dieser 6 Curven ausgehend, eine ganz entsprechende Anordnung der Schnittpunktgruppen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten muss, wie bei Benutzung von C^n als Grundcurve. Jede der 6 Curven trägt 4 Punktgruppen, zwei von uns durch Buchstaben des lateinischen und zwei durch Buchstaben des griechischen Alphabets bezeichnete Gruppen.

Jede der ersteren Gruppen ist residual zu jeder der beiden anderen Gruppen, vermöge je einer Curve des Systems, welche mit der gerade als Grundcurve betrachteten Curve nicht zu einem Paar gehört. Die acht Punktgruppen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ordnen sich zu vier Paaren: a, α; b, β; c, γ; d, δ; derart, dass zwei demselben Paar angehörige Gruppen durch *keine* der 6 Curven des Systems verbunden werden können. Ferner ordnen sie sich in zwei Quadrupel a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; derart, dass irgend zwei Gruppen desselben Quadrupels auf einer bestimmten Curve des Systems corresidual sind, und dass beide Quadrupel einander in der eben bemerkten Zuordnung zu Paaren entsprechen. Endlich bestimmt jede Punktgruppe (z. B. a) des einen Quadrupels drei Punktgruppen (β, γ, δ) des anderen Quadrupels, deren jede mit



ihr zusammen das volle Schnittpunktsystem zweier Curven des Systems ausmacht. Kurz, die Gruppirung der acht Punktgruppen und sechs Verbindungscurven ist (wie auch aus naheliegenden Gründen von vorneherein deutlich) dieselbe, welche von den Ecken eines Würfels und seinen Seitenflächen dargeboten wird. Für uns mag sie durch die beigefügte Figur veranschaulicht werden, in welcher die sechs Curven durch Kreise dargestellt sind.

Statt von einer der sechs Curven als einer Grundcurve auszugehen, kann man auch eine der acht Punktgruppen auszeichnen, und demgemäss den Satz etwa in folgender Form aussprechen:

Wenn drei algebraische Curven C^l, C^m, C^n durch dieselben Punkte a gehen, und sich ausserdem paarweise noch in den Punktgruppen δ, γ, β durchdringen, so kann man noch in mannichfacher Weise drei andere Curven C^{l_1}, C^{m_1}, C^{n_1} finden, deren Ordnungen den Gleichungen (1) *genügen, welche einzeln bezüglich durch die Punktgruppen δ, γ, β gehen, welche ferner paarweise auf den Curven C^l, C^m, C^n denselben Rest ergeben, und deren sämmtliche übrige Schnittpunkte in gewissen Punkten α der Ebene zusammenfallen.*

Bezeichnen wir die Anzahlen der Punkte $a \ldots \delta$ durch dieselben Buchstaben, wie die Punktgruppen selbst, so müssen zwischen diesen Zahlen natürlich die folgenden Relationen bestehen:

$$(3) \quad \begin{cases} a + \delta = mn, & b + \gamma = m_1 n, \\ a + \gamma = nl, & b + \delta = n l_1, \\ a + \beta = lm, & b + \alpha = l_1 m_1, \\ c + \beta = m n_1, & d + \alpha = m_1 n_1, \\ c + \alpha = n_1 l_1, & d + \beta = n_1 l, \\ c + \delta = l_1 m, & d + \gamma = l m_1. \end{cases}$$

Die Relationen allein würden, mit den Gleichungen (1) zusammengenommen, von den 14 Zahlen l, m, n, l_1, m_1, n_1, a, b, c, d, α, β, γ, δ im Ganzen fünf willkürlich lassen; es ist aber natürlich nicht gesagt, dass jedem ganzzahligen Lösungssystem dieser Gleichungen auch eine Figur der betrachteten Art entspricht. Vielmehr haben diese Zahlen, wenn sie einer solchen Figur entsprechen sollen, noch gewissen Bedingungen zu genügen (die sich nicht allgemein angeben lassen); es wird ferner im Allgemeinen auch die Lage der willkürlich anzunehmenden Stücke der Figur noch bedeutenden Einschränkungen unterworfen sein.

Denken wir uns die Punkte a als gegeben, so haben diese ihrer Zahl und Lage nach selbstverständlich der Bedingung zu genügen, dass man die Curven C^l, C^m, C^n hindurchlegen kann (wenn l, m, n gegebene Zahlen sind). Es müssen ferner diese Curven so gewählt werden können, dass keine zwei von ihnen einen Theil gemein haben, und, wenn sie gleicher Ordnung sind, auch so, dass sie nicht demselben Büschel angehören. Denken wir uns ferner die Zahl l_1 gegeben; so wird dieser, wenn sie gross genug ist, im Allgemeinen eine Schaar von Curven C^{l_1} entsprechen. Jede dieser Curven wird aus den Curven C^n und C^m einen gewissen Rest (b, c) ausschneiden. Jede

der Restgruppen b wird man nun mit den Punkten γ durch mindestens eine C^{m_1} verbinden können, im Allgemeinen aber noch durch eine lineare Schaar; und jedes der so bestimmten Curvenpaare C^{l_1}, C^{m_1} gibt Anlass zur Entstehung einer bestimmten Figur der geschilderten Art. Die Willkür, die man hiernach bei gegebenen Curven C^l, C^m, C^n und bei gegebenem Werthe von l_1 im Allgemeinen noch hat, wird man dazu verwenden können, die Lage einiger von den Punkten a, b, c, d vorzuschreiben. Man hat in den Anwendungen dann nur darauf zu achten, dass die Curvenschaaren C^{l_1} (mit den Basispunkten δ) und C^{m_1} (mit den Basispunkten γ) durch die Punktgruppen b projectiv auf einander bezogen sind, oder es doch werden, wenn man durch geeignete den Curvenschaaren aufzuerlegende äussere Bedingungen dafür sorgt, dass jede der Punktgruppen b aus der C^n nur noch durch *eine* Curve C^{l_1} und *eine* Curve C^{m_1} ausgeschnitten werden kann. Es ist ferner zu beachten, dass es durchaus nicht nothwendig ist, dass sämmtliche Punkte z. B. der Gruppe δ von denen der Gruppen β oder γ verschieden sind: Es können diese Gruppen sehr wohl einzelne Punkte gemein haben, so lange nur die oben ausgesprochenen allgemeinen Voraussetzungen erfüllt bleiben. Nimmt man an, dass die Gruppen α, β, γ eine Anzahl von Punkten gemeinsam enthalten, so werden durch diese überhaupt alle Curven der Figur hindurchgehen müssen; und man erhält so einen, wenn man will, allgemeineren, in den Anwendungen jedenfalls besonders zu berücksichtigenden Satz.

So einfach, ja selbstverständlich die vorstehenden Bemerkungen sind, so fruchtbar erweisen sie sich in ihrer Anwendung auf specielle Probleme. Zunächst ergeben sich, wie bemerkt, als besondere Fälle die sämmtlichen von Herrn Olivier aufgestellten Sätze. Ein erster von Herrn Olivier angegebener Satz lautet:

„*Hat man in einer Ebene drei beliebige Curven der n^{ten} Ordnung* [die nicht zu einem Büschel gehören], *und legt man durch einen willkürlichen Punkt in dieser Ebene drei andere Curven, ebenfalls von der n^{ten} Ordnung, durch die jedesmaligen Durchschnittspunkte von zwei der obigen Curven, so treffen sich diese drei Curven in noch weiteren $n^2 - 1$ Punkten.*“

Um dies einzusehen, hat man (mit Bezug auf die oben eingeführten Bezeichnungen) $l = m = n$, $l_1 = m_1 = n_1 = n$ zu nehmen, ferner $a = 0$ zu setzen. Es wird dann $\alpha = \beta = \gamma = \delta = n^2$, $b = c = d = 0$. Die beiden Curvenbüschel C^{l_1} und C^{m_1} lassen jetzt noch einen von den Punkten α willkürlich; durch diesen und die Punkte β ist dann aber auch die Curve C^{n_1} völlig bestimmt.

Zwei weitere Sätze, die Herr Olivier aufgestellt hat, entstehen, wenn man wieder $l = m = n$ nimmt, und die Punkte a so wählt,

dass durch die Punkte β, γ, δ gerade je *eine* Curve $(n-1)^{\text{ter}}$, bezüglich $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt werden kann. Daraus ergeben sich, wenn man von speciellen Lagen der Punkte β, γ, δ absieht, im ersten Falle die Zahlenwerthe

$$\beta = \gamma = \delta = \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \quad b = c = d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$
$$a = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \qquad \alpha = \frac{n(n-1)}{2},$$

im zweiten Falle aber die Zahlenwerthe

$$\beta = \gamma = \delta = \frac{(n-2)(n+1)}{2}, \quad b = c = d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$
$$a = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \qquad \alpha = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Die Punkte β sind nur so zu wählen, dass sie nicht Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ bezüglich $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Hiermit sind bereits zwei weitere Sätze des Herrn Olivier bewiesen.*) Wir wollen diese indessen noch vervollständigen, indem wir die Frage beantworten, welches die für den Ausnahmefall charakteristische Eigenschaft der Punkte a ist.

Nehmen wir an, es gehen im ersten Falle durch die Punkte β noch ∞^1 C^{n-1}, so wird irgend eine von ihnen eine der hindurchgelegten C^n noch in einer Gruppe von $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten treffen, welche die Beweglichkeit Eins besitzt. Diese Punkte werden dann nach dem sogenannten *Riemann-Roch'schen Satze***) auf einer C^{n-3} liegen müssen. Letztere Curve trifft die C^n noch in $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ Punkten, durch welche ein Büschel von C^{n-3} gelegt werden kann. Diese Punkte müssen nun nach dem Restsatze mit den Punkten a zusammen auf einer C^{n-2} liegen. Da sich diese Betrachtung sofort umkehren lässt, so können wir den ersten der beiden erwähnten Sätze in der folgenden vervollständigten Form aussprechen:

1. „*Legt man durch* $a = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ *auf keiner Curve* $n-2$. *O. enthaltene Punkte drei Curven n. O., so kann man durch die* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *Punkte, welche sie ausserdem paarweise gemein haben, je eine Curve*

---

*) Betreffs des von Herrn Bacharach gegebenen Beweises sehe man die Bemerkungen auf S. 224.

**) Wegen der Formulirung dieses Satzes vergleiche man Noether, in Crelle's J. Bd. 97, S. 224 u. ff., woselbst auch die genaueren Litteraturnachweise zu finden sind.

$n-1$. O. legen. Diese drei Curven schneiden sich zu zweien in je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten jener Curven n. O., ihre übrigen Schnittpunkte aber entfallen in dieselben $\alpha = \frac{n(n-1)}{2}$ Punkte der Ebene.“

Tritt der Ausnahmefall, dass die Punkte a auf eine C^{n-2} zu liegen kommen, wirklich ein, so entsteht eine noch viel merkwürdigere Figur. Man findet dann, unter Berücksichtigung des bereits Gesagten, und des Umstandes, dass die drei Büschel von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung projectiv auf einander bezogen sind, und also paarweise je eine Curve $(2n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, den folgenden Satz:

2. „*Legt man durch $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Punkte a, welche einer einzigen C^{n-2} angehören, drei Curven n. O. C_1^n, C_2^n, C_3^n, welche sich paarweise noch in je $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkten β, γ, δ treffen mögen; so geht durch jede dieser letzteren Punktgruppen ein Büschel von Curven $n-1$. O. Es gibt dann eine gewisse Curve $n-2$. O. Γ^{n-2} von folgender Eigenschaft: Legt man aus irgend einem Punkt x der Γ^{n-2} drei Curven C_1^{n-1}, C_2^{n-1}, C_3^{n-1} bezüglich durch die Punkte β, γ, δ, so gehen diese Curven noch durch die nämlichen $\alpha - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ Punkte, welche ebenfalls auf die Γ^{n-2} zu liegen kommen. Sie treffen sich ferner paarweise noch in Gruppen b, c, d von je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n entfallen. Diese Punktgruppen b, c, d liegen ausserdem auf je einer Curve $n-3$. O., C_1^{n-3}, C_2^{n-3}, C_3^{n-3}. Letztere treffen wiederum die Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n bezüglich noch in $\frac{n(n-3)}{2}-1$ festen, von der Wahl des Punktes x unabhängigen Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, welche auf der Curve C^{n-2} gelegen sind, und zusammen mit den Punkten a das volle Schnittpunktsystem der Curve C^{n-2} mit je einer der Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n bilden. Die Curven C_1^{n-3}, C_2^{n-3}, C_3^{n-3} gehen ferner durch dieselben $\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$ Punkte der C^{n-2}, und schneiden sich ausserdem paarweise in $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die drei Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{n-1}, C_2^{n-1}, C_3^{n-1} zu liegen kommen.*“

Die Zahl n muss hier mindestens gleich vier genommen werden, da im Falle $n=3$ die drei Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n einen gemeinsamen Theil enthalten würden.

Wir haben in Satz 2. denjenigen Ausnahmefall des Satzes 1. behandelt, in welchem die Punkte β, γ, δ die Basispunkte je eines *Büschels* von Curven $n-1$. O. werden. Wie nun aber, wenn durch diese Punkte sogar ein *Netz* von Curven $n-1$. O. gelegt werden

kann, oder wenn noch mehr als drei linear unabhängige Curven $n-1$. O. hindurchgehen? Auch auf diese Fragen ergibt sich auf dem von uns eingeschlagenen Wege die erschöpfende Antwort. Wir beschränken uns darauf, noch den erstgenannten Ausnahmefall zu behandeln.

Sollen die Punkte β Basispunkte eines Netzes von C^{n-1} sein, so kann das auf zweierlei Arten geschehen: Entweder es gehen durch sie eigentliche, nicht zerfallende C^{n-1} hindurch, oder jede hindurchgelegte C^{n-2} zerfällt in eine bestimmte C^{n-2} und eine ganz beliebige Gerade. In beiden Fällen findet man, ganz ähnlich wie oben (S. 220), dass durch die Punkte a noch ein Büschel von C^{n-2} gelegt werden kann, und dass dieser Umstand kennzeichnend dafür ist, dass die Punktgruppen β, γ, δ noch je ein Netz von C^{n-1} tragen. Zwischen den beiden genannten Fällen besteht nun aber ein charakteristischer Unterschied: Im ersten liegen die Punkte b, c, d in welchen die drei C^n von einer durch die Punkte a gehenden C^{n-2} ausserhalb der Punktgruppe a noch getroffen werden, auf drei linear unabhängigen *eigentlichen* C^{n-3}; im zweiten sind sie auf je einer C^{n-4} enthalten. Dies tritt aber, wie man leicht sieht, dann und nur dann ein, wenn die $(n-2)^2 - a$ Punkte, in welchen sich zwei C^{n-2} des durch die Punkte a gelegten Büschels ausserhalb der Punkte a noch treffen, auf einer C^{n-6} enthalten sind. Diese Bedingung ist von selbst erfüllt, wenn $n = 6$ ($n = 6$ ist der kleinste überhaupt in Betracht kommende Werth der Zahl n); sie hat eine specielle Lage der Punkte a zur Folge, wenn $n > 6$.

Schliessen wir diese besondere Lage zunächst aus, so ergibt sich der Satz:

3 a). „*Haben* $\frac{n(n-1)}{2}+1$ *Punkte a eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen* $\frac{n(n-7)}{2}+3$ *Punkten, die auf keiner C^{n-6} gelegen sind, zum vollen Schnittpunktsystem zweier C^{n-2} ergänzen, so geht durch die* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *Punkte β, γ, δ, welche drei die Punkte a enthaltende Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n ausser den Punkten a paarweise gemein haben, noch je ein Netz von eigentlichen Curven $n-1$. O. Man kann dann durch einen beliebig angenommenen Punkt der Ebene auf eine einzige Weise drei Curven $n-1$. O. legen, welche bezüglich die Punktgruppen β, γ, δ enthalten, und sich paarweise in* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Punkten der drei Curven n. O. treffen. Die drei Curven $n-1$. O. schneiden sich ausser in dem angenommenen Punkte noch in gewissen* $a-1=\frac{n(n-1)}{2}-1$ *weiteren Punkten.*“ Jene $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte aber gehören der Basis eines Büschels von Curven n—3. O. an, u. s. w. u. s. w.

In der That, jener willkürlich angenommene Punkt x bestimmt zusammen mit den Punkten γ ein Büschel von Curven $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung; und dieses wiederum bestimmt ein Büschel von Curven $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung durch die Punkte δ, wenn man je zwei Curven einander zuordnet, welche die die Gruppen γ und δ enthaltende C^n in den nämlichen Punkten treffen. Das zweite Büschel schickt eine seiner Curven durch den Punkt x; woraus sich mit leichter Mühe der Satz ergibt. Auszuschliessen sind gewisse leicht zu erkennende besondere Lagen des Punktes x. Eine interessantere Figur bietet wieder der Ausnahmefall dar:

3b). „*Ergänzen sich* $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ *Punkte a mit* $\frac{n(n-7)}{2} + 3$ *Punkten, die auf einer einzigen* C^{n-6} *gelegen sind, zum vollen Schnittpunktsystem zweier* C^{n-2}, *so kann man durch die* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *Punkte* β, γ, δ, *welche drei die Punkte a enthaltende* C_1^n, C_2^n, C_3^n *paarweise noch gemein haben, je eine Curve* $n - 2$. *O.* C_1^{n-2}, C_2^{n-2}, C_3^{n-2} *legen. Diese gehen durch dieselben* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ *Punkte, und treffen sich ausserdem paarweise in* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *Punkten, welche bezüglich auf die drei Curven n. O. zu liegen kommen.*"

Der Satz 3b) behält seine Gültigkeit, wie bemerkt, noch für den Werth $n = 6$, während im Satze 3a) die Zahl n mindestens den Werth 7 haben muss.

In ganz gleicher Weise lässt sich der andere der beiden oben angeführten Sätze behandeln, mit voller Berücksichtigung der Ausnahmefälle. Ich beschränke mich darauf, den Satz selbst in vervollständigter Form zu reproduciren:

„*Legt man durch* $a = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ *auf keiner Curve* $n - 1$. *O. enthaltene Punkte drei Curven n. O., so kann man durch die* $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ *Punkte, welche sie paarweise gemein haben, je eine Curve* $n - 2$. *O. legen. Diese drei Curven schneiden sich zu zweien in je* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Punkten, welche bezüglich auf die Curven n. O. zu liegen kommen, ihre sonstigen Schnittpunkte aber entfallen in dieselben* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *Punkte.*"

In derselben Weise wird man auch die Sätze ableiten und vervollständigen können, welche Herr Olivier in der zweiten der oben genannten Abhandlungen aufgestellt hat; das im Vorstehenden Mitgetheilte mag aber genügen. — Es wird dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, dass man zu ganz ähnlichen Sätzen, wie den aufgeführten, noch in zahllosen anderen Fällen gelangen kann. Zu einem besonders einfachen Resultat wird man z. B. immer dann kommen,

wenn durch gewisse Punkte a drei Curven, die durchaus nicht nothwendig dieselbe Ordnung zu haben brauchen, derart hindurchgehen, dass durch ihre weiteren Schnittpunkte je eine bestimmte Curve niederster Ordnung gelegt werden kann. Ein ganz einfacher Satz dieser Art, der seiner zahlreichen Anwendungen wegen hervorgehoben zu werden verdient, ist z. B. der folgende:

„Legt man durch nm Punkte einer C^m, die ein volles Schnittpunktsystem bilden, drei Curven n. O., so bestimmen die weiteren Schnittpunkte von je zweien dieser Curven solche drei Curven n — m. O., welche einem und demselben Büschel angehören."

Dieser Satz, der wohl bekannt sein dürfte, kann z. B. mit Vortheil zur Ableitung der bekannten Configuration der durch 6 Punkte eines Kegelschnittes bestimmten *Pascal'schen Linien* verwendet werden. Unter den Sätzen dieser Art, deren man aufstellen kann, soviele als man nur will, haben die eben behandelten Olivier'schen nur insofern eine Besonderheit, als bei ihnen die von uns mit a bezeichneten Punkte lediglich solchen Bedingungen zu genügen haben, die sich durch Ungleichungen ausdrücken lassen; während im Allgemeinen die Punkte a auch durch Gleichungen an einander gebunden sein werden. Ich habe die genannten Sätze übrigens nicht darum so ausführlich behandelt, weil ich glaubte, dass sie durch den erwähnten Umstand einen besonderen Vorzug erhielten; sondern vielmehr, weil ich an einem bestimmten Beispiele zu zeigen wünschte, wie derartige Fragen behandelt werden können. Es war diese Auseinandersetzung auch nach den sehr schätzbaren Erörterungen des Herrn Bacharach über denselben Gegenstand nicht überflüssig. Denn einmal tritt in dem a. a. O. gegebenen Beweise in Folge der (unnöthigen) Herbeiziehung des Cayley'schen Satzes diejenige Voraussetzung, auf welcher *allein* die Möglichkeit ähnlicher Schlüsse beruht, nicht deutlich hervor; dann hat Herr Bacharach die Bedingungen, welchen die von uns mit a bezeichneten Punkte zu genügen haben, nicht angegeben; endlich ist er in eine Erörterung der Ausnahmefälle nicht eingetreten.

Die nachfolgenden, aus einer grossen Zahl ähnlicher Sätze herausgegriffenen Beispiele mögen weiterhin dazu dienen, diese Art von Anwendungen des Restsatzes zu veranschaulichen. Einige unter ihnen sind bekannt, die meisten indessen dürften neu sein.

1. *Gehen drei Kegelschnitte durch dieselben drei Punkte, so gibt es ∞^1 Dreiecke, deren Ecken bezüglich auf die drei Curven zu liegen kommen, während ihre Seiten durch die drei Punkte gehen, welche die Kegelschnitte paarweise noch gemein haben.*

Als eine Umkehrung hiervon kann angesehen werden der Satz:

2. *Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks je einen Punkt α, β, γ an, und verbindet die drei Ecken a, b, c bezüglich mit den*

Punkten β, γ; γ, α; α, β *und zwei fest angenommenen Punkten durch je einen Kegelschnitt, so gehen diese drei Curven noch durch einen weiteren Punkt.*

Dieser Satz wurde (ob zuerst?) in metrischer Form ausgesprochen von Möbius (Statik Bd. I, S. 117).

3. *Nimmt man auf drei Kegelschnitten, welche durch einen Punkt gehen, noch je einen Punkt beliebig an; so bestimmen je zwei dieser Punkte zusammen mit den 3 Punkten, in welchen sich die beiden zugehörigen Kegelschnitte noch weiter treffen, einen neuen Kegelschnitt. Die drei so construirten Kegelschnitte gehen durch dieselben drei Punkte.**)

Man erhält so eine Figur von einfacher Symmetrie: Die 6 Kegelschnitte ordnen sich zu drei Paaren; die vier Schnittpunkte von zwei nicht zu demselben Paar gehörigen Kegelschnitten ordnen sich zu drei und einem. So entstehen 4 Tripel und 4 einzelne Schnittpunkte; jeder der 6 Kegelschnitte trägt zwei Tripel und zwei einzelne Schnittpunkte, jedes Tripel und jeder einzelne Schnittpunkt aber liegen auf drei Kegelschnitten. — Nichts hindert uns, von den drei Schnittpunkten, in welchen sich je zwei der gegebenen Kegelschnitte paarweise noch treffen, zwei in bestimmt angenommene Punkte der Ebene fallen zu lassen, so dass also die drei Kegelschnitte nun 3 gemeinsame Schnittpunkte haben, von denen einer ausgezeichnet ist. Den auf diese Art gewonnenen Satz können wir in metrischer Form so aussprechen:

4. *Nimmt man auf drei Kreisen, welche sich in einem Punkte treffen, je einen Punkt an, und verbindet je zwei dieser Punkte mit dem weiteren Schnittpunkte der sie enthaltenden Kreise durch einen neuen Kreis, so treffen sich die drei so construirten Kreise wieder in einem Punkt.*

Die so erhaltene Figur von 8 Punkten und 6 Kreisen ist dieselbe, die wir oben benutzten, um den allgemeinen Satz symbolisch darzustellen. Der Satz 4. ist übrigens von dem Satze 2. nicht wesentlich verschieden, da er aus ihm durch eine quadratische Transformation abgeleitet werden kann. Ausserdem kann der Satz 4. nach vorgängiger Uebertragung auf die Kugel als ein Specialfall des bekannten Satzes angesehen werden, wonach 7 Schnittpunkte dreier Flächen zweiten Grades den achten bestimmen. Endlich sei bemerkt, dass ein dem Satze 4. ganz analoger Satz im Raume gilt. Nimmt man auf 4 durch denselben Punkt gehenden Kugeln je einen weiteren Punkt an, so wird durch eine der obigen ganz entsprechende Construction noch ein weiterer Punkt bestimmt. Man erhält dann eine Figur von zehn Punkten, die sich in zwei Quintupel und fünf Paare

*) Vgl. Olivier, Crelle's J. Bd. 71.

ordnen, und acht Kugeln die sich in vier Paare ordnen. Jede Kugel trägt fünf Punkte, und jeder Punkt liegt auf vier Kugeln.

Zu einer nicht minder einfachen Figur führt der folgende Satz:

5. *Nimmt man drei Kegelschnitte an, welche sich in den nämlichen beiden Punkten treffen, so kann man durch zwei beliebige Punkte immer und im Allgemeinen nur auf eine Art drei Kegelschnitte legen, die sich paarweise in je zwei Punkten der drei gegebenen Kegelschnitte begegnen, und ausserdem durch je eines der Schnittpunktpaare hindurchgehen, in welchen sich die gegebenen Kegelschnitte zu zweien durchdringen.*

Die so bestimmte Figur besteht aus 8 Punktepaaren, in deren jedem sich gewisse drei von den 6 Kegelschnitten treffen.

Die acht Punktepaare ordnen sich zu zweimal vieren, derart, dass die zu einem Quadrupel gehörigen vier Sehnen sich in je einem Punkte treffen.

Auf jedem Strahle jedes der beiden Strahlenquadrupel liegt ein Punktepaar; die drei Kegelschnitte der Figur, welche durch dieses Punktepaar gehen, schneiden sich dann paarweise noch auf drei Strahlen des anderen Quadrupels.

6. *Es seien C_1, C_2, C_3 drei Kegelschnitte durch die beiden Punkte a, t_1, t_2, t_3 seien die Punktepaare, in welchen sie sich ausserdem noch zu zweien durchdringen; ferner seien p_1, p_2, p_3 drei auf ihnen beliebig angenommene Punkte. Dann kann man noch auf ∞^1 Arten drei Kegelschnitte finden, Γ_1, Γ_2, Γ_3, welche bezüglich durch die Punkte t_1, p_2, p_3 — t_2, p_3, p_1 — t_3, p_1, p_2 gehen und sich ausserdem paarweise auf den drei Curven C_1, C_2, C_3 treffen. Diese drei Kegelschnitte gehen noch durch dieselben zwei weiteren Punkte; und alle ∞^1 so construirten Punktepaare bilden eine Involution eines gewissen Kegelschnittes, welcher durch die drei Punkte p_1, p_2, p_3 geht. Der Mittelpunkt dieser Involution ist unabhängig von der Wahl der Punkte p_1, p_2, p_3; er ist derselbe Punkt, in welchem sich die drei bezüglich durch t_1, t_2, t_3 gelegten Geraden treffen.*

Um dies einzusehen, berücksichtige man, dass die drei Kegelschnittbüschel $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ vermöge der Curven C_1, C_2, C_3 projectiv auf einander bezogen sind.

7. *Nimmt man auf drei Geraden durch denselben Punkt je ein Punktepaar an, und verbindet einen beliebig angenommenen Punkt mit je zweien dieser Punktepaare durch einen Kegelschnitt, so gehen die drei auf diese Art erhaltenen Kegelschnitte noch durch einen weiteren Punkt.*

Es entsteht so von Neuem die bereits mehrfach von uns heran-

gezogene Figur, welche z. B. von drei Kreisen und ihren gemeinsamen Sehnen gebildet wird. Der Satz 7 ist die Umkehrung des betreffenden bekannten Satzes.

8. *Nimmt man auf drei Curven 3. O., welche durch dieselben beiden Punkte gehen und sich also paarweise noch in je 7 Punkten treffen, je einen Punkt beliebig an, so bestimmen je zwei derselben mit den zugehörigen 7 Punkten eine neue C^3. Diese letzteren Curven 3. O. gehen sämmtlich durch gewisse 7 Punkte, und schneiden sich paarweise ausser in den angenommenen Punkten noch in je einem weiteren Punkt der gegebenen Curven 3. O.*

9. *Man lege durch 6 Punkte eines Kegelschnittes drei Curven 4. O., C_1, C_2, C_3, welche sich paarweise noch in Gruppen von je 10 Punkten a_1, a_2, a_3 treffen mögen, und aus dem Kegelschnitt noch drei Punktepaare b_1, b_2, b_3 ausschneiden. Dann liegen die Punktgruppen a_1, a_2, a_3 bezüglich auf 3 Curven 3. O. Γ_1, Γ_2, Γ_3. Diese gehen durch die nämlichen 7 Punkte, und schneiden sich ausserdem zu zweien noch in je einem Punktepaar c_1, c_2, c_3 der drei Curven C_1, C_2, C_3. Die Punktepaare a_1 und c_1, a_2 und c_2, a_3 und c_3 sind auf je einer geraden Linie enthalten; und diese drei Geraden treffen sich paarweise noch in drei Punkten der Curven Γ_1, Γ_2, Γ_3.*

10. *Liegen von den Schnittpunkten einer C^4 und einer C^5 10 auf einer C^3, so liegen die übrigen 10 auf einer zweiten C^3. Beide C^3 treffen die C^4 noch in je zwei Punkten, welche auf einer und derselben Geraden liegen. Sie treffen ferner die C^5 noch in je 5 Punkten, welche einem und demselben Kegelschnitt angehören. Die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Geraden aber vertheilen sich auf die beiden Curven 3. O.*

11. *Haben auf einer Curve 10. O. 30 Punkte eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen 6 Punkten eines Kegelschnittes zu dem vollen Schnittpunktsystem zweier Curven 6. O. ergänzen, so gilt dasselbe nicht allein von allen corresidualen Gruppen von 30 Punkten, sondern auch von den zu ihnen residualen Gruppen. Der Kegelschnitt aber ist derselbe für alle residualen und corresidualen Gruppen.*

12. *Haben von den 54 Schnittpunkten einer C^6 und einer C^9 27 eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen 3 Punkten einer Geraden zum vollen Schnittpunktsystem der C^6 und einer C^5 ergänzen, so ergänzen sich die übrigen 27 mit drei weiteren Punkten derselben Geraden zum vollen Schnittpunktsystem der C^6 und einer zweiten C^5. Die beiden Curven 5. O. treffen die genannte Gerade noch in je zwei Punkten, und die Curve 9. O. noch in je 18 Punkten. Diese*

$$2 + 2 + 18 + 18 = 40$$

Punkte sind auf einer Curve 4. O. enthalten.

13. *Sind von den 42 Schnittpunkten einer C^6 und einer C^7 21 die Basispunkte eines Netzes von C^5, so liegen die übrigen 21 auf einer C^4, und umgekehrt. Jede C^5 des Netzes trifft die C^6 noch in 9 Punkten eines Kegelschnittes, und die C^7 noch in 14 Punkten einer Curve 3. O. Die Curve 3. O. dreht sich um die weiteren 7 Schnittpunkte der C^4 und der C^7, der Kegelschnitt um die weiteren 3 Schnittpunkte der C^4 und der C^6. Dabei begegnen sich die Curve 3. O. und der Kegelschnitt fortwährend noch in einem Punkte der C^5 und in 5 Punkten der C^4.*

14. *Vertheilt man die 16 Schnittpunkte zweier Curven 4. O. irgendwie zu 8 und 8, und ergänzt beide Gruppen durch je einen weiteren Punkt a_1, bezüglich a_2, zu dem System der Basispunkte zweier Büschel von Curven 3. O. C_1^3 und C_2^3; so liegen diese Punkte a_1 und a_2 immer auf derselben Curve C^4 des gegebenen Büschels. Und zwar treffen die Curven C_1^3 die C^4 noch in 3 Punkten, welche mit a_2 in einer Geraden liegen, die Curven C_2^3 aber treffen sie in je drei Punkten, welche mit a_1 in einer Geraden gelegen sind.*

Um dies einzusehen, betrachte man eine C^3 und zwei C^4 durch die ersten 8 Punkte, von welchen Curven die eine so gewählt ist, dass sie den 9ten Basispunkt des zu den 8 Punkten gehörigen C^3-Büschels enthält. Durch die 4 weiteren Schnittpunkte der C^3 mit dieser C^4 kann man dann einen Kegelschnitt legen, welcher in zwei Gerade zerfällt, und aus der C^4 noch 4 weitere Punkte ausschneidet. Von diesen ist einer fest, während sich die anderen drei um jenen 9ten Basispunkt drehen können; u. s. w.

Ebenso ergibt sich der folgende Satz:

15. *Haben von den Schnittpunkten einer C^4 und einer C^6 12 eine solche Lage, dass alle hindurchgelegten C^4 sich noch in einem weiteren Punkt schneiden, so gehen auch alle C^4 durch die übrigen 12 Punkte noch durch einen 13ten Punkt. Und zwar liegen die drei beweglichen Schnittpunkte der Grundcurve C^4 mit den Curven des ersten C^4-Netzes in einer Geraden mit dem 13ten Basispunkt des zweiten Netzes, und umgekehrt.* —

16. *Legt man durch die 20 Schnittpunkte einer C^4 und einer C^5 drei Curven C_1^6, C_2^6, C_3^6, so schneiden sich die Curven C^4 und C_i^6 noch in je 4 Punkten $[4]_i$, ferner die C^5 und C_i^6 noch in je 10 Punkten $[10]_i$, endlich die Curven C_i^6 paarweise noch in je 16 Punkten $[16]_i$. Die Punkte $[4]_i$ liegen auf 3 Geraden Γ_i^1, die Punkte $[10]_i$ auf drei Kegelschnitten Γ_i^2, die Punkte $[16]_i$ auf 3 Curven 3. O. Γ_i^3. Die 6 Curven C_i^6, Γ_i^1, Γ_i^2, Γ_{i+1}^3, Γ_{i+2}^3 $(i+3\equiv i)$ gehen durch die nämlichen beiden Punkte $[2]_i$. Ferner schneiden sich die Geraden Γ_i^1 zu je zweien auf den Curven Γ_i^3, und ebenso kommen die 4 Schnittpunkte von je zwei Curven Γ_i^2 auf die drei Curven Γ_i^3 zu liegen. Die Curven Γ_i^3 aber gehen durch die nämlichen 7 Punkte.*

Es sind in dem Vorstehenden mit Absicht concrete Zahlenbeispiele gewählt worden; doch lassen sich viele der ausgesprochenen Sätze ohne Mühe bedeutend verallgemeinern. Auch die an die Spitze gestellte Betrachtung selbst ist noch erheblicher Erweiterungen fähig, wie sich sofort aus dem Umstande ergibt, dass sie nur auf dem Nöther'schen Fundamentalsatze beruht; da mir indessen meine sonstige Beschäftigung zur Zeit keine Veranlassung bietet, diese Verallgemeinerungen näher zu betrachten, so mag es bei dem Gesagten sein Bewenden haben.

Marburg, den 18. October 1889.

Ueber rationale Curven und Regelflächen.

Von

A. Brill in Tübingen*).

Durch algebraische Untersuchungen wurde ich zu einigen merkwürdigen Eigenschaften der rationalen ebenen und räumlichen Curven sowie der windschiefen Flächen vom Geschlecht Null geführt, über welche ich eine Mittheilung der hohen Classe vorzulegen mich beehre.

Wiewohl diese Untersuchungen, von algebraischem Standpunkt betrachtet, sich auf eine beliebige Anzahl von Formen erstrecken, so will ich doch der Anschaulichkeit wegen an die Theorie der *Raumcurven* anknüpfen.

Sind x, y, z Cartesische Coordinaten, und hat man vier rationale ganze Functionen n^{ten} Grades von einer Grösse λ:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$\varphi(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n,$$
$$\psi(\lambda) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n,$$
$$\chi(\lambda) = d_0\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n,$$

so stellen die Gleichungen:

$$x : y : z : 1 = f(\lambda) : \varphi(\lambda) : \psi(\lambda) : \chi(\lambda)$$

die Coordinaten einer „rationalen" Raumcurve dar, deren Punkte den Werthen des Parameters λ einzeln zugeordnet sind. Die Bedingung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

repräsentirt, wenn man sich für x, y, z die Werthe eingesetzt denkt, eine im Raum veränderliche Ebene, nämlich die dem Curvenpunkt mit dem Werthe λ zugehörige Schmiegungsebene.

Ebenso wie durch ihre Punktcoordinaten kann man eine Raumcurve auch durch die Coordinaten u, v, w ihrer Schmiegungsebenen darstellen, welche gleichfalls rationalen Functionen von λ proportional sind.

---

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der k. bayr. Academie d. W. München 1885.

Eine Raumcurve n. Ordnung C_n sei durch die ihren Punktcoordinaten proportionalen ganzen Functionen $f, \varphi, \ldots$ in der obigen Form gegeben, eine andere p^{ter} Classe C^p durch vier ihren Ebenencoordinaten proportionale ganze Functionen p. Ordnung $\alpha(\mu), \ldots \delta(\mu)$ eines Parameters μ:

$$u : v : w : 1 = \alpha(\mu) : \beta(\mu) : \gamma(\mu) : \delta(\mu),$$

wo:

$$\alpha(\mu) = p_0\mu^p + p_1\mu^{p-1} + \cdots + p_p;$$

$$\beta(\mu) = q_0\mu^p + q_1\mu^{p-1} + \cdots + q_p;$$

$$\gamma(\mu) = r_0\mu^p + r_1\mu^{p-1} + \cdots + r_p;$$

$$\delta(\mu) = s_0\mu^p + s_1\mu^{p-1} + \cdots + s_p.$$

Die Gleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

oder ausgeführt:

$$F(\lambda\mu) \equiv \alpha(\mu)f(\lambda) + \beta(\mu)\varphi(\lambda) + \gamma(\mu)\psi(\lambda) + \delta(\mu)\chi(\lambda) = 0,$$

drückt dann aus, dass der Punkt (λ) der Curve C_n auf der Ebene (μ) der Curve C^p gelegen ist. Und zwar ordnen sich jedem Punkte (λ) von C_n diejenigen p Punkte (μ) von C^p zu, welche den p von (λ) aus an C^p möglichen Schmiegungsebenen entsprechen, und umgekehrt gehören zu jeder Ebene (μ) n Punkte (λ). — Wenn nun aber für besonders beschaffene Functionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu) \ldots$ der Factor $\lambda - \mu$ aus der ganzen Function $F(\lambda\mu)$ *rational sich ausscheiden lässt*, so entspricht einem jeden Punkte (λ) der C_n eindeutig *eine* bestimmte Schmiegungsebene, also *einer* der p Punkte (μ), so dass in diesem Falle die beiden Curven C_n und C^p eindeutig auf einander bezogen sind.

Solche Functionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\ldots$ müssen die Gleichung:

$$F(\lambda\lambda) \equiv \alpha(\lambda)f(\lambda) + \beta(\lambda)\varphi(\lambda) + \gamma(\lambda)\psi(\lambda) + \delta(\lambda)\chi(\lambda) = 0$$

identisch erfüllen. Dieselbe lässt sich in die folgenden $n + p + 1$ linearen Gleichungen für die $4(p + 1)$ homogenen Coefficienten $p_0, p_1, \cdots q_0, \ldots$ zerfällen:

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = p_0a_0 + q_0b_0 + r_0c_0 + s_0d_0 \\ 0 = p_0a_1 + q_0b_1 + r_0c_1 + s_0d_1 + p_1a_0 + q_1b_0 + r_1c_0 + s_1d_0 \\ 0 = p_0a_2 + \cdots \qquad + p_1a_1 + \cdots \qquad + p_2a_0 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Coefficienten $p, q, \ldots$ sind hierdurch im Allgemeinen bestimmt, wenn:

$$n + p + 1 = 4(p + 1) - 1$$

ist, d. h. für:

$$p = \frac{n-2}{3}.$$

Wenn also die ganze Zahl $n-2$ durch 3 theilbar ist, so giebt es *zu einer rationalen Raumcurve n. Ordnung C_n im Allgemeinen eine bestimmte Raumcurve von der $p\left(=\frac{n-2}{3}\right)^{\text{ten}}$ Classe, welche jener sich eindeutig in der Weise zuordnet, dass jede ihrer Schmiegungsebenen durch den ihr entsprechenden Punkt der C_n geht.* Ist jedoch $n-1$, bezw. n durch 3 theilbar, so giebt es noch ein einfach, bezw. doppelt unendliches System von Raumcurven der $\frac{n-1}{3}\left(\text{bezw. } \frac{n}{3}\right)^{\text{ten}}$ Classe, die eben dasselbe leisten. Ausser diesen giebt es dann noch Systeme von (unzerfällbaren) Curven höherer Ordnung der bezeichneten Art. Denn ausser den gefundenen Functionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, ... niedrigster Ordnung existiren noch solche höherer Ordnung, welche die Gleichungen (1) befriedigen, jedoch eine grössere Anzahl von unbestimmten Coefficienten enthalten.

So giebt es zu einer rationalen Curve 5. Ordnung ausser dem Ebenenbüschel, welches die vierfach schneidende Sehne der Curve zur Axe hat, noch ein dreifach unendliches System von Kegeln zweiter Ordnung, deren Tangentialebenen ein rational zerfällbares Schnittpunktsystem mit der Curve besitzen; zu einer rationalen Curve 6. Ordnung giebt es ausser einem ebensolchen ∞^2-System von Kegeln noch ein ∞^5-System von rationalen Curven 3. Classe u. s. w.

Diese Classencurven lassen sich nun aber umgekehrt zu einer linearen Construction der Raumcurve C_n verwenden.

Im Falle erstlich, dass $\frac{n-2}{3}$ eine ganze Zahl ist, existirt ausser jener Curve niedrigster $\left(\frac{n-2}{3}\right)^{\text{ter}}$ Classe noch ein ∞^3-System von Curven $\frac{n+1}{3}^{\text{ter}}$ Classe, für welche die Functionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, ... die Gleichungen (1) erfüllen. Nimmt man zu der Curve $C^{\frac{n-2}{3}}$ irgend zwei dieses Systems, so schneiden sich entsprechende Ebenen dieser drei abwickelbaren Flächen in einem Punkte der Curve n. Ordnung.

Ueberhaupt wird eine Curve von der Ordnung $p+q+r$ durch den Punkt erzeugt, in welchem sich entsprechende Ebenen von drei rationalen abwickelbaren Flächen der p., q., r. Classe, die eindeutig auf einander bezogen sind, schneiden. In unserem Falle ist in der That:*)

$$n=\frac{n-2}{3}+2\cdot\frac{n+1}{3}.$$

*) Benutzt man statt der Curve $\frac{n-2}{3}^{\text{ter}}$ Classe eine dritte Curve der Schaar $\frac{n+1}{3}^{\text{ter}}$ Classe, so sondert sich eine Gerade aus dem erzeugten Gebilde in der Weise aus, dass für einen gewissen Werth des Parameters die drei entsprechenden Ebenen in dieser Geraden sich schneiden.

Den Fällen, wo $\frac{n-1}{3}$ und $\frac{n}{3}$ eine ganze Zahl ist, entsprechen in analoger Weise die Zerlegungen:

$$n = 2 \cdot \frac{n-1}{3} + \frac{n+2}{3},$$

$$n = 3 \cdot \frac{n}{3},$$

deren geometrische Bedeutung ersichtlich ist.

Die allgemeine rationale Raumcurve n. Ordnung lässt sich also durch den Schnitt entsprechender Ebenen von drei eindeutig auf einander bezogenen rationalen Curven niederer Classe K

$$\left(\text{wo } K = \frac{n}{3}; \text{ bezw. } \frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}; \text{ bezw. } \frac{n-1}{3}, \frac{n+2}{3} \text{ ist}\right)$$

erzeugen.

Die Raumcurve n. Ordnung ist nicht mehr die „allgemeine", sondern besitzt weniger als $4n$ wesentliche Constante, wenn an Stelle jener erzeugenden Curven solche von höherer, bezw. niederer Classe treten. Es geschieht dies in der Weise, dass die Determinanten derjenigen Matrices aus den Coefficienten der Formen $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, ..., aus denen die Coefficienten in den Gleichungen jener Curven sich zusammensetzen, verschwinden. So ist für $n = 6$, wo im Allgemeinen eine ∞^2 Schaar von Kegeln 2. Ordnung existirt, deren Tangentialebenen durch entsprechende Punkte der C_6 hindurchgehen, die Bedingung dafür, dass bereits ein Gebilde niederer Ordnung der angegebenen Art existirt, also die Bedingung für eine *fünffach schneidende Sehne der rationalen Raumcurve 6. Ordnung*, die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 \end{vmatrix} = 0, {}^{*)}$$

*) Die ähnlich gestaltete Bedingungsgleichung für das Auftreten eines dreifachen Punktes bei einer ebenen rationalen Curve 4. Ordnung findet man in dem Werke: „Ueber Apolarität und rationale Curven" von Franz Meyer (S. 184) aufgestellt, wo auch die Gesichtspunkte für die Bildung anderer derartiger Bedingungen in den Coefficienten der conjugirten Formen entwickelt sind.

Neuerdings hat Herr Franz Meyer in mehreren Abhandlungen (d. Ann. Bd. 29. 30. 31) anschliessend an die obige Fragestellung die Aufgabe in Angriff genommen, die Ausdrücke $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ für den Fall der ebenen Curven — auch in den Ausnahmefällen, in denen das Gleichungssystem (1) illusorisch wird — in *Combinanten*form darzustellen.

(Zusatz 1889).

und die Curve entsteht, wenn dieselbe erfüllt ist, aus dem Durchschnitt entsprechender Ebenen eines Ebenenbüschels, eines Kegels und einer Curve dritter Classe, indem von der Kegelschaar des allgemeinen Falles jenes Ebenenbüschel sich absondert.

Indem man die Classencurven, aus denen die gegebene Ordnungscurve entsteht, ihrerseits aus solchen niederer Ordnung erzeugt, u. s. w., kommt man schliesslich auf n Punktreihen, bezw. Ebenenbüschel, aus denen sich durch passende Lage und Anordnung der Construction jede rationale Raumcurve n. Ordnung herstellen lässt.

Eine Eigenschaft der Curve $(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung, die in der angegebenen Weise durch den Schnitt entsprechender Ebenen von Curven p, q, r^{ter} Classe entsteht, ist die, dass sie (wie unten bewiesen wird) die abwickelbare Fläche p. Classe C^p in denjenigen $p' + q + r$ Punkten (p' ist die Ordnung der C^p) berührt, in welchen eine gerade Erzeugende der Letzteren durch den ihr entsprechenden Punkt der C_{p+q+r} hindurchgeht.

Das oben aufgestellte algebraische Problem ergiebt, auf eine andere Variabelnzahl angewandt, einige neue Sätze für *ebene Curven* und *windschiefe Flächen.*

Wenn man in zwei Gleichungen vom p^{ten} und q^{ten} Grad:

$$0 = P + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \cdots + \lambda^p P_p \equiv \Pi,$$
$$0 = Q + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \cdots + \lambda^q Q_q \equiv K$$

die Coefficienten P, Q als lineare Functionen von zwei, bezw. drei, nicht homogenen Variabeln x, y (x, y, z) ansieht, so stellen dieselben zwei eindeutig auf einander bezogene ebene Classencurven (bezw. abwickelbare Flächen) dar, und der Schnittpunkt (die Schnittgerade) entsprechender Geraden (Ebenen) beschreibt eine ebene Curve (windschiefe Fläche) von der Ordnung $n = p + q$. Dies ist bekannt,*) ebenso wie, dass die erzeugte ebene Curve von der Curve p^{ter} Classe, wenn letztere von der Ordnung p' ist, in denjenigen $p' + q$ Punkten berührt wird, in denen entsprechende Punkte beider Curven zusammenfallen.

Dass aber umgekehrt zu jeder rationalen ebenen Curve, wenn n ungerade ist, im Allgemeinen immer eine Curve von der Classe $\frac{n-1}{2}$ (und, wenn n gerade ist, ein ∞^2-System von Curven $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Classe) existirt, mit deren Hilfe jene Construction möglich ist, ergiebt sich aus Betrachtungen, die den oben für Raumcurven angestellten fast wörtlich nachzubilden sind.

Der „allgemeine“ Fall, d. h. das Gebilde mit der grössten Constantenzahl, lässt sich aber auch durch eine Abzählung der durch die

*) Haase, Zur Theorie der ebenen Curven u. s. w. Math. Annalen, Band 2, Seite 547.

Construction eingeführten Constanten ermitteln, und ich gehe hierauf um so lieber mit einigen Worten ein, als hierbei die windschiefen Flächen mit umfasst werden.

Ist in den obigen Gleichungen:

$$\Pi = 0, \quad \mathsf{K} = 0$$

$q > p$, so kann man, nachdem durch eine lineare Transformation von λ vier Constante in den Ausdrücken P in Zahlenwerthe verwandelt worden sind, Π mit einer ganzen Function M vom $(q-p)^{\text{ten}}$ Grad multipliciren und zu K zufügen. Durch passende Wahl der Constanten in M lassen sich dann $q - p + 1$ Constante des Ausdrucks:

$$\mathsf{K} + \mathsf{M}\Pi,$$

der an die Stelle von K gesetzt werden kann, ohne dass sich das Resultat der Elimination von λ ändert, in Zahlenwerthe verwandeln. Alsdann befinden sich, je nachdem die P, Q zwei oder drei Variable enthalten, in der Resultante aus Π und K noch

$$\begin{aligned} A &= 3(p+1) + 3(q+1) - 4 - (q-p+1) \\ &= 4p + 2q + 1 \\ &= 2n + 2p + 1 \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} B &= 4(p+1) + 4(q+1) - 4 - (q-p+1) \\ &= 5p + 3q + 3 \\ &= 3n + 2p + 3 \end{aligned}$$

Constante, von denen sie eine homogene Function sein wird.

Hier ist, wegen $q > p$, für n gerade:*)

$$p \leqq \frac{n}{2},$$

und für n ungerade:

$$p \leqq \frac{n-1}{2}.$$

Der grösste Werth, den die Zahlen A und B annehmen können, entspricht im letzteren Falle dem Werth:

$$p = \frac{n-1}{2},$$

woraus sich ergiebt:

$$A = 3n; \quad B = 4n + 2,$$

---

*) Nur für den Fall, dass $p = q = \frac{n}{2}$ ist, gestaltet sich die obige Abzählung etwas anders, weil ebensowohl an die Stelle von Π wie an die von K eine lineare Combination von K und Π gesetzt werden kann, wodurch die Zahlen werden:

$$A = 3n; \quad B = 4n + 2.$$

die gleichen Werthe, wie sie dem Falle $p = q = \frac{n}{2}$ entsprechen (s. d. letzte Anmerkung unter dem Text).

Was zunächst A angeht, so ist der erhaltene Maximalwerth in der That gleich der Anzahl der in einer allgemeinen *rationalen ebenen Curve n. Ordnung* homogen enthaltenen Constanten. Nach dem Vorstehenden lässt sich dieselbe *durch den Schnitt entsprechender Tangenten von zwei rationalen eindeutig auf einander bezogenen Curven von den Classen* $\frac{n-1}{2}$ *und* $\frac{n+1}{2}$ (bezw. $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$) *linear construiren.* Wie im Falle der Raumcurven bedarf es specieller projectivischer Eigenschaften (des Verschwindens gewisser Combinanten von drei binären Formen), wenn die Construction aus niederen (und andererseits höheren) Classencurven erfolgen soll. So ordnet sich einer rationalen ebenen Curve 5. Ordnung im Allgemeinen ein bestimmter ihr eindeutig in der angegebenen Weise entsprechender Classenkegelschnitt zu, dessen Gleichung (in einer aus dem Vorhergehenden verständlichen Bezeichnung) lautet wie folgt:

$$0 = \begin{vmatrix} x\mu^2 & y\mu^2 & \mu^2 & x\mu & y\mu & \mu & x & y & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_1 & b_1 & c_1 & a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_2 & b_2 & c_2 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_3 & b_3 & c_3 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_4 & b_4 & c_4 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden der Determinanten der Matrix aus den letzten 7 Horizontal- und 6 Verticalreihen der obigen Determinante reducirt die obige Gleichung auf die eines Strahlbüschels. Dieses mit einer rationalen Curve vierter Ordnung combinirt, ermöglicht wieder die Construction der Curve 5. Ordnung, welche dann einen vierfachen Punkt im Scheitel des Büschels erhält.

Durch den oben angeführten um 1 verminderten Maximalwerth *der Zahl B, also die Zahl* $4n+1$, *ist andererseits die Anzahl der in einer allgemeinen rationalen windschiefen Fläche n. Ordnung enthaltenen wesentlichen Constanten* ausgedrückt. Denn offenbar kann jede solche Fläche durch Elimination aus zwei Gleichungen von der Form $\Pi = 0$, $\mathsf{K} = 0$ hergestellt werden — man beziehe z. B. nur zwei Kegel eindeutig auf einander, die von den durch irgend einen Raumpunkt und die Geraden der Fläche gelegten Ebenen umhüllt werden — und da nach Obigem die windschiefe Fläche mit der grössten Constantenzahl

dem Fall $p = \frac{n-1}{2}$, $q = \frac{n+1}{2}$, bezw. $p = q = \frac{n}{2}$ entspricht, so liefert die diesem Fall entsprechende Zahl B die Anzahl der homogen in der „allgemeinen" Regelfläche auftretenden Constanten. Zugleich hat man *eine Construction dieser Fläche* aus dem Schnitt entsprechender Ebenen zweier rationalen Raumcurven von der $\frac{n-1}{2}$ $\left(\text{bez. } \frac{n}{2}\right)$ und $\frac{n+1}{2}$ $\left(\text{bez. } \frac{n}{2}\right)^{\text{ten}}$ Classe,*) und es bedarf projectivischer Eigenthümlichkeiten, wenn die Construction aus solchen von niederer (und höherer) Ordnung möglich sein soll.

Auch hier sind wieder die erzeugenden Gebilde mit dem erzeugten durch Berührungseigenschaften verbunden:

Die Regelfläche (R), die aus einer Curve (Π) und einer Curve (K) durch den Schnitt entsprechender Ebenen entsteht, wird nicht nur von den Tangenten dieser Curven berührt, sondern ist den Letzteren eingeschrieben, in dem Sinne, dass die *Schmiegungsebenen der Curven Tangentialebenen der Fläche sind.*

Man führt den Nachweis dieser und der oben erwähnten entsprechenden Eigenschaften für die ebenen und Raumcurven durch Differentiation der Gleichungen $\Pi = 0$, $K = 0$, durch welche die beweglichen Schmiegungsebenen der Curven (Π) und (K) repräsentirt werden. Für einen dem Punkte λ benachbarten Punkt der windschiefen Fläche (R), deren Gleichung durch die Resultante $R = 0$ von Π und K dargestellt wird, hat man:

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}\,d\lambda = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial x}\,dx + \frac{\partial K}{\partial y}\,dy + \frac{\partial K}{\partial z}\,dz + \frac{\partial K}{\partial \lambda}\,d\lambda = 0, \end{cases}$$

während zugleich:

$$\frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = 0$$

ist. Eliminirt man $d\lambda$ aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man links einen Ausdruck, welcher nach Einsetzung des Werthes λ der differenzirten Resultante proportional sein muss:

$$(3)\quad \frac{\partial K}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\,dz\right\} - \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial K}{\partial x}\,dx + \frac{\partial K}{\partial y}\,dy + \frac{\partial K}{\partial z}\,dz\right\}$$
$$= \frac{1}{M}\left\{\frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right\},$$

*) Die Existenz dieser Raumcurven oder vielmehr der ihnen dualistisch entsprechenden Ordnungscurven auf der allgemeinen rationalen Regelfläche n. Ordnung war schon Clebsch bekannt, der auf sie durch die Abbildung der Fläche auf eine Ebene geführt worden war. Math. Ann. V, S. 1.

wo nun der Factor M durch eine Rechnung, die ich hier übergehe, gleich einer der $(p+q-2)$-reihigen Unterdeterminanten 2. Ordnung der Determinante R gefunden wird, nämlich:

$$M = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ P_0 & P_1 & P_2 & \cdots \\ 0 & P_0 & P_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots \\ 0 & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Man bemerkt in dieser eleganten Identität leicht den zusammenfassenden Ausdruck bekannter Sätze über die Resultante. Zugleich geht aus derselben, wie übrigens auch schon aus den Gleichungen (2), hervor, dass für einen Punkt x, y, z, für welchen zugleich:

$$\Pi = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0, \quad \mathsf{K} = 0 \tag{4}$$

ist, in welchem also die Tangente an die Curve (Π) die entsprechende Erzeugende der Fläche (R) trifft, die partiellen Differentialquotienten von R nach den Variabeln denen von Π proportional werden, d. h., dass an dieser Stelle die Schmiegungsebene von (Π) Tangentialebene der Fläche ist.

Man hätte den Satz auch aus seinem dualistischen Gegenbild, das eines Beweises nicht bedarf, erschliessen können.

Der entsprechende Satz für ebene Curven, dessen oben gedacht wurde, ist durch das Vorstehende mitbewiesen, wenn man allenthalben die Glieder unterdrückt, welche die Variable z enthalten. — Hinsichtlich der Raumcurven bedarf es einer geringen Modification, die darin besteht, dass die Gleichung $\mathsf{P} = 0$ einer dritten Schmiegungsebene einzuführen und zu differenziren ist. Aus den Gleichungen (2), (4) und den analogen in P ergiebt sich zugleich die behauptete Eigenschaft.

Bestimmung der grössten Untergruppen von endlichen Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg.

In den Vorbemerkungen zum vierten Theile meiner Untersuchungen über die Zusammensetzung der Transformationsgruppen habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die von mir dort angewandte Methode auch dazu benutzt werden kann, sämmtliche Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu bestimmen. Die Durchführung dieses Gedankens würde zwar einige Sorgfalt in der Behandlung verlangen, aber eigentliche Schwierigkeiten nicht bieten. Vielleicht ist aber die an der angeführten Stelle gegebene Andeutung zu kurz, als dass sich jeder Leser von ihrer Tragweite ein klares Bild machen könnte. Deshalb erscheint es nicht ganz unangemessen, nach der vorgeschlagenen Methode eine einfachere Aufgabe zu lösen. So soll denn im folgenden die Aufgabe erledigt werden, für alle endlichen Transformationsgruppen die grössten Untergruppen zu bestimmen, d. h. diejenigen Untergruppen, deren Gliederzahl möglichst gross ist.

Die nächste Veranlassung zur Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit ist etwas zufälliger Natur. Bereits vor längerer Zeit hat Herr Lie die grössten Untergruppen für die allgemeine projective Gruppe des n-dimensionalen Raumes bestimmt*), und in den letzten Tagen war Herr Hermann Werner so freundlich, mir eine Arbeit**) zuzuschicken, worin dieselbe Aufgabe für eine zweite Klasse von einfachen Gruppen gelöst ist. Während Herr Lie durch ganz einfache und natürliche Betrachtungen zum Ziele gelangt, kann Herr Werner die Lie'sche Methode nicht direct anwenden, sondern muss zunächst die vorgelegte Gruppe durch eine andere von gleicher Zusammensetzung

*) Math. Annalen Bd. 25; Theorie der Transformationsgruppen, erster Abschnitt S. 562—569.

**) Bestimmung der grössten Untergruppen derjenigen projectiven Gruppe, welche eine Gleichung zweiten Grades in n Variabeln invariant lässt. Math. Annalen Bd. 35, S, 113 ff.

ersetzen; in dieser tritt dann eine gewisse Untergruppe unmittelbar zu tage; nun wird gezeigt, dass diese Untergruppe im allgemeinen die meisten, in einer Untergruppe möglichen Parameter enthält und dann erst ist es möglich, das Resultat auf die zu grunde gelegte Gruppe zu übertragen. So sehr die dabei gefundenen Sätze das Interesse erregen und die Beweise Anerkennung verdienen, so wird man kaum das Beweisverfahren als ein natürliches ansehen können.

Nun hat aber auch Herr Lie schon längst darauf aufmerksam gemacht, dass die Bestimmung aller Untergruppen nur von der Zusammensetzung der Gruppe abhängt, dass also die Kenntniss der $c_{\iota\varkappa\varrho}$ genügt, um alle Untergruppen anzugeben. Es erscheint also die Aufgabe gerechtfertigt, die Untergruppen nur unter Benutzung der Coefficienten $c_{\iota\varkappa\varrho}$ zu ermitteln und von einer expliciten Darstellung der entsprechenden Gruppe ganz abzusehen. Dieser Ausgangspunkt gestattet es, für alle Gruppen die vorgelegte Frage unmittelbar und in sehr einfacher Weise zu lösen. Für die von Herrn Lie behandelte Klasse von Gruppen zeigt dessen Weg mit dem meinigen grosse Aehnlichkeit. Der Grund hierfür ist folgender: ich benutze die eingliedrigen Hauptuntergruppen derjenigen zweigliedrigen Untergruppen, denen eine gegebene allgemeine Transformation angehört; solche Haupttransformationen sind aber auch die p_ι, P_ι, auf deren Betrachtung Herr Lie seine Entwicklung vor allem stützt. Ueberhaupt ist die bekannte Darstellung der allgemeinen projectiven Gruppe so eng mit ihrer Zusammensetzung verbunden, dass man jedem Satze über ihre Untergruppen einen Satz über allgemeine Projectivität zur Seite setzen kann. Deshalb habe ich auch in der vorliegenden Arbeit diese specielle Darstellung wenigstens erwähnt; im übrigen aber habe ich mich begnügt, bloss die Zusammensetzung anzugeben, ohne eine specielle Darstellung zu bevorzugen.

Mit der vorgelegten Aufgabe hängt die folgende eng zusammen: Man soll die geringste Zahl von Typen von Untergruppen angeben, so dass jede beliebige Untergruppe der gegebenen Gruppe wiederum eine Untergruppe einer dieser Untergruppen ist. Diese Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn man alle Typen von Untergruppen kennt; denn dann würde man alle diejenigen Untergruppen weglassen, welche in einer Untergruppe von mehr Parametern vorkommen. Andererseits würde man aber auch die Frage nach den sämmtlichen Untergruppen als beantwortet ansehen müssen, wenn man allgemein die vorgelegte Aufgabe lösen könnte. Indem man nämlich die vorgelegte Aufgabe wiederum für die erhaltenen Untergruppen löst, gelangt man allmählich zu allen möglichen Untergruppen. Es möge jedoch genügen, auf diese Aufgabe hingewiesen zu haben; hier wollen wir uns nur mit der speciellen Aufgabe beschäftigen.

§ 1.

Dass jede Gruppe, welche nicht ihre eigene Hauptuntergruppe ist, mindestens eine Untergruppe besitzt, deren Gliederzahl nur um eins geringer ist, als die der gegebenen Gruppe, ist bekannt. In der That, es habe die gegebene r-gliedrige Gruppe eine p-gliedrige Hauptuntergruppe, und es sei $p < r$. Dann hat man nur den Fall zu betrachten, wo $p < r - 1$ ist. In diesem Falle füge man zu der Hauptuntergruppe noch $r - 1 - p$ beliebige von einander und von den Transformationen der Hauptuntergruppe unabhängige inf. Transformationen hinzu; dadurch wird eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe bestimmt, welche zudem invariant ist. Es fragt sich aber, ob es noch andere $(r-1)$-gliedrige Untergruppen giebt. Um diese Frage zu beantworten, sucht man die grössten Untergruppen der Hauptuntergruppe; wenn deren Gliederzahl $p - 1$ ist, so füge man zu ihnen $r - p$ weitere (nicht der Hauptuntergruppe angehörige, unabhängige) inf. Transformationen hinzu und lasse hierdurch eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe bestimmt sein. (Dieser Weg wird immer eingeschlagen werden können, wenn die Hauptuntergruppe vom Range null ist). Wenn aber die grössten Untergruppen der p-gliedrigen Hauptuntergruppe weniger als $p-1$ Parameter besitzen, so sind alle $(r-1)$-gliedrigen Untergruppen der gegebenen Gruppe zugleich invariant und werden durch die zuerst angegebene Operation geliefert.

§ 2.

Ehe wir unsere Aufgabe weiter verfolgen, schicken wir einen allgemeinen Satz über die Bildung von Untergruppen voraus. Wir beschränken uns aber auf Gruppen, für welche die nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung im allgemeinen ungleich sind. Wenn in einer solchen Gruppe Y_1 eine ganz allgemeine Transformation ist, so mögen mit ihr $(l-1)$ weitere Transformationen $Y_2 \dots Y_l$ vertauschbar sein. Suchen wir jetzt die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für Y_1, so sind deren nicht verschwindende Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_{r-l}$ sämmtlich von einander verschieden. Dann gehört zu jeder Wurzel eine einzige inf. Transformation, so dass für $\varkappa = 1 \cdots r - l$ jedesmal ist:

$$(Y_1 X_\varkappa) = \omega_\varkappa X_\varkappa$$

Wir suchen eine Untergruppe, der die Transformation Y_1 angehört. In dieser können gewisse inf. Transformationen enthalten sein, welche als lineare Functionen von $Y_1 \dots Y_l$ dargestellt werden können. Die grösste Zahl solcher sei abgetrennt und es seien zur Darstellung der Gruppe ausserdem noch m Parameter erforderlich. Löst man die in

der Untergruppe für Y_1 bestehende charakteristische Gleichung auf, so erhält man m nicht verschwindende Wurzeln, und diesen können diejenigen m inf. Transformationen zugeordnet werden, welche zur Bestimmung der Untergruppe noch nothwendig sind. Es sei ω_α' irgend eine so erhaltene Wurzel; dann erhält man bei passender Wahl von X_α' die Gleichung:

$$(Y_1 X_\alpha') = \omega_\alpha' X_\alpha'.$$

In der gegebenen Gruppe existiren aber nur $r - l$ derartige Gleichungen, und diese sind oben bereits angegeben. Folglich muss ω_α' gleich einer der oben angegebenen Grössen $\omega_1 \dots \omega_{r-l}$, und X_α' mit einer der Transformationen $X_1 \dots X_{r-l}$ identisch sein. Wäre aber ω_α' eine mehrfache Wurzel, so bestände eine Gleichung der Form

$$(Y_1 X_\alpha') = \omega_\alpha' X_{\alpha+1}' + X_\alpha'$$

oder

$$(Y_1, X_\alpha' + \eta X_{\alpha+1}') = \omega_\alpha'(X_\alpha' + \eta X_{\alpha+1}'),$$

was in der gegebenen Gruppe überhaupt nicht möglich ist. Die charakteristische Gleichung hat also auch für die Untergruppe m ungleiche nicht verschwindende Wurzeln, und diesen entsprechen dieselben inf. Transformationen, wie in der gegebenen Gruppe selbst. Dies giebt den Satz:

Wenn die nicht verschwindenden Wurzeln, welche die charakteristische Gleichung für eine gegebene Gruppe besitzt, im allgemeinen sämmtlich ungleich sind, so kann man jede beliebige Untergruppe, in der eine bestimmte inf. Transformation allgemeiner Art vorkommt, dadurch erhalten, dass man eine gewisse Anzahl mit ihr vertauschbarer Transformationen und ausserdem noch die Haupttransformationen für eine gewisse Anzahl von zweigliedrigen Untergruppen hinzunimmt, denen die gegebene Transformation angehört.

Dieser Satz kann zur Grundlage für die Aufstellung derjenigen Untergruppen genommen werden, in denen eine Transformation allgemeiner Natur vorkommt. Dass derselbe nicht unmittelbar auf gleiche Wurzeln übertragen werden kann, ist deshalb klar, weil alsdann durch die einzelne Wurzel die zugehörige Transformation nicht vollständig bestimmt ist. Man sieht aber leicht, wie in diesem Falle der Satz geändert werden muss. Vor allem können wir uns im allgemeinen Falle darauf beschränken, dass nicht alle Unterdeterminanten $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und dann treten nur ganz leichte Aenderungen ein.

§ 3.

Indem wir jetzt zu unserer Aufgabe zurückkehren, aber dieselbe auf solche Gruppen beschränken, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen*)

*) Es ist misslich, dass bei Benutzung dieses Ausdrucks die Gruppe als ihre eigene Untergruppe angesehen wird, während sie in der vorliegenden Arbeit stets

sind, machen wir die Voraussetzung, deren Berechtigung erst an einer späteren Stelle geprüft werden soll, dass die grösste Untergruppe auch jedesmal eine inf. Transformation allgemeiner Natur enthält. Auch unter dieser Voraussetzung lösen wir die Aufgabe zunächst für einfache Gruppen und haben die Klassen derselben im einzelnen durchzunehmen. Der Weg ist aber für alle Gruppen im wesentlichen derselbe. Wie im vorigen Paragraphen nehmen wir an, dass die allgemeine inf. Transformation Y_1 in der Untergruppe vorkommt. Die mit Y_1 vertauschbaren Transformationen seien wieder $Y_2 \dots Y_l$, und die Transformationen $X_1 \dots X_{r-l}$ seien durch die Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_{r-l}$ bestimmt. Kommen die beiden Transformationen X_ι und $X_\varkappa$ in der Untergruppe vor und ist $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ wiederum eine von null verschiedene Wurzel, etwa $= \omega_\lambda$, so muss auch X_λ in der Untergruppe enthalten sein. Wenn aber $\omega_\iota + \omega_\varkappa = 0$ ist, so wird mit X_ι und $X_\varkappa$ eine gewisse inf. Transformation vorkommen, welche sich als lineare Function von $Y_1 \dots Y_l$ darstellen lässt. Wollte man jetzt mit Y_1 alle $X_1 \dots X_{r-l}$ verbinden, so würde man auch zu allen $Y_2 \dots Y_l$ gelangen; man bekäme aber keine Untergruppe, sondern die gegebene Gruppe selbst. Bezeichnet man also eine Auswahl der $X_1 \dots X_{r-l}$, bei welcher eine möglichst grosse Zahl erhalten wird, mit $X_\alpha, X_\beta, \dots$, so kann man alle $Y_2 \dots Y_l$ hinzunehmen, ohne zu allen Transformationen der gegebenen r-gliedrigen Gruppe zu gelangen. Dadurch erhalten wir folgenden Satz, der allerdings zunächst nur für einfache Gruppen bewiesen ist, der aber auch, wie man leicht sieht, allgemein gilt:

Jede grösste Untergruppe für eine Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, enthält stets eine l-gliedrige Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind, wo l den Rang der gegebenen Gruppe bezeichnet.

Wir haben also jetzt nur noch zu untersuchen, wie wir die Auswahl unter den $X_1 \dots X_{r-l}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, unter den $\omega_1 \dots \omega_{r-l}$ zu treffen haben. Diese Auswahl wird dadurch geregelt, dass mit ω_α und ω_β jedesmal $\omega_\alpha + \omega_\beta$ mitgenommen werden muss, wenn diese Summe selbst eine Wurzel ist. Unser Problem ist hiernach auf das folgende zurückgeführt:

Aus den sämmtlichen nicht verschwindenden Wurzeln, welche die charakteristische Gleichung für eine einfache Gruppe unter Voraussetzung einer allgemeinen inf. Transformation besitzt, soll die grösste Anzahl ($< r - l$) so ausgewählt werden, dass jedesmal die Summe

---

von den Untergruppen ausgeschlossen ist. Indessen betrachtet man in der Zahlentheorie zuweilen die Zahl als ihren eigenen Theiler, und schliesst sie in andern Fällen von den Theilern aus.

zweier ausgewählter Wurzeln unter denselben vorkommt, wenn sie überhaupt gleich einer Wurzel ist.

§ 4.

Wir wenden die angegebene Methode zunächst auf die einfache Gruppe A) vom Range l an, nach deren Schema die allgemeine projective Gruppe des l-dimensionalen Raumes gebildet ist. Hier sind die Wurzeln

$$\text{(a)} \qquad \pm\,\omega_\varrho,\ \pm\,(\omega_\varrho - \omega_\sigma) \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma = 1 \ldots l.$$

Wir erkennen unmittelbar, dass folgende Auswahl den angegebenen Festsetzungen entspricht:

$$\text{(b)} \quad \pm\,\omega_\iota,\ \pm\,(\omega_\iota - \omega_\varkappa),\ \omega_l,\ \omega_l - \omega_\iota \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1 \ldots l-1.$$

In der That gehört die Summe zweier ausgewählter Wurzeln jedesmal wieder zu den ausgewählten, wenn sie überhaupt eine Wurzel ist. Auch erkennt man für die kleinsten Werthe von l, dass man eine grössere Zahl nicht auswählen kann, und dass jede Auswahl von l^2 Wurzeln entweder in der Form (b) oder durch $\pm\,\omega_\iota$, $\pm\,(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$, $-\,\omega_l$, $-\,\omega_l + \omega_\iota$ angegeben werden kann, wenn es gestattet ist, nachträglich die $\omega_1 \ldots \omega_l$ so zu wählen, dass alle Wurzeln nach der unter (a) gegebenen Weise dargestellt werden. Dieser Satz sei für die kleinsten Werthe von l als richtig erkannt und wir wollen ihn für das nächst grössere l beweisen.

Nehmen wir an, unter den aus (a) ausgewählten seien alle Wurzeln $\pm\,\omega_\iota$, $\pm\,(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots l-1$ enthalten. Fügt man dann $\omega_l - \omega_\alpha$ hinzu, so zeigt die Addition von ω_α, $\omega_\alpha - \omega_\beta$, dass auch ω_l, $\omega_l - \omega_\beta$ zu den ausgewählten gehören müssen. Ebenso sind dann mit $-\,\omega_l + \omega_\alpha$ auch $-\,\omega_l$, $-\,\omega_l + \omega_\beta$ nothwendig hinzuzunehmen. Man gelangt also von der gemachten Voraussetzung aus nothwendig zu einer der beiden angegebenen Darstellungen.

Jetzt sollen nicht alle Wurzeln $\pm\,\omega_\iota$, $\pm\,(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots l-1$ zu den ausgewählten gehören. Dann ist die Zahl der aus den letzteren ausgewählten höchstens gleich $(l-1)^2$ und diese können in der Form

$$\text{(c)} \quad \pm\,\omega_\alpha,\ \pm\,(\omega_\alpha - \omega_\beta),\ \omega_{l-1},\ \omega_{l-1} - \omega_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha, \beta = 1 \ldots l-2,$$

oder

$$\text{(d)} \qquad \pm\,\omega_\alpha.\ \pm\,(\omega_\alpha - \omega_\beta),\ -\,\omega_{l-1},\ \omega_\alpha - \omega_{l-1}$$

vorausgesetzt werden. Legen wir die Form (c) zu grunde, so setzen wir voraus, dass die Wurzeln $-\,\omega_{l-1}$, $\omega_\alpha - \omega_{l-1}$ nicht vorkommen. Wir untersuchen jetzt, wie viele von den Wurzeln $\pm\,\omega_l$, $\pm\,(\omega_l - \omega_\alpha)$, $\pm\,(\omega_l - \omega_{l-1})$ zu den Wurzeln (c) höchstens noch hinzugefügt werden können, ohne dass wir die ausgeschlossenen hinzunehmen müssen. Nun zieht die Beifügung einer Wurzel aus der Reihe

(e) $$\omega_l,\ \omega_l - \omega_1 \cdots \omega_l - \omega_{l-2}$$
die aller übrigen aus dieser Reihe nach sich; dasselbe gilt von der Reihe:

(f) $$-\omega_l,\ \omega_1 - \omega_l \cdots \omega_{l-2} - \omega_l,\ \omega_{l-1} - \omega_l.$$
Die Reihen (e) und (f) können zusammen beigefügt werden und ziehen dann keine weiteren Wurzeln nach sich. Dagegen verlangt die Hinzunahme von $\omega_l - \omega_{l-1}$ die Beifügung von (e), ist aber mit dem Hinzukommen der Reihe (f) unvereinbar, da alsdann die Wurzeln $-\omega_l$, $-\omega_\iota - \omega_l$ vorkommen würden. Wir kommen somit zur Verbindung der Reihen (c), (e), (f), welche bei Vertauschung der Marken l und $l-1$ mit (b) identisch ist.

Da sich dieselbe Betrachtung für (d) anstellen lässt, so erübrigt es nur noch, anzunehmen, von den Wurzeln $\pm\omega_\alpha$, $\pm(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$ für $\alpha, \beta = 1 \cdots l-1$ seien weniger als $(l-1)^2$, also höchstens $l^2 - 2l$ ausgewählt. Nun bestimmen die $2l$ Wurzeln $\pm\omega_l$, $\pm(\omega_l - \omega_\varkappa)$ durch blosse Addition alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Man darf also höchstens $2l - 1$ Wurzeln hinzunehmen und gelangt dann nicht zu l^2 Wurzeln.

Somit finden wir den bereits früher von Herrn Lie bewiesenen Satz, dass jede einfache Gruppe der Form A) vom Range l höchstens $l(l+1)$-gliedrige Untergruppen besitzt.

Wenn zur Bestimmung einer solchen Gruppe eine inf. Transformation allgemeiner Art gegeben ist, so hat die Aufgabe $2(l+1)$ verschiedene Lösungen. Jede ist charakterisirt durch Angabe der l fehlenden Wurzeln; diese sind von einander unabhängig und haben die Eigenschaft, dass alle andern Wurzeln, soweit sie ihnen nicht entgegengesetzt gleich sind, durch Subtraktion je zweier von ihnen ausgedrückt werden können. Wir wollen für die allgemeine projective Gruppe diejenigen beiden Lösungen mit einander vergleichen, wo die weggelassenen Wurzeln für die eine Lösung entgegengesetzt gleich sind den bei der andern Lösung weggelassenen Wurzeln. Zu dem Zwecke erinnere ich daran, dass eine ganz allgemeine Transformation $l+1$ Punkte in Ruhe lässt, welche keiner $(l-1)$-dimensionalen Ebene angehören, und dass die $l+1$ Ebenen in sich bewegt werden, welche je l dieser Punkte verbinden. Wenn nun z. B. diejenige Gruppe, bei welcher die Wurzeln $\omega_1, \ldots \omega_l$ fehlen, einen Eckpunkt dieses Körpers in Ruhe lässt, so muss diejenige Gruppe, bei der die Wurzeln
$$-\omega_1,\ -\omega_2 - \cdots - \omega_l$$
fehlen, diejenige Ebene in sich verschieben, der die übrigen l Eckpunkte angehören. Alle grössten Untergruppen der Gruppe A) zerfallen in zwei Scharen, von denen jede l-fach unendlich ist. Auch hier sind wir im wesentlichen wieder Sätzen begegnet, welche Herr Lie nebst einigen andern auf S. 569 seines Werkes angegeben hat.

§ 5.

Für eine Gruppe B) vom Range l stellen wir die nicht verschwindenden Wurzeln in der Form

$$\pm\,\omega_\varrho,\ \pm\,\omega_\varrho \pm \omega_\sigma \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma = 1 \ldots l$$

dar. Für $l = 2$ kann man auf zwei verschiedene Weisen fünf Wurzeln nach der getroffenen Festsetzung auswählen; als Typus der einen Art können wir setzen:

$$\omega_1,\ -\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1 + \omega_2,\ -\omega_1 + \omega_2;$$

und als Typus der zweiten Art:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1 + \omega_2,\ \omega_1 - \omega_2,\ -\omega_1 + \omega_2;$$

aber es ist nicht möglich, eine grössere Anzahl auszuwählen. Geht man zu $l = 3$ über, so sieht man leicht, dass man von der ersten für $l = 2$ getroffenen Auswahl aus zu einer ganz entsprechenden Wahl von 13 Wurzeln gelangen kann, dass dagegen die zweite Auswahl durch Hinzunahme einer Anzahl von Wurzeln

$$\pm\,\omega_3,\ \pm\,\omega_3 \pm \omega_1,\ \pm\,\omega_3 + \omega_2$$

entweder zu weniger als 13 oder zu allen Wurzeln führt. Wir zeigen, dass für jedes l höchstens $2(l-1)l + 1$ Wurzeln ausgewählt werden können und dass diese sich immer für $l > 2$ in der Form

$$\pm\,\omega_\iota,\ \pm\,\omega_\iota \pm \omega_\varkappa,\ \omega_l,\ \omega_l \pm \omega_\iota \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1 \cdots l-1$$

darstellen lassen. Dies übersieht man sofort unter der Voraussetzung, dass alle Wurzeln $\pm\,\omega_\iota$, $\pm\,\omega_\iota \pm \omega_\varkappa$ unter den ausgewählten vorkommen. Wenn das aber nicht der Fall ist, so können höchstens $2(l-2)(l-1) + 1$ solche Wurzeln vorkommen, bei denen sich nie die Marke l findet, und als solche lassen sich alsdann nehmen:

$$\pm\,\omega_\alpha,\ \pm\,\omega_\alpha \pm \omega_\beta,\ \omega_{l-1},\ \omega_{l-1} \pm \omega_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha, \beta = 1 \cdots l-2.$$

Die hinzutretenden Wurzeln müssen jetzt passend aus den folgenden gewählt werden:

$$\pm\,\omega_l,\ \pm\,\omega_l \pm \omega_{l-1},\ \pm\,\omega_l \pm \omega_\alpha.$$

Jetzt bedingen sich gegenseitig alle Wurzeln der Reihe:

$$\omega_l,\ \omega_l \pm \omega_\alpha,$$

während durch jede von diesen auch $\omega_l + \omega_{l-1}$ mitgefordert ist. Ebenso bedingen sich gegenseitig

$$-\,\omega_l,\ -\,\omega_l \pm \omega_\alpha,$$

und mit jeder von diesen ist $-\,\omega_l + \omega_{l+1}$ mitbedingt, während $\omega_l - \omega_{l-1}$ auch ω_l, und $-\,\omega_l - \omega_{l-1}$ auch $-\,\omega_l$ erfordert. Man gelangt also zur grössten Zahl von Wurzeln, wenn man hinzunimmt:

$$\pm\,\omega_l,\ \pm\,\omega_l \pm \omega_\alpha,\ \pm\,\omega_l + \omega_{l-1}.$$

Dies giebt nach Vertauschung der Marken l und $l-1$ die obige Auswahl. Sind aber unter denjenigen Wurzeln, bei denen nur die Marken $1 \cdots l-1$ vorkommen, noch weniger als $2(l-1)(l-2)+1$ gegeben, so beachte man, dass die Auswahl

$$\pm\omega_l, \ \pm\omega_l\pm\omega_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 1\cdots l-1$$

auf alle Wurzeln führt, und die Auswahl

$$\pm\omega_l, \ \pm\omega_l\pm\omega_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = 1\cdots l-2$$

im wesentlichen mit der soeben behandelten Annahme identisch ist, und dass bei einer kleineren Auswahl nicht die festgesetzte Anzahl von Wurzeln vorkommt.

Diese Erwägungen liefern folgende Sätze:

Jede Untergruppe einer einfachen Gruppe B) vom Range l hat höchstens $l(2l-1)+1$ Parameter. Nachdem eine allgemeine Transformation gegeben ist, die einer solchen Untergruppe angehören soll, giebt es für $l>2$ jedesmal $2l$ derartige Untergruppen, und alle diese kommen auf denselben Typus hinaus. Jede solche Untergruppe besitzt eine Hauptuntergruppe, welche einen Parameter weniger hat und welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist; die letztere ist aus einer einfachen Gruppe B) vom Range $l-1$ und einer $(2l-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppe zusammengesetzt, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Indem man die $Y_1 \ldots Y_{l-1}$ passend wählt, kann man in der grössten Untergruppe durch

$$Y_1\cdots Y_{l-1}, \ X_{\pm\varkappa}, \ X_{\pm\iota\pm\varkappa} \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1\cdots l-1$$

die einfache Gruppe bestimmt sein lassen; dann entsprechen den Nebenwurzeln null und $\pm\omega_\varkappa$ die Transformationen X_l, $X_{l\pm\varkappa}$. Hierdurch ist die Hauptuntergruppe der grössten Untergruppe bestimmt. Hierzu kann man in der letzteren noch Y_l hinzutreten lassen und dieses so wählen, dass $(Y_l X_l) = X_l$, $(Y_l Y_{l\pm\alpha}) = X_{l\pm\alpha}$ ist, und Y_l mit allen andern angegebenen inf. Transformationen vertauschbar ist.

Diese Sätze entsprechen den Resultaten des Herrn Werner für ein gerades n.

§ 6.

Nachdem der Beweis für zwei Klassen von einfachen Gruppen vollständig durchgeführt ist, werden wir uns bei den folgenden Klassen mit kurzen Andeutungen begnügen können, da das Wesen völlig ungeändert bleibt. Für die einfachen Gruppen der Klasse D) sind alle Wurzeln darstellbar in der Form $\pm\pi_\varrho\pm\pi_\sigma$ für ungleiche Marken der Reihe $1\ldots l$. Im Falle $l=3$ ist die vorliegende Gruppe identisch mit der Form A); die 15-gliedrige Gruppe besitzt also in diesem Falle eine 12-gliedrige Untergruppe. Dagegen enthält für ein grösseres l die

Untergruppe höchstens $(2l-1)(l-1)+1$ Parameter, und diese wird erhalten durch die Auswahl der Wurzeln

$$\pm \pi_\iota \pm \pi_\varkappa,\ \pi_l \pm \pi_\varkappa \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1 \cdots l-1.$$

Nur für $l = 4$ kann man zu derselben Zahl von Wurzeln noch durch eine zweite Auswahl gelangen, nämlich durch:

$$\pm(\pi_\varrho - \pi_\sigma),\ \pi_\varrho + \pi_\sigma \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma = 1 \cdots 4.$$

Wir betrachten die Zusammensetzung für ein beliebiges l und lassen der Untergruppe angehören die inf. Transformationen

(a) $$Y_1 \,.\,.\, Y_l,\ X_{\pm\iota\pm\varkappa},\ X_{l\pm\varkappa}.$$

Auch hier wird für die l inf. Transformationen $Y_1, Y_2 \ldots Y_l$ eine passende Auswahl vorausgesetzt. Diese kann so getroffen werden, dass durch $Y_1 \ldots Y_{l-1}$, $X_{\pm\iota\pm\varkappa}$, $X_{l\pm\varkappa}$ die Hauptuntergruppe der Gruppe (a) bestimmt wird. In dieser neuen Gruppe setzt sich aus

$$Y_1 \ldots Y_{l-1},\ X_{\pm\iota\pm\alpha}$$

eine einfache Gruppe D) vom Range $l-1$ zusammen, während die $X_{l\pm\varkappa}$ zu den Nebenwurzeln $\pm\pi_\varkappa$ gehören und eine invariante Untergruppe bestimmen. Endlich wird Y_l mit allen in (a) angegebenen inf. Transformationen vertauschbar sein mit Ausnahme von $X_{l\pm\varkappa}$, und es ist jedesmal

$$(Y_l X_{l\pm\varkappa}) = X_{l\pm\varkappa}.$$

Auch die Angaben dieses Paragraphen stehen in Uebereinstimmung mit den von Herrn Werner bewiesenen Sätzen; man hat dessen Zahl n ungerade gleich $2l-1$ vorauszusetzen.

§ 7.

Für die einfachen Gruppen von der Gestaltung C) lassen sich die Wurzeln in der Form voraussetzen:

$$\pm\omega_\varrho,\ \frac{\pm\omega_\varrho \pm \omega_\sigma}{2} \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma = 1 \ldots l.$$

Für $l = 2$ ist diese Gruppe identisch mit der Gruppe B) und demnach giebt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, fünf Wurzeln auszuwählen, wie in § 5 angegeben ist. Dagegen giebt es für jedes grössere l im wesentlichen nur eine einzige Möglichkeit, $2l(l-1)+1$ Wurzeln nach den getroffenen Festsetzungen auszuwählen; das sind nach passender Anordnung der Marken $1 \ldots l$ die Wurzeln

$$\pm\omega_\iota,\ \frac{\pm\omega_\iota \pm \omega_\varkappa}{2},\ \omega_l,\ \frac{\omega_l \pm \omega_\iota}{2} \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1 \cdots l-1.$$

Demnach können wir die zugehörige Untergruppe durch die $l(2l-1)+1$ inf. Transformationen bestimmen:

(a) $$Y_1 \ldots Y_l,\ X_{\pm\iota},\ X_{\frac{\pm\iota\pm\varkappa}{2}},\ X_l,\ X_{\frac{l\pm\iota}{2}}.$$

Hier erhält man nach passender Bestimmung von $Y_1 \ldots Y_l$ durch Weglassung von Y_l die Hauptuntergruppe der vorstehenden Gruppe, und in dieser aus $Y_1 \ldots Y_{l-1}$, $X_{\pm\varkappa}$, $X_{\frac{\pm\iota\pm\varkappa}{2}}$ eine einfache Gruppe C) vom Range $l-1$, während die X_l, $X_{\frac{l\pm\varkappa}{2}}$ eine invariante Untergruppe vom Range null ergeben, in welcher jede Combination $\left(X_{\frac{l+\varkappa}{2}}, X_{\frac{l-\varkappa}{2}}\right)$ auf X_l führt. Endlich ist Y_l mit allen unter (a) angegebenen inf. Transformationen vertauschbar bis auf X_l und $X_{\frac{l\pm\varkappa}{2}}$, und man kann setzen:

$$(Y_l X_l) = 2 X_l, \quad \left(Y_l X_{\frac{l\pm\varkappa}{2}}\right) = X_{\frac{l\pm\varkappa}{2}}.$$

§ 8.

Alle weiteren einfachen Gruppen haben, wie ich früher (s. Annalen Bd. 33, S. 44—48) gezeigt habe, speciellen Charakter. Die Bestimmung der grössten Untergruppen gelingt ganz leicht in der öfter durchgeführten Weise. Daher wird es nicht nöthig sein, die Resultate für alle verschiedenen Fälle anzugeben; es genüge, nur die vierzehngliedrige einfache Gruppe näher zu behandeln. In derselben kann man die zwölf Wurzeln auf folgende Weise schreiben:

$$\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm(\omega_1-\omega_2), \pm(\omega_1+\omega_2), \pm(2\omega_1-\omega_2), \pm(2\omega_2-\omega_1).$$

Von Untergruppen erwähne ich die durch Zusammenstellung zweier Kegelschnittsgruppen erhaltene sechsgliedrige Gruppe, entsprechend der Auswahl der Wurzeln $\pm\omega_1$, $\pm(\omega_1-2\omega_2)$. Ausserdem kommt als Untergruppe eine achtgliedrige einfache Gruppe A) vom Range zwei vor, wo als Wurzeln genommen werden können:

$$\pm(\omega_1+\omega_2), \pm(2\omega_1-\omega_2), \pm(\omega_1-2\omega_2).$$

Ausserdem giebt es neungliedrige Untergruppen, als deren Typen wir diejenigen annehmen können, welche den beiden Auswählungen von Wurzeln entsprechen:

$$\pm\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2, -\omega_1+\omega_2, -\omega_1+2\omega_2, -2\omega_1+\omega_2,$$

und

$$\pm(\omega_1+\omega_2), \omega_1, -\omega_2, \omega_1-\omega_2, 2\omega_1-\omega_2, \omega_1-2\omega_2.$$

Jede solche neungliedrige Gruppe ist in folgender Weise zusammengesetzt: sie enthält eine achtgliedrige Hauptuntergruppe vom Range eins mit einer ausgezeichneten Transformation; wenn man dann ± 2 als Hauptwurzeln nimmt, so sind die Nebenwurzeln ± 1, ± 3, 0; die Ausdrücke für $(X_{\pm 2} X_{\pm 1})$ und $(X_{\pm 2} X_{\pm 3})$ ergeben sich aus § 7 (Bd. 31, S. 278), während $(X_1 X_{-1})$ und $(X_3 X_{-3})$ jedesmal auf die ausgezeichnete Transformation X_0 führt, und $(X_{\pm 1} X_{\pm 3})$ jedesmal $= 0$ ist.

§ 9.

Von den zusammengesetzten Gruppen behandeln wir zunächst diejenigen, welche nicht zerfallen und dementsprechend nach meinen Untersuchungen über die Zusammensetzung (§ 24; Bd. 34, S. 98—108) aus einer einfachen Gruppe und einer invarianten Untergruppe vom Range null zusammengesetzt sind. Wenn hierbei alle nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung ungleich sind, so ist in § 2 der vorliegenden Arbeit bewiesen, dass mit Ausnahme solcher Transformationen, welche mit der gegebenen eingliedrigen Untergruppe vertauschbar sind, zur Bestimmung einer jeden Untergruppe, der die gegebene eingliedrige Untergruppe allgemeiner Art angehört, eine Reihe derjenigen inf. Transformationen zu grunde gelegt werden können, welche zu den nicht verschwindenden Wurzeln gehören und demnach bei der gewählten Darstellung der gegebenen Gruppe benutzt worden sind. Dasselbe gilt auch für mehrfache Wurzeln, wenn, wie bei den hier in betracht kommenden Gruppen, alle gleichen Wurzeln zu demselben Elementartheiler der charakteristischen Determinante gehören und demnach für gleiche Wurzeln jedesmal ein einziges System von Gleichungen besteht:

$$(YX_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha, \quad (YX'_\alpha) = \omega_\alpha X'_\alpha + a X_\alpha,$$
$$(YX''_\alpha) = \omega_\alpha X''_\alpha + b X'_\alpha + c X_\alpha \cdots,$$

Dann kann ω_α auch für die Untergruppe eine mehrfache Wurzel sein, und es ergeben sich die Gleichungen:

$$(Y\overline{X}_\alpha) = \omega_\alpha \overline{X}_\alpha, \quad (Y\overline{X}'_\alpha) = \omega_\alpha \overline{X}'_\alpha + a' \overline{X}_\alpha,$$
$$(Y\overline{X}''_\alpha) = \omega_\alpha \overline{X}''_\alpha + b' \overline{X}'_\alpha + c' \overline{X}_\alpha \cdots.$$

Dann folgt unmittelbar:

$$\overline{X}_\alpha = k X_\alpha, \quad \overline{X}'_\alpha = k' X'_\alpha + m X_\alpha, \quad \overline{X}''_\alpha = k'' X''_\alpha + m' X'_\alpha + n X_\alpha \cdots.$$

Demnach müssen auch X_α, X'_α, $X''_\alpha \ldots$ in der Untergruppe vorkommen, und die Zahl der so auszuwählenden entspricht genau dem Grade, bis zu welchem ω_α für die Untergruppe mehrfache Wurzel ist.

Nun haben wir an der angegebenen Stelle (Bd. 34, S. 101) gesehen, dass wir auch in diesem Falle die Wurzeln als Haupt- und Nebenwurzeln unterscheiden und hiernach eine besonders einfache Zuordnung der inf. Transformationen bewerkstelligen können. Wenn in einer Untergruppe nicht alle Hauptwurzeln vorkommen, so ist die Auswahl der unter ihnen beizubehaltenden ganz unabhängig davon, ob man alle Nebenwurzeln mit hinzunimmt oder auch unter ihnen eine beliebige Auswahl trifft; denn man kann nur durch Combination zweier zu Hauptwurzeln gehörigen Transformationen wieder zu einer solchen

Transformation gelangen, da die Nebenwurzeln eben eine *invariante* Untergruppe bestimmen. Die vorangehenden Paragraphen haben uns aber gezeigt, welches die grösste Zahl von Hauptwurzeln ist, die in jedem einzelnen Falle beibehalten werden können, und wie die Auswahl jedesmal getroffen werden muss. Nehmen wir jetzt an, es seien einige Nebenwurzeln ausgelassen, dagegen alle Hauptwurzeln beibehalten, so erinnern wir uns, dass nach § 25 (Bd. 34, S. 108—116) alle Nebenwurzeln in Reihen solcher Wurzeln zerfallen, welche sich gegenseitig bedingen. Wenn nämlich eine Nebenwurzel, (die bekanntlich immer ganz besondern Bedingungen genügen muss,) angenommen ist, so sind jedesmal weitere Nebenwurzeln hiermit nothwendig verbunden; von den letzteren untersuchen wir, ob auch jede unter ihnen die zuerst gegebene nach sich zieht. So gelangt man dazu, alle Wurzeln in Reihen von solchen einzutheilen, welche sich gegenseitig bedingen. Die Zahl der in einer solchen Reihe enthaltenen ist an der betreffenden Stelle angegeben. Dieselbe ist an erster Stelle abhängig von der zugehörigen einfachen Gruppe, also von den Hauptwurzeln, und jedesmal grösser als die geringste Zahl von Wurzeln, welche aus den Hauptwurzeln ausgelassen werden können. Will man also die grösste Untergruppe bilden, so darf man nicht alle Hauptwurzeln beibehalten, weil man mit Weglassung einer einzigen Nebenwurzel stets die sich mit ihr gegenseitig bedingenden Nebenwurzeln auslassen muss und deren Zahl grösser ist als die Zahl der Hauptwurzeln, welche weggelassen werden können. Nachdem aber einmal Hauptwurzeln weggelassen sind, ist es gestattet, alle Nebenwurzeln beizubehalten. Zu der grössten Untergruppe gelangt man also, indem man nur solche inf. Transformationen weglässt, welche zu gewissen Hauptwurzeln gehören. Daher ergiebt sich folgender Satz:

Wenn eine nicht zerfallende Gruppe gegeben ist, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so kann man zur Bestimmung der grössten Untergruppen folgenden Weg einschlagen: man setze die gegebene Gruppe zusammen aus einer einfachen G_ι *und einer invarianten Untergruppe* G_i *vom Range null. Von* G_ι *suche man nach den früheren Regeln eine jede der grössten Untergruppe* G_g*; dann liefert deren Verbindung mit der invarianten Untergruppe* G_i *eine Untergruppe der gegebenen Gruppe, und diese hat die grösste Zahl von Parametern.*

§ 10.

Auch zur Bestimmung der grössten Untergruppen von zerfallenden Gruppen nehmen wir wieder an, dass jede solche Untergruppe eine Transformation ganz allgemeiner Natur enthält. Dann suchen wir für diese die zweigliedrigen Untergruppen, und gelangen, indem wir jedesmal gewisse, mit der gegebenen Transformation vertauschbare hinzunehmen, zu den einzelnen Theilgruppen. Jede Theilgruppe ist dann

betreffs ihrer grössten Untergruppen gesondert zu betrachten, und wir wissen, dass für jede eine kleinste Zahl von wegzulassenden Transformationen existirt. Nachdem aber aus einer Theilgruppe eine Untergruppe gebildet ist, können wir damit alle andern Gruppen zusammenstellen und erhalten eine Untergruppe. Demnach erhalten wir folgende Regel zur Bestimmung der grössten Untergruppen von zerfallenden Gruppen: Man suche für jede Theilgruppe die grösste Untergruppe; dadurch werde in jedem einzelnen Falle die Gliederzahl um $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ erniedrigt. Nun denke man sich die Anordnung so getroffen, dass $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots$ ist. Dann wird jedenfalls eine grösste Untergruppe dadurch erhalten, dass man mit der grössten Untergruppe der ersten Theilgruppe alle andern Theilgruppen zusammenstellt; wenn aber noch $\lambda_1 = \lambda_2$ ist, so erhält man noch eine zweite Art u. s. w.

Indem wir die Resultate der früheren Paragraphen mit den in diesem § gegebenen Vorschriften zusammennehmen, erhalten wir folgenden Satz:

Jede r-gliedrige Gruppe vom Range eins enthält $(r-1)$*-gliedrige Untergruppen; aber auch, wenn eine r-gliedrige Gruppe zerfällt und mindestens eine der erhaltenen Theilgruppen vom Range eins ist, enthält die gegebene Gruppe stets* $(r-1)$*-gliedrige Untergruppen.*

§ 11.

Die durchgeführten Untersuchungen stützen sich auf die Voraussetzung, dass in jeder grössten Untergruppe eine ganz allgemeine Transformation enthalten ist. Es erübrigt also noch, die Richtigkeit dieses Satzes zu erweisen. Das gelingt am einfachsten, wenn man von der gefundenen Gliederzahl ausgeht und zeigt, dass Untergruppen von gleicher Gliederzahl auf die angegebenen hinauskommen und solche von grösserer Gliederzahl nicht möglich sind. Um diesen Satz zu beweisen, bedarf es aber nur solcher Betrachtungen, welche Herr Lie bereits vollständig durchgeführt hat. In der That ersetze man für nicht zerfallende Gruppen je nach der einfachen Gruppe, aus welcher die vorgelegte Gruppe gebildet ist, die auf S. 563 ff. seines Werkes benutzten inf. Transformationen p_ι durch

$$X_\iota,\ X_{\iota-\varkappa}, \quad \text{oder} \quad X_\iota,\ X_{\iota\pm\varkappa}, \quad \text{oder} \quad X_\iota,\ X_{\frac{\iota\pm\varkappa}{2}}$$

und zugleich die P_ι durch

$$X_{-\iota},\ X_{-\iota+\varkappa} \quad \text{oder} \quad X_{-\iota},\ X_{-\iota\pm\varkappa} \quad \text{oder} \quad X_{-\iota},\ X_{-\frac{\iota\pm\varkappa}{2}},$$

und man wird dessen Entwicklungen nicht im geringsten zu ändern brauchen. Ganz ähnlich wird man bei zerfallenden Gruppen verfahren. Man erhält dadurch einen Beweis, dessen Ausführung nicht nöthig sein wird. Somit folgt:

Wenn eine Gruppe ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so ist in jeder ihrer grössten Untergruppen eine Transformation von ganz allgemeinem Charakter enthalten.

Wenn umgekehrt einer grössten Untergruppe eine bestimmte ganz allgemeine Transformation angehört, so können wir ihr dieselbe Rolle zuertheilen, wie der Y_1 in der durchgeführten Herleitung. Dann muss die Anzahl derjenigen zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente, welche der grössten Untergruppe angehören und die gegebene Transformation enthalten, dieselbe sein, wie entsprechend bei Y_1. Folglich müssen auch alle mit der gegebenen Transformation vertauschbaren Transformationen der grössten Untergruppe angehören, oder:

Enthält eine grösste Untergruppe einer gegebenen Gruppe eine Transformation von allgemeinem Charakter, so enthält sie auch alle jene in der Gruppe enthaltenen Transformationen, die mit ihr vertauschbar sind.

Wenn zwei grösste Untergruppen derselben Gruppe eine allgemeine Transformation gemeinschaftlich haben, so haben sie auch alle mit ihr vertauschbaren und der Gruppe angehörigen Transformationen gemeinschaftlich.

Da der im vorstehenden angedeutete Beweis nur solche Erwägungen erfordert, welche Herr Lie bereits vollständig durchgeführt hat, so mögen zwei andere Beweise nur kurz skizzirt werden.

Wenn die gegebene Gruppe durch die inf. Transformationen $X_1 \dots X_r$ bestimmt ist, so stellt man diejenige Gleichung auf, welche zwischen $\eta_1 \dots \eta_r$ bestehen muss, damit die Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota$ einer gewissen Bedingung genügt; darauf sucht man die geringste Zahl von linearen Beziehungen zwischen den $\eta_1 \dots \eta_r$, bei deren Bestehen die genannte Gleichung identisch befriedigt wird. Mit andern Worten: Man betrachte mit Herrn Lie $\eta_1 \dots \eta_r$ als homogene Coordinaten eines $(r-1)$-dimensionalen Raumes, bestimme hierin dasjenige Gebilde, dessen Punkte einer gegebenen Bedingung genügen; auf diesem Gebilde suche man die ebenen Mannigfaltigkeiten von möglichst viel Dimensionen. Dann ergiebt sich, dass die Zahl der Dimensionen nicht so gross ist, wie die gefundene Zahl der Parameter erfordert. Vorarbeiten zur Lösung dieser Aufgabe, die nach verschiedenen Richtungen nicht unwichtig ist, findet man in diesen Annalen Bd. 31, S. 271—276.

Auch folgende Erwägung kann hier angestellt werden. Soll die charakteristische Gleichung für alle Transformationen einer Untergruppe nur verschwindende Wurzeln besitzen, so muss deren Gliederzahl für eine r-gliedrige einfache Gruppe $< \frac{r}{2}$ sein. Daher kommen solche Untergruppen hier nicht in betracht. Wir können also mindestens

eine inf. Transformation unter der Form: $\alpha_1 Y_1 + \cdots + \alpha_l Y_l$ voraussetzen, wo Y_1 eine ganz allgemeine inf. Transformation ist und $Y_2 \ldots Y_l$ damit vertauschbar sind. Dann kommen wir auf gewisse, der Untergruppe zuzuweisende Transformationen $\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots$, die wir entsprechend den frühern Festsetzungen bestimmen; aber deren gegenseitige Combination führt für eine irgend beträchtliche Gliederzahl dazu, nur Transformationen X_ι voraussetzen zu müssen. Dann gelangen wir aber wieder zu den früher gewonnenen Resultaten.

Braunsberg, Ende October 1889.

A simple Proof of the Existence of Irreducible Invariants of Degrees 20 and 30 for the Binary Seventhic.

By

JAMES HAMMOND at Oxford.

"Made whole with very easy arguments".
(King John, act 1, sc. 1).

The present paper contains an a priori solution of the question, whether it is possible or not for the Binary Seventhic to have an irreducible invariant whose degree is any multiple of 10. As an immediate consequence of the existence of such invariants, the representative form of the Generating Function for the covariants of the Seventhic can be expressed in many ways as a fraction with a finite numerator. The simplest expression for this Function is given at the end of the paper.

The degree of any invariant of the Seventhic must (as is well known) be an even number, which cannot be 2, 6, or 10.

Let $2m$ be the degree (and $7m$ the weight) of an invariant which does not vanish when the Seventhic has the special form

$$(a,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ f,\ 0,\ 0)\ (x,\ y)^7.$$

Since this invariant (if it exists) must contain a term $a^{\lambda} f^{\mu}$, we have

$$\lambda + \mu = 2m \quad \text{and} \quad 5\mu = 7m,$$

which can only be satisfied by writing

$$m = 5n, \quad \lambda = 3n, \quad \mu = 7n.$$

Hence the only invariants which do not vanish are of degree $10n$ and contain a term $a^{3n} f^{7n}$.

But, since no invariant of degree 10 exists, $n > 1$, so that the only invariants which do not vanish (if any such exist) are of the degrees

$$20, \quad 30, \quad 40, \quad 50, \ \dots$$

and contain the terms $a^6 f^{14}, \quad a^9 f^{21}, \quad a^{12} f^{28}, \quad a^{15} f^{35}, \dots$

Let us call them $I_{20}, \quad I_{30}, \quad I_{40}, \quad I_{50}, \ \dots$

then, since it is obvious that every *reducible* invariant, whose degree is either 20 or 30, vanishes for the special form assigned to the Seventhic*), it is only necessary, in order to completely establish the irreducibility of I_{20} and I_{30} to prove that neither of them vanishes when the Seventhic has this special form.

This is effected by identifying I_{20} and I_{30} with two of the invariants (of degrees 10 and 15, respectively, in its coefficients) of the well known sextic covariant whose leading term is

$$(ae - 4bd + 3c^2)\, x^6.$$

The complete value of this covariant is

$$\begin{aligned}&(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)\,(ex^3 + 3fx^2y + 3gxy^2 + hy^3)\\ -\,&4(bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3)\,(dx^3 + 3ex^2y + 3fxy^2 + gy^3)\\ +\,&3(cx^3 + 3dx^2y + 3exy^2 + fy^3)^2,\end{aligned}$$

which, for the special Seventhic under consideration, reduces to

$$3\,(afx^5y + f^2y^6).$$

All the roots of this special sextic are unequal, and therefore its discriminant (which is of degree 10 in its coefficients) does not vanish. This discriminant then is the irreducible I_{20} we have been in search of; and a direct calculation of its value will show that it reduces to a definite numerical multiple of a^6f^{14}.

It can also be shown in many ways that the invariant of degree 15 in the coefficients of the above sextic covariant does not vanish for the special form in which

$$b = c = d = e = g = h = 0.$$

Perhaps the easiest way is to take the invariantive syzygy for the sextic, which von Gall (Math. Ann. Bd. XXXV, S. 80) writes as follows

$$2R^2 - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & D \\ A_{lm} & D & A_{mn} \\ D & A_{mn} & A_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

All the A's vanish for our special form, but D becomes a definite numerical multiple of the discriminant I_{20} which does not vanish. Consequently R (the 15$^{\text{thic}}$ invariant in question) does not vanish, and may therefore be identified either with our irreducible I_{30} or, if we

---

*) This argument does not apply to the degrees 40, 50, or any higher multiple of 10; for, among the invariants of degrees 40 and 50, we have the *reducible* invariants I_{20}^2 and $I_{20}I_{30}$, which *do not vanish;* and so for all higher multiples of 10.

please, with a numerical multiple of I_{30} so chosen that v. Gall's syzygy reduces to $I_{30}^2 = I_{20}^3$ for the special form under consideration*).

The method we have employed only shows that the Binary Seventhic has *at least* one irreducible invariant of degree 20, and *at least* one of degree 30, but gives no further information as to the actual number of such invariants**). What we have proved is, notwithstanding, sufficient to enable us to express the representative Generating Function in many ways as a fraction with a finite numerator, though it will not help us to see the exact number of ways in which this is possible.

We shall now show how the simplest *representative* form of the Generating Function may be obtained.

When expressed in its simplest form the Generating Function for the covariants of the Binary Seventhic is an ordinary algebraic fraction whose denominator is

$$(1-a^4)\,(1-a^6)\,(1-a^8)\,(1-a^{10})\,(1-a^{12})\,(1-ax)\,(1-ax^3)$$
$$(1-ax^5)\,(1-ax^7),$$

*) I take this opportunity of congratulating v. Gall on the extreme elegance of the forms which he has given to his Sextic Syzygies, and of expressing the hope that he will calculate afresh the omitted Syzygies of the 9th and lower degrees, so as to have the complete set in their simplest form and in a uniform notation. The results in the numerical table at the end of his paper are in exact accordance with those obtained by me shortly after publishing the paper (in the American Journal of Mathematics, Vol. VII) to which he refers for the syzygies in question. But though all the syzygies were in my possession, they were so inelegantly expressed that I refrained from publishing them, hoping at some time or other to find leisure to put them into a better shape. I have never done so; and the syzygies, entered in my note-book rather more than 4 years ago, still remain there "with all their imperfections on their head".

As an example, contrast v. Gall's expression for the invariantive syzygy, given in the text, with the following expression for the same syzygy copied from my note book

$$Z^2 + \alpha W + \beta(4B^2I^2 + 8BIP + 48I^3 + 3P^2)$$
$$+ 2\gamma(2B^3I^2 - 8BI^3 - BP^2 + 6IW) = 0,$$

where

$$\alpha = 4W^2 - B^2PW - 3BP^3 + 4I(B^3IP + 176B^2I^3 + 204BI^2P - 36BIW$$
$$+ 576I^4 + 36IP^2 - 18PW),$$
$$\beta = BW(3P + 4BI) + P(3P + 4BI)^2 + 4(B^2I + BP + 12I^2)$$
$$\cdot(3IP + 4BI^2 - W),$$
$$\gamma = (BP + 48I^2)(B^2I + BP + 12I^2) + 4I(3P + 4BI)^2 - W(3P + 4BI),$$

and B, I, P, W, Z are used to denote the same invariants (of degrees 2, 4, 6, 10, 15, respectively) as in Cayley's "Tables for the Binary Sextic" (American Journal, Vol. IV, pp. 379—384).

**) It has however been proved by v. Gall (Math. Ann. Bd. XXXI, 1887) that there are *two* irreducible invariants of degree 20 and one of degree 30. See his „Formensystem der binären Form 7ter Ordnung.

and whose numerator is a *finite* series of terms of the form $\pm N a^\lambda x^\mu$, where N, λ, μ are positive integers*).

Here each of the factors $(1-a^4)$, $(1-a^8)$, $(1-a^{12})$, $(1-ax^7)$ represents an irreducible invariant or covariant (viz. $1-ax^7$ represents the Seventhic, and $1-a^4$, $1-a^8$, $1-a^{12}$ represent irreducible invariants of the degrees 4, 8, 12), but the remaining factors $(1-a^6)$, $(1-a^{10})$, $(1-ax)$, $(1-ax^3)$, $(1-ax^5)$ do not correspond to any invariants or covariants; for the Seventhic has no invariant whose degree is either 6 or 10, and no covariant of any of the degree-orders (1.1), (1.3), or (1.5).

Now any representative form of the Generating Function may be obtained by transforming it into an equivalent fraction in which *every* factor of the denominator corresponds to an irreducible invariant or covariant. This may be done in many ways; for example, since the Seventhic has irreducible covariants whose degree-orders are $(2,2)$, (3.3), (4.4), (5.5), (6.6), (7.7) we may multiply both numerator and denominator by $1+ax+a^2x^2+\cdots+a^{\varkappa-1}x^{\varkappa-1}$, and thus replace the factor $1-ax$, which occurs in the denominator, by the representative factor $1-a^\varkappa x^\varkappa$, where $\varkappa$ has any of the values 2, 3, 4, 5, 6, 7: and in like manner the factor $1-a^{10}$ may be replaced by $1-a^{20}$ or by $1-a^{30}$, for either of these will correspond to an irreducible invariant.

Professor Sylvester's representative form is found by multiplying both the numerator and denominator of the above fraction (his "reduced form") by

$$(1+a^6)(1+a^{10}+a^{20}+a^{30}+\cdots \text{ad. inf.})(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5),$$

so that the denominator becomes

$$(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})^2(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)(1-a^2x^{10})(1-ax^7),$$

and the numerator is a finite function of a, x multiplied by the infinite series $1+a^{10}+a^{20}+a^{30}+\cdots$.

But for the existence of an irreducible invariant whose degree is a multiple of 10, this would be the simplest possible expression for the representative form of the Generating Function: as it is, the existence of irreducible invariants of degrees 20 and 30 enables us to find two simpler expressions for it, in each of which the numerator is finite. We have, in fact, only to multiply both numerator and denominator of Sylvester's representative form either by $1-a^{20}$ or by

*) For its actual value see either of the following papers in the American Journal: Cayley, "Calculation of the Minimum N. G. J. of the Binary Seventhic". (Vol. II, pp. 71—84). — Sylvester, assisted by F. Franklin: "Tables of the Generating Functions and Groundforms for the Binary Quantics of the first Ten Orders". (Vol. II, pp. 223—251).

$1 - a^{30}$, and then the infinite series which occurs as a factor of the numerator is replaced either by $1 + a^{10}$ or by $1 + a^{10} + a^{20}$.

Multiplying then by $1 - a^{20}$ we obtain the simplest possible expression for the representative generating function, which is a fraction with the denominator

$$(1 - a^4)(1 - a^8)(1 - a^{12})^2(1 - a^{20})(1 - a^2x^2)(1 - a^2x^6)$$
$$(1 - a^2x^{10})(1 - ax^7),$$

its numerator being

$$\begin{aligned}
1 &+ a^3(x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{15}) \\
&+ a^4(2x^4 + x^6 + 2x^8 + x^{10} + x^{14}) \\
&+ a^5(x + 2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + 2x^9 - x^{17} - x^{21}) \\
&+ a^6(3x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 3x^8 + 2x^{12} - x^{14} - x^{16}) \\
&+ a^7(3x + 2x^3 + 4x^5 + 4x^7 + x^{11} - 2x^{15} - x^{19} + x^{23}) \\
&+ a^8(2 + 3x^2 + 4x^4 + 6x^6 + x^8 + 3x^{10} - x^{12} - 2x^{14} - x^{18}) \\
&+ a^9(3x + 5x^3 + 7x^5 + x^7 + 4x^9 + 2x^{13} - x^{15} - 2x^{17} + x^{21}) \\
&+ a^{10}(5x^2 + 8x^4 + 6x^6 + 4x^8 + x^{10} - 4x^{12} - 3x^{16} - x^{18}) \\
&+ a^{11}(5x + 8x^3 + 8x^5 + 8x^7 + 4x^9 - 4x^{11} - x^{13} - 5x^{15} - x^{17}) \\
&+ a^{12}(4 + 9x^2 + 9x^4 + 12x^6 + 4x^8 - x^{10} - 3x^{12} - 5x^{14} - 6x^{16} \\
&\qquad - x^{20} + x^{22}) \\
&+ a^{13}(9x + 9x^3 + 12x^5 + 6x^7 - x^9 - 3x^{11} - 8x^{13} - 9x^{15} - 3x^{17} \\
&\qquad - x^{19} + x^{21}) \\
&+ a^{14}(4 + 9x^2 + 13x^4 + 11x^6 - x^8 - 3x^{10} - 9x^{12} - 10x^{14} - 7x^{16} \\
&\qquad - 2x^{18} + 3x^{22}) \\
&+ a^{15}(9x + 12x^3 + 16x^5 + 3x^7 + 2x^9 - 10x^{11} - 11x^{13} - 8x^{15} \\
&\qquad - 3x^{17} + 3x^{21} + 2x^{23}) \\
&+ a^{16}(5 + 14x^2 + 15x^4 + 12x^6 + x^8 - 5x^{10} - 16x^{12} - 9x^{14} \\
&\qquad - 9x^{16} - x^{18} + 3x^{20} + 3x^{22}) \\
&+ a^{17}(12x + 15x^3 + 16x^5 + 6x^7 - 3x^9 - 17x^{11} - 13x^{13} - 15x^{15} \\
&\qquad - 5x^{17} + 2x^{19} + 3x^{21}) \\
&+ a^{18}(9 + 14x^2 + 15x^4 + 14x^6 - 3x^8 - 13x^{10} - 20x^{12} - 15x^{14} \\
&\qquad - 15x^{16} + 2x^{18} + 2x^{20} + 5x^{22}) \\
&+ a^{19}(15x + 16x^3 + 18x^5 - 8x^9 - 18x^{11} - 20x^{13} - 19x^{15} - 3x^{17} \\
&\qquad + 3x^{19} + 5x^{21} + 4x^{23}) \\
&+ a^{20}(6 + 14x^2 + 18x^4 + 12x^6 - 10x^8 - 16x^{10} - 25x^{12} - 19x^{14} \\
&\qquad - 12x^{16} + 2x^{18} + 5x^{20} + 9x^{22}) \\
&+ a^{21}(14x + 17x^3 + 19x^5 - x^7 - 8x^9 - 27x^{11} - 25x^{13} - 16x^{15} \\
&\qquad - 2x^{17} + 4x^{19} + 8x^{21} + 4x^{23}) \\
&+ a^{22}(9 + 17x^2 + 19x^4 + 11x^6 - 8x^8 - 18x^{10} - 31x^{12} - 17x^{14} \\
&\qquad - 15x^{16} + 6x^{18} + 9x^{20} + 9x^{22})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ a^{23}(17x + 18x^3 + 17x^5 - 4x^7 - 14x^9 - 32x^{11} - 25x^{13} - 22x^{15} \\
&\qquad - 4x^{17} + 9x^{19} + 9x^{21} + 5x^{23}) \\
&+ a^{24}(8 + 17x^2 + 15x^4 + 9x^6 - 14x^8 - 28x^{10} - 32x^{12} - 23x^{14} \\
&\qquad - 16x^{16} + 9x^{18} + 9x^{20} + 12x^{22}) \\
&+ a^{25}(17x + 15x^3 + 17x^5 - 8x^7 - 19x^9 - 31x^{11} - 28x^{13} - 22x^{15} \\
&\qquad + 4x^{17} + 10x^{19} + 13x^{21} + 9x^{23}) \\
&+ a^{26}(9 + 15x^2 + 16x^4 + 8x^6 - 20x^8 - 23x^{10} - 36x^{12} - 20x^{14} \\
&\qquad - 9x^{16} + 10x^{18} + 14x^{20} + 15x^{22}) \\
&+ a^{27}(14x + 15x^3 + 15x^5 - 13x^7 - 16x^9 - 37x^{11} - 29x^{13} - 17x^{15} \\
&\qquad + 3x^{17} + 14x^{19} + 14x^{21} + 6x^{23}) \\
&+ a^{28}(6 + 14x^2 + 14x^4 + 3x^6 - 17x^8 - 29x^{10} - 37x^{12} - 16x^{14} \\
&\qquad - 13x^{16} + 15x^{18} + 15x^{20} + 14x^{22}) \\
&+ a^{29}(15x + 14x^3 + 10x^5 - 9x^7 - 20x^9 - 36x^{11} - 23x^{13} - 20x^{15} \\
&\qquad + 8x^{17} + 16x^{19} + 15x^{21} + 9x^{23}) \\
&+ a^{30}(9 + 13x^2 + 10x^4 + 4x^6 - 22x^8 - 28x^{10} - 31x^{12} - 19x^{14} \\
&\qquad - 8x^{16} + 17x^{18} + 15x^{20} + 17x^{22}) \\
&+ a^{31}(12x + 9x^3 + 9x^5 - 16x^7 - 23x^9 - 32x^{11} - 28x^{13} - 14x^{15} \\
&\qquad + 9x^{17} + 15x^{19} + 17x^{21} + 8x^{23}) \\
&+ a^{32}(5 + 9x^2 + 9x^4 - 4x^6 - 22x^8 - 25x^{10} - 32x^{12} - 14x^{14} \\
&\qquad - 4x^{16} + 17x^{18} + 18x^{20} + 17x^{22}) \\
&+ a^{33}(9x + 9x^4 + 6x^5 - 15x^7 - 17x^9 - 31x^{11} - 18x^{13} - 8x^{15} \\
&\qquad + 11x^{17} + 19x^{19} + 17x^{21} + 9x^{23}) \\
&+ a^{34}(4 + 8x^2 + 4x^4 - 2x^6 - 16x^8 - 25x^{10} - 27x^{12} - 8x^{14} \\
&\qquad - x^{16} + 19x^{18} + 17x^{20} + 14x^{22}) \\
&+ a^{35}(9x + 5x^3 + 2x^5 - 12x^7 - 19x^9 - 25x^{11} - 16x^{13} - 10x^{15} \\
&\qquad + 12x^{17} + 18x^{19} + 14x^{21} + 6x^{23}) \\
&+ a^{36}(4 + 5x^2 + 3x^4 - 3x^6 - 19x^8 - 20x^{10} - 18x^{12} - 8x^{14} \\
&\qquad + 18x^{18} + 16x^{20} + 15x^{22}) \\
&+ a^{37}(5x + 2x^3 + 2x^5 - 15x^7 - 15x^9 - 20x^{11} - 13x^{13} - 3x^{15} \\
&\qquad + 14x^{17} + 15x^{19} + 14x^{21} + 9x^{23}) \\
&+ a^{38}(3x^2 + 2x^4 - 5x^6 - 15x^8 - 13x^{10} - 17x^{12} - 3x^{14} + 6x^{16} \\
&\qquad + 16x^{18} + 15x^{20} + 12x^{22}) \\
&+ a^{39}(3x + 3x^3 - x^5 - 9x^7 - 9x^9 - 16x^{11} - 5x^{13} + x^{15} + 12x^{17} \\
&\qquad + 15x^{19} + 14x^{21} + 5x^{23}) \\
&+ a^{40}(2 + 3x^2 - 3x^6 - 8x^8 - 11x^{10} - 10x^{12} + 2x^{14} + 3x^{16} \\
&\qquad + 16x^{18} + 12x^{20} + 9x^{22}) \\
&+ a^{41}(3x - 2x^5 - 7x^7 - 10x^9 - 9x^{11} - 3x^{13} - x^{15} + 11x^{17} \\
&\qquad + 13x^{19} + 9x^{21} + 4x^{23}) \\
&+ a^{42}(x^2 - x^4 - 3x^6 - 9x^8 - 8x^{10} - 3x^{12} - x^{14} + 6x^{16} + 12x^{18} \\
&\qquad + 9x^{20} + 9x^{22})
\end{aligned}
$$

$$+ a^{43}(x - x^3 - 6x^7 - 5x^9 - 3x^{11} - x^{13} + 4x^{15} + 12x^{17} + 9x^{19} + 9x^{21} + 4x^{23})$$
$$+ a^{44}(-x^6 - 5x^8 - x^{10} - 4x^{12} + 4x^{14} + 8x^{16} + 8x^{18} + 8x^{20} + 5x^{22})$$
$$+ a^{45}(-x^5 - 3x^7 - 4x^{11} + x^{13} + 4x^{15} + 6x^{17} + 8x^{19} + 5x^{21})$$
$$+ a^{46}(x^3 - 2x^6 - x^8 - 2x^{10} + 4x^{14} + x^{16} + 7x^{18} + 5x^{20} + 3x^{22})$$
$$+ a^{47}(-x^5 - 2x^9 - x^{11} + 3x^{13} + x^{15} + 6x^{17} + 4x^{19} + 3x^{21} + 2x^{23})$$
$$+ a^{48}(1 - x^4 - 2x^8 + x^{12} + 4x^{16} + 4x^{18} + 2x^{20} + 3x^{22})$$
$$+ a^{49}(-x^7 - x^9 + 2x^{11} + 3x^{15} + 3x^{17} + 2x^{19} + 3x^{21})$$
$$+ a^{50}(-x^2 - x^6 + 2x^{14} + 2x^{16} + 2x^{18} + 2x^{20} + x^{22})$$
$$+ a^{51}(x^9 + x^{13} + 2x^{15} + x^{17} + 2x^{19})$$
$$+ a^{52}(x^8 + x^{12} + x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{20})$$
$$+ a^{55}x^{23}.$$

It is not worth while to write down the somewhat less simple form of the Generating Function with the denominator

$$(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})^2(1-a^{30})(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)(1-a^2x^{10})(1-ax^7)$$

which only differs slightly from the above: viz. its denominator contains the factor $1 - a^{30}$ instead of $1 - a^{20}$, and its numerator extends to $a^{65}x^{23}$ instead of to $a^{55}x^{23}$.

Ueber die symbolische Darstellung der Grundsyzyganten einer binären Form sechster Ordnung und eine Erweiterung der Symbolik von Clebsch.

Von

EMIL STROH in München.

Durch die Arbeiten von Perrin*), Stephanos**), Hammond***) und v. Gall†) sind bis jetzt im Ganzen 204 irreducible Syzyganten der binären Form sechster Ordnung aufgefunden worden und zwar wurden dieselben durch Anwendung der verschiedenartigsten, oft recht umständlichen Methoden berechnet. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, nachzuweisen, dass *sämmtliche* 204 *Syzyganten verschiedene Formen von im Ganzen nur* 11 *elementaren Syzyganten* sind. Bezeichnet man alsdann jede elementare Syzygante durch ein Symbol von der Art $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$, so sind demnach *sämmtliche Syzyganten durch nur* 11 *verschiedene Symbole* darstellbar und zugleich vollständig dadurch bestimmt.††) Diese Darstellung der Syzyganten ist in § 5 in der Weise durchgeführt, dass noch 2 weitere Symbole adjungirt wurden, die jedoch mit den übrigen in einfacher Weise zusammenhängen. (Vgl. § 4).

Bis zum Grade 9 wurde auch die *Auswerthung* der symbolischen Syzyganten beigefügt und zwar aus dem Grunde, weil diese in den Anwendungen am häufigsten vorkommen und weil die *Ableitung* dieser Syzyganten aus den angeführten Arbeiten grösstentheils nicht ersehen werden kann. Es mag auch darauf hingewiesen werden, dass jede Syzygante *unabhängig von den übrigen* erhalten wird, wodurch fehlerhafte Resultate möglichst vermieden werden. Da jede irreducible Syzygante noch auf sehr viele verschiedene Arten symbolisch darstellbar ist, so wurde auch darauf Rücksicht genommen, dass das in jedem besonderen Falle gewählte Symbol bei der Auswerthung möglichst

---

*) Comptes rendus Vol. XCVI.

**) Ebenda.

***) American Journal of Math. Vol. VII.

†) Math. Annalen Bd. 35, pag. 63.

††) Vgl. Math. Annalen Bd. 34, pag. 354, wo der Nachweis geführt wurde, dass die Grundsyzyganten der binären Form *fünfter* Ordnung durch nur 4 elementare Syzyganten darstellbar sind.

wenig Mühe verursache. Derjenige Theil der berechneten Syzygante, aus welchem die Irreducibilität derselben ersichtlich ist, wurde durchgehends beigefügt und durch das Zeichen $\equiv$ mit dem Symbole verbunden.

Im zweiten Theile vorliegender Arbeit, der mit § 7 beginnt, habe ich eine Erweiterung der Symbolik von Clebsch entwickelt, durch deren Benutzung es möglich wird, neuere Untersuchungen von Cayley, Mac Mahon u. A. über Seminvarianten und Perpetuanten in den Kreis der symbolischen Methode hereinzuziehen. Es zeigt sich nämlich, dass der „Klammerfactor“ von Clebsch nur eine specielle Form eines allgemeineren invarianten „Grundsymbols“ ist. Durch Benützung dieser Grundsymbole gestaltet sich dann der Ausdruck der Covarianten übersichtlicher, insbesondere die Seminvarianten können als einfache Potenzen von Grundsymbolen dargestellt werden. Es hat dann keine Schwierigkeit, nicht nur die *Zahl* der linear unabhängigen Seminvarianten und Perpetuanten zu bestimmen, sondern es ist auch ermöglicht, diese Formen in symbolischer Gestalt sofort hinzuschreiben. Zum Schlusse wird noch das *ternäre* Grundsymbol aufgestellt und dadurch gezeigt, dass die Uebertragung dieser Symbolik auf Formen mit mehr Veränderlichen keinen Schwierigkeiten begegnet.

§ 1.

Methode zur Entwicklung der elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$.

Das Verfahren, welches alle linearen Relationen zwischen Covarianten gleicher Ordnung und gleichen Grades aufzufinden gestattet*), kann auch zur Entwicklung jeder Syzygante gebraucht werden. Insbesondere werden die elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ in folgender Weise erhalten.

Aus den vier Formen $f_1 f_2 f_3 f_4$ lassen sich 15 Gruppen von Ueberschiebungen bilden, deren jede im allgemeinen *zerfallende* Formen enthalten wird. So gehören zur ersten Gruppe die zerfallenden Formen $f_1\left((f_2 f_3)^\lambda f_4\right)^{i-\lambda}$, zur zweiten die Formen $f_1\left((f_2 f_4)^\lambda f_3\right)^{i-\lambda}$ etc. etc. Da

*) Vgl. Math. Annalen Bd. 33, pag. 93 u. f. Ein andrer Weg zur Auffindung dieser Relationen ist neuerdings von Herrn Study (Methoden zur Theorie der ternären Formen pag. 97) angegeben worden. Darnach müsste das Product $f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) \cdot f_4(t)$ auf mehrere verschiedene Arten nach der Gordan'schen Reihe entwickelt werden. Allein da die Durchführung einer solchen Reihenentwicklung schon in den einfachsten Fällen mit grossen rechnerischen Schwierigkeiten verknüpft ist, so dürften auf diesem Wege kaum praktische Resultate gewonnen werden können. Ganz ähnlich verhält es sich bekanntlich mit der aus der Theorie der associirten Formen entspringenden Methode, die ebenfalls unausführbare Rechnungen erfordern würde, obwohl sie theoretisch das Problem löst

nun aber nach einem Mathematische Annalen Bd. 33, pag. 68 bewiesenen Satze die letzteren Formen durch die ersteren linear ausgedrückt werden können, so kommen diese vorläufig nicht in Betracht. Es bleiben demnach nur noch 7 Gruppen von Ueberschiebungen zurück. Die Zahl der darin vorkommenden zerfallenden Formen soll nun bestimmt werden.

Seien die Formen nach fallenden Ordnungszahlen geordnet, so dass

$$n_1 \geqq n_2 \geqq n_3 \geqq n_4$$

und bezeichne ε_k die Differenz $i - n_k$ mit der Bedingung, dass dieselbe stets $= 0$ zu nehmen ist, sobald sie negativ ausfallen würde, dann ist die Anzahl der zerfallenden Formen durch die beigesetzte Zahl angegeben

$$\begin{array}{lll}
(f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^\mu & \text{Anzahl} & i + 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \\
(f_1 f_3)^\lambda (f_2 f_4)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\
(f_1 f_4)^\lambda (f_2 f_3)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \\
f_1 \left((f_2 f_3)^\lambda f_4\right)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\
f_2 \left((f_1 f_3)^\lambda f_4\right)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\
f_3 \left((f_1 f_2)^\lambda f_4\right)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \\
f_4 \left((f_1 f_2)^\lambda f_3\right)^\mu & \text{"} & i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.
\end{array}$$

Bei dieser Anordnung sind jedoch die Formen

$$f_r f_k (f_l f_m)^i$$

dreifach gerechnet, da dieselben in drei verschiedenen Gruppen vorkommen. Die Zahl dieser Formen ist nun aber gleich $\binom{\nu}{2}$, wenn ν die Zahl der verschwindenden ε ist und somit wird die Gesammtzahl der zerfallenden Formen

$$Z = 7 \,.\, (i + 1) - 6\varepsilon_4 - 5\varepsilon_3 - 4\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 - \nu(\nu - 1).$$

Durch Anwendung des *associativen Gesetzes* für die Ueberschiebung kann nun jede zerfallende Form durch die Formen ein und derselben Gruppe linear ausgedrückt werden. Nehmen wir beispielsweise als solche die Gruppe der Formen

$$[(f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^\mu]^\nu \quad \lambda + \mu + \nu = i,$$

dann wird die *Zahl* dieser Formen durch den Coefficienten von x^i in folgender Entwicklung angegeben:

$$\frac{(1 - x^{n_1+1})\,(1 - x^{n_2+1})\,(1 - x^{n_3+1})\,(1 - x^{n_4+1})}{(1 - x)^3} = \sum_\lambda A_\lambda x^\lambda,$$

Der Umstand, dass i nicht grösser anzunehmen ist, als $n_3 + n_4$, weil

sonst in vier Gruppen die zerfallenden Formen ganz wegfallen würden und eine brauchbare Syzygante nicht erhalten werden könnte (Beweis am Schlusse des § 3), gestattet nun, diese Entwicklung in folgender Weise vorzunehmen:

$$(1 - x^{n_1+1} - x^{n_2+1} - x^{n_3+1} - x^{n_4+1}) \sum_{\lambda} \binom{i+2}{2} x^{\lambda}.$$

Daher wird der Coefficient von x^i

$$A_i = \binom{i+2}{2} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=4} \binom{\varepsilon_\lambda + 1}{2}.$$

Es sind folglich die Z zerfallenden Formen durch A_i Formen linear dargestellt, die selbst linear unabhängig sind. Durch Elimination der letzteren Formen müssen sich folglich mindestens $Z - A_i$ oder

$$S = \frac{1}{2} \big((i+1)(12-i) - \varepsilon_1(5-\varepsilon_1) - \varepsilon_2(7-\varepsilon_2) - \varepsilon_3(9-\varepsilon_3) \\ - \varepsilon_4(11-\varepsilon_4) - 2\nu(\nu-1)\big)$$

Syzyganten ergeben. Daher gilt der Satz:

Zwischen vier Formen $f_1 f_2 f_3 f_4$, die nach abnehmenden Ordnungszahlen geordnet seien, existiren mindestens

$$(1) \qquad \frac{1}{2} [(i+1)(12-i) - \varepsilon_1(5-\varepsilon_1) - \varepsilon_2(7-\varepsilon_2) - \varepsilon_3(9-\varepsilon_3) \\ - \varepsilon_4(11-\varepsilon_4) - 2\nu(\nu-1)]$$

elementare Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$. Hierin ist $\varepsilon_\varkappa = i - n_\varkappa$ stets gleich Null zu setzen, sobald es negativ ausfallen würde, während ν die Zahl der verschwindenden ε bedeutet.

So berechnet sich die Zahl der Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_2 = 0$, wenn alle Formen f von der zweiten oder von höherer Ordnung sind, gleich 3. Es sind dies die Syzyganten

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_2)^{\lambda} (f_3 f_4)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_4)^{\lambda} (f_3 f_2)^{2-\lambda} = 0,$$

$$[f_1 f_2 f_4 f_3]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_2)^{\lambda} (f_4 f_3)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_3)^{\lambda} (f_4 f_2)^{2-\lambda} = 0,$$

$$[f_1 f_3 f_2 f_4]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_3)^{\lambda} (f_2 f_4)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_4)^{\lambda} (f_2 f_3)^{2-\lambda} = 0,$$

und alle übrigen wie z. B.

$$\{f_1 f_2 f_3 f_4\}_2 = (f_1 f_2)(f_3 f_4) + (f_2 f_3)(f_1 f_4) + (f_3 f_1)(f_2 f_4) = 0$$

lassen sich folglich aus den drei ersten linear zusammensetzen. In den meisten Fällen ist nun aber die Anzahl der Syzyganten noch grösser, als sie durch obige Zahl bestimmt werden kann. Es rührt

dies daher, dass die linearen Functionen, durch welche die Z zerfallenden Formen ausgedrückt sind, von specieller Natur sind, derart, dass gewisse Determinanten aus den Coefficienten dieser Functionen verschwinden. Diese Fälle machen es nothwendig, die oben angegebenen Entwicklungen der Z zerfallenden Formen nach den Formen einer Gruppe wirklich vorzunehmen, um ein Urtheil über die Zahl der existirenden Syzyganten zu erhalten.

§ 2.

Entwicklung einiger elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$.

Ausser den schon bei der Form fünfter Ordnung benützten Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ werden im Folgenden noch weitere Syzyganten vom Gewichte 4, 5 und 6 nothwendig werden, die nun zunächst nach der beschriebenen Methode abgeleitet werden sollen. Auch gelangt man durch Umformung schon bekannter Syzyganten häufig schneller zum Ziele.

1. Entwicklung von $[f\varphi\psi q]_4 = 0$.

Seien f, φ, ψ und χ Formen vierter Ordnung, dann existirt die folgende Syzygante

$$\begin{aligned}[][f\varphi\psi\chi]_4 + [f\varphi\chi\psi]_4 - [f\psi\varphi\chi]_4 = 2[&(f\varphi)^4\psi\chi - (f\psi)^4\varphi\chi + 6(f\varphi)^2(\psi\chi)^2 \\ &+ f\varphi(\psi\chi)^4 + 4(f\chi)^3(\varphi\psi) + 4(f\chi)(\varphi\psi)^3 \\ &- f\psi(\varphi\chi)^4 - 6(f\psi)^2(\varphi\chi)^2] = 0.\end{aligned}$$

In derselben kann nun der Theil

$$P = f\varphi(\psi\chi)^4 - f\psi(\varphi\chi)^4 + 4(\varphi\psi)(f\chi)^3$$

derart umgeformt werden, dass ausser den schon vorhandenen Covariantenproducten nur die folgenden vier neuen Formen auftreten:

$$\begin{aligned} A &= (ad)^2\,(ac)^2\,d_x^2 c_x^2, & A' &= (ad)^2\,(ab)^2\,d_x^2 b_x^2, \\ B &= (cd)^2\,(ca)^2\,d_x^2 a_x^2, & B' &= (bd)^2\,(ba)^2\,d_x^2 a_x^2.\end{aligned}$$

Führt man zu diesem Zwecke in der Relation $\begin{pmatrix}\chi & f & \psi \\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ die Formen A und B ein, so erhält man

$$A - 2\big((f\chi)^3\psi\big)^1 = B - 2\big((\psi\chi)^3 f\big)^1.$$

Ferner lässt sich aus

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}f & \psi & \chi \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}_4 = 6\big((f\chi)^2\psi\big)^2 - 2\big((f\chi)^3\psi\big)^1 + (f\chi)^4\psi - (f\psi)^4\chi - (\psi\chi)^4 f \\ + 4\big((\psi\chi)^3 f\big)^1 = 0\end{aligned}$$

und der vorigen Relation die Ueberschiebung $\left((\psi\chi)^3 f\right)^1$ eliminiren, so dass man erhält

$$4\left((f\chi)^3\psi\right)^1 + (\psi\chi)^4 f = 4A + 2B - (f\chi)^4\psi - (f\psi)^4\chi.$$

Vertauscht man φ mit ψ und eliminirt $(f\chi)^4$, so ergiebt sich die gesuchte Form von P:

$$P = 4A\,.\,\varphi + 2B\varphi - 4A'\psi - 2B'\psi - (f\psi)^4\varphi\chi + (f\varphi)^4\psi\chi.$$

Die ganze Syzygante wird nach Einführung dieses Ausdruckes durch d_x^2 theilbar, und wenn ferner mit passenden Potenzen von a_x, b_x, c_x multiplicirt wird, so ergiebt sich die gesuchte Syzygante

$$\begin{aligned}[f\,\varphi\,\psi\,q]_4 = (f\varphi)^4\psi q + 3(f\varphi)^2(\psi q)^2 - (f\psi)^4\varphi q - 3(f\psi)^2(\varphi q)^2\\ + 2(fq)(\varphi\psi)^3 - 2\psi\left((fq)^2\varphi\right)^2 - \psi\left((\varphi q)^2 f\right)^2\\ + 2\varphi\left((fq)^2\psi\right)^2 + \varphi\left((\psi q)^2 f\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Darin bedeutet q eine *quadratische* Form, während f, φ und ψ von der *vierten* oder höherer Ordnung sind.

2. Entwicklung zweier Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_5 = 0$.

In der aus Früherem bekannten Syzygante

$$\frac{1}{2}\left([f\varphi\psi\chi]_5 + [\varphi f\psi\chi]_5 + [f\psi\varphi\chi]_5\right) = 0$$

kommt der Theil

$$P = f\varphi(\psi\chi)^5 - \varphi\psi(f\chi)^5 + \varphi\chi(f\psi)^5$$

vor, der in folgender Weise durch die drei symbolisch dargestellten Formen

$$\begin{aligned}A &= (a\alpha)^4\,(a\beta)\,\alpha_x\beta_x^4\\ B &= (a\beta)^4\,(a\alpha)\alpha_x^4\beta_x\\ C &= (\alpha\beta)^3\,(\alpha a)\,(\beta a)\,\alpha_x\beta_x a_x^3\end{aligned}$$

wobei $f = a_x^5$, $\varphi = b_x^5$, $\psi = \alpha_x^5$, und $\chi = \beta_x^5$ angenommen ist, ausgedrückt werden kann. Mittelst der allgemeinen Formel (4) Math. Annalen Bd. 31, pag. 447 erhält man nämlich die Beziehung

$$(a\alpha)^5\beta_x^5 - (a\beta)^5\alpha_x^5 + (\alpha\beta)^5 a_x^5 = \frac{5}{3}A - \frac{5}{3}B + \frac{10}{3}C,$$

folglich ist

$$P = \varphi\left(\frac{5}{3}A - \frac{5}{3}B + \frac{10}{3}C\right).$$

Nach Einführung dieses Werthes kann der Factor $\alpha_x\,.\,\beta_x$ aus der ganzen Syzygante entfernt werden, ferner können die Ordnungen von f und φ beliebig erhöht werden, so dass man das Resultat erhält:

$$\begin{aligned}[][f\varphi v v']_5 = {} & (f\varphi)^4(vv') + 2(f\varphi)^2(vv')^3 + 2(fv)^3(\varphi v')^2 + (fv)(\varphi v')^4 \\ & - 2(fv')^3(\varphi v)^2 - (fv')^1(\varphi v)^4 - \frac{2}{3}\varphi\left((vv')^3 f\right)^2 \\ & + \frac{1}{3}\varphi\left((fv)^4 v'\right)^1 - \frac{1}{3}\varphi\left((fv')^4 v\right)^1 = 0.\end{aligned}$$

Hierin bedeuten v und v' Formen *vierter* Ordnung, während f und φ von der *fünften* oder von höherer Ordnung sind. Indessen besitzt die ganze Syzygante den symbolischen Factor b_x und verliert daher ihre Giltigkeit nicht, wenn φ ebenfalls von der *vierten* Ordnung ist.

Eine weitere Syzygante vom Gewicht 5 ergiebt sich, wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2}\left([f\varphi\psi\chi]_5 + [f\varphi\chi\psi]_5 - [f\psi\varphi\chi]_5\right)$$

den Theil

$$P = f\chi(\varphi\psi)^5 - \varphi\chi(f\psi)^5$$

derart umformt, dass nur die Covarianten

$$\begin{aligned} D &= (b\alpha)^4\,(b\alpha)\alpha_x a_x^4, \\ E &= (a\alpha)^4\,(ab)\alpha_x b_x^4, \\ F &= (ab)^3\,(a\alpha)\,(b\alpha)a_x b_x \alpha_x^3 \end{aligned}$$

darin vorkommen. Aus der oben benutzten symbolischen Identität folgt durch Vertauschung von α, β, a mit a, b, α ohne Schwierigkeit

$$P = \frac{3}{2}(f\varphi)^5\psi + 5F + \frac{5}{2}D - \frac{5}{2}E.$$

Nunmehr können die Ordnungen von ψ und χ je um eins erniedrigt und ferner diejenigen von f und φ beliebig erhöht werden. Doch ist alsdann der Ausdruck F nicht mehr als einfache Ueberschiebung darstellbar, sondern muss durch

$$\left((f\varphi)^3 v\right)^2 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 - 6}\left((f\varphi)^4 v\right)^1 - \frac{(n_1-4)\,(n_2-4)}{2\binom{n_1+n_2-7}{2}}(f\varphi)^5 \cdot v$$

ersetzt werden. Alsdann wird diese Syzygante

$$\begin{aligned}\{f\varphi v v'\}_5 = {} & 2(f\varphi)^3(vv')^2 + (f\varphi)(vv')^4 + 2(fv')^2(\varphi v)^3 + (fv')^4(\varphi v) \\ & - 2(fv)^3(\varphi v')^2 - (fv)(\varphi v')^4 - \frac{1}{2}v'\left((fv)^4\varphi\right)^1 \\ & + \frac{1}{2}v'\left((\varphi v)^4 f\right)^1 + v'\left((f\varphi)^3 v\right)^2 + \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2-6}v'\left((f\varphi)^4 v\right)^1 \\ & + \frac{\binom{n_1-3}{2}+\binom{n_2-3}{2}}{2\binom{n_1+n_2-7}{2}}(f\varphi)^5 v v' = 0.\end{aligned}$$

Auch können die letzten 5 Terme, die sämmtlich den Factor v' besitzen, durch die folgenden ersetzt werden:

$$v'\left[\frac{1}{3}\left((fv)^3\varphi\right)^2-\frac{1}{3}\left((\varphi v)^3 f\right)^2+\frac{1}{6}(f\varphi)^5 v+\frac{3n_2-10}{6(n_2-2)}\left((\varphi v)^4 f\right)^1\right.$$
$$\left.-\frac{3n_1-10}{6(n_1-2)}\left((fv)^4\varphi\right)^1\right].$$

Dieser Werth ergiebt sich, indem man die Differenz $f(\varphi\psi)^5-\varphi(f\psi)^5$ — in ähnlicher Weise wie oben — durch die angegebenen Formen ausdrückt.

3. Entwicklung zweier Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_6=0$.

Zunächst soll die Syzygante $[ffvv]_6=0$ entwickelt werden, wenn v eine beliebige Form *vierter* Ordnung darstellt, und zwar wird das allgemeine oben beschriebene Verfahren eingeschlagen werden. Darnach müssen sämmtliche zerfallende Formen durch die Formen der Gruppe

$$\text{(I)}\quad \begin{gathered}(ff)^6 v^2,\ (ff)^4(vv)^2,\ (ff)^2(vv)^4,\ [(ff)^2 v^2]^4,\ [(ff)^2(vv)^2]^2,\\ [(ff)^4 v^2]^2,\ [f^2, v^2]^6,\ [f^2,(vv)^2]^4,\end{gathered}$$

die linear unabhängig sind, ausgedrückt werden.

Ich benütze die Abkürzungen

$$(ff)^2=H,\ (ff)^4=i,\ (ff)^6=A,\ (vv)^2=\Delta,\ (vv)^4=B,\ (\varphi v)^2=\varphi_2,$$

indem ich zugleich f zunächst als Form *sechster* Ordnung betrachte, und erhalte aus $\begin{pmatrix} f & v & f\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ durch Ueberschiebung über v:

$$\left((f_4 f)^1 v\right)^1=2H_{31}+\frac{5}{7}i_{11}.$$

Nun lässt sich H_{31} vermittelst $\begin{pmatrix} v & H & v\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ durch die Formen der Gruppe (I) und zerfallende Formen linear ausdrücken

$$H_{31}=\frac{5}{6}H_4\cdot v-\frac{3}{2}(H\Delta)^2-\frac{1}{4}HB,$$

ferner können die beiden andern Formen in bekannter Weise durch zerfallende Formen ersetzt werden. So erhält man eine *erste* Beziehung

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{2}ff_{42}-\frac{1}{2}f_4 f_2-\frac{1}{3}v(f_4 f)^2-\frac{5}{3}vH_4-\frac{5}{14}v\cdot i_2$$
$$=-3(H\Delta)^2-\frac{1}{2}HB-\frac{5}{14}i\Delta,$$

in welcher nur 3 Formen der Gruppe (I) auftreten.

Eine *zweite* Relation wird erhalten durch Entwicklung der Form $f_3\cdot f_3$, die in obiger Relation noch nicht vorkommt. Bildet man die Differenz der Relationen

$$\begin{pmatrix} f & v & f_3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix} f_3 & v & f\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

dann hat man zunächst

$$f_3^2 - f\cdot f_{33} = 3\left((ff_3)^1 v\right)^2 - \tfrac{3}{4}\left((ff_3)^2 v\right)^1 + \tfrac{3}{7}(ff_3)^3\cdot v.$$

Nachdem hierin die Ueberschiebungen $(ff_3)^1$ und $(ff_3)^2$ in bekannter Weise durch die Formen $\left((ff)^{2\lambda} v\right)^\mu$ ausgedrückt sind, erhält man schliesslich

$$f_3^2 - f\cdot f_{33} - \tfrac{3}{4}(ff_4, v)^2 + \tfrac{15}{28}(iv, v)^2 + \tfrac{9}{14}\left((iv)^1 v\right)^1 - \tfrac{3}{8}\left((f_4 f)^1 v\right)^1$$
$$- \tfrac{3}{7} v (ff_3)^3 = -\tfrac{9}{2} H_{22} - \tfrac{3}{4} H_{31}.$$

Der rechts stehende Theil kann nun in bekannter Weise nach Formen der Gruppe (I) entwickelt werden:

$$H_{22} = \tfrac{5}{4} v H_4 - \tfrac{3}{8} HB - \tfrac{9}{4}(H\Delta)^2,$$
$$H_{31} = \tfrac{5}{6} v H_4 - \tfrac{1}{4} HB - \tfrac{3}{2}(H\Delta)^2,$$

und so folgt nach einigen einfachen Reductionen die gesuchte Relation:

$$(2)\quad f_3^2 - \tfrac{5}{8} ff_{42} + \tfrac{1}{2} f(f\Delta)^4 + v\left(\tfrac{15}{16}(ff_4)^2 + \tfrac{11}{4}(ff_3)^3 + \tfrac{3}{16} Av\right)$$
$$-\tfrac{3}{8} f_2 f_4 = \tfrac{27}{4}(H\Delta)^2 + \tfrac{3}{8} HB + \tfrac{3}{56} i\Delta.$$

Indem man nun zwischen (1) und (2) die Form $(H\Delta)^2$ eliminirt, und die Formen H_4 und i_2 vermittelst $\begin{pmatrix} f & f & v \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & f & v \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ durch andere Formen ausdrückt, folgt die gesuchte Syzygante:

$$(ff)^2 (vv)^4 + (ff)^4 (vv)^2 + \tfrac{1}{3}(ff)^6 v^2 - 2(fv)^2 (fv)^4 + \tfrac{4}{3}(fv)^3 (fv)^3$$
$$+ 2v\left[\left((ff)^4 v\right)^2 - \left((fv)^4 f\right)^2\right] + \tfrac{2}{3} f\left[\left((fv)^4 v\right)^2 + \left((vv)^2 f\right)^4\right] = 0.$$

Dieselbe gilt zunächst nur, wenn f von der *sechsten* Ordnung ist. Ersetzt man nun aber alle Ueberschiebungen durch symbolische Producte und multiplicirt mit $a_x^{n-6}\,.\,b_x^{n-6}$, dann erhält man eine *allgemeine* Syzygante für eine beliebige *höhere* Ordnung von f. Auch lässt sich bemerken, dass durch diesen Process alle Ueberschiebungen völlig ungeändert bleiben, ausgenommen $\left((ff)^4 v\right)^2$. Dieses geht zunächst über in:

$$(ab)^4 (av)^2 b_x^2 v_x^2 - \tfrac{1}{3}(ab)^6 v_x^4$$

und nach Multiplication mit $a_x^{n-6}\,.\,b_x^{n-6}$ in

$$\left((ff)^4 v\right)^2 - \frac{n-6}{6(2n-9)}(ff)^6 v.$$

Die allgemein giltige Syzygante wird demnach

$$\begin{aligned}[ffvv]_6 = (ff)^2(vv)^4 + (ff)^4(vv)^2 - 2(fv)^2(fv)^4 + \tfrac{4}{3}(fv)^3(fv)^3 \\ + v\Big[2\big((ff)^4 v\big)^2 - 2\big((fv)^4 f\big)^2 + \tfrac{n-3}{3(2n-9)}(ff)^6 v\Big] \\ + \tfrac{2}{3} f\Big[\big((fv)^4 v\big)^2 + \big((vv)^2 f\big)^4\Big] = 0.\end{aligned}$$

Darin ist f eine Form *sechster* oder höherer Ordnung, dagegen v eine Form *vierter* Ordnung. Auch lässt sich leicht noch die weitere Syzygante $[f\varphi vv']_6 = 0$ hieraus ableiten, die jedoch im Folgenden nicht benützt wird.

Eine *zweite* Syzygante vom Gewichte 6 ergiebt sich aus $\begin{pmatrix} v & f & \Delta \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}_4$ in der Gestalt

$$\begin{aligned}[fvvv]_6 = (vv)^4(fv)^2 + f\big((vv)^2 v\big)^4 - v\big((vv)^2 f\big)^4 \\ - \tfrac{3n-10}{n-2}(fv)^4(vv)^2 + 4[(fv)^3(vv)^2]^1 = 0,\end{aligned}$$

dieselbe ist jedoch nur dann brauchbar, wenn der letzte Term einen Werth besitzt, der vom übrigen Theile der Syzygante verschieden ist, wie z. B. den Werth Null.

§ 3.

Zusammenstellung und Prüfung der elementaren Syzyganten, welche im Folgenden benützt werden.

Da jede elementare Syzygante als Quelle zahlreicher neuer Syzyganten betrachtet werden muss, so ist es wichtig, dass man sich auf einfache Weise von der Richtigkeit jeder derselben überzeugen kann. Im Folgenden werden nun benützt:

Gewicht 1.

$$(f\varphi\psi) = f(\varphi\psi) - \varphi(f\psi) + \psi(f\varphi) = 0.$$

Gewicht 2.

$$\begin{aligned}[f\varphi\psi\chi]_2 = 2(f\psi)(\varphi\chi) + f\varphi(\psi\chi)^2 - (f\varphi)^2\psi\chi - f\chi(\varphi\psi)^2 \\ - (f\chi)^2\varphi\psi = 0,\end{aligned}$$

$$\{f\varphi\psi\chi\}_2 = (f\varphi)(\psi\chi) - (f\psi)(\varphi\chi) + (\varphi\psi)(f\chi) = 0.$$

(Gilt auch für lineare Formen.)

Gewicht 3.

$$\begin{aligned}[f\varphi\psi q]_3 = 2(f\varphi)(\psi q)^2 - 2(fq)(\varphi\psi)^2 + 2(\varphi q)(f\psi)^2 \\ - \psi\big((fq)^2\varphi\big)^1 + \psi\big((\varphi q)^2 f\big)^1 + \psi q(f\varphi)^3 = 0,\end{aligned}$$

(Gilt auch, wenn ψ eine quadratische Form ist.)

$$\{f\varphi q q'\}_3 = (fq)^2 (\varphi q') - (fq')^2 (\varphi q) - (f\varphi)^2 (qq') + f\big((qq')\,\varphi\big)^2 = 0.$$

(Gilt auch, wenn f und φ quadratische Formen sind. Ist φ von höherer als der zweiten Ordnung, so kann der letzte Term auch durch

$$f\big((\varphi q')^2\, q\big)^1 - f\big((\varphi q)^2\, q'\big)^1$$

ersetzt werden.)

Gewicht 4.

$$[f\varphi\psi\chi]_4 = \sum_\lambda \binom{4}{\lambda} (f\varphi)^\lambda (\psi\chi)^{4-\lambda} - \sum_\lambda \binom{4}{\lambda} (f\chi)^\lambda (\psi\varphi)^{4-\lambda} = 0,$$

$$\begin{aligned}[f\varphi\psi q]_4 &= (f\varphi)^4 \psi q + 3(f\varphi)^2 (\psi q)^2 - (f\psi)^4 \varphi q - 3(f\psi)^2 (\varphi q)^2 \\ &\quad + 2(fq)(\varphi\psi)^3 + 2\varphi\big((fq)^2\,\psi\big)^2 + \varphi\big((\psi q)^2 f\big)^2 - 2\psi\big((fq)^2\varphi\big)^2 \\ &\quad - \psi\big((\varphi q)^2 f\big)^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f\varphi q q']_4 &= 2(f\varphi)^2 (qq')^2 - 2(f\varphi)^3 (qq') + (f\varphi)^4 qq' - (fq)^2 (\varphi q')^2 \\ &\quad - (fq')^2 (\varphi q)^2 - 2q\big((\varphi q')^2 f\big)^2 - 2q'\big((fq)^2\,\varphi\big)^2 + f(\varphi, qq')^4 \\ &\quad + \varphi(f, qq')^4 = 0.\end{aligned}$$

Gewicht 5.

$$\begin{aligned}[f\varphi v v']_5 &= (f\varphi)^4 (vv') + 2(f\varphi)^2 (vv')^3 + 2(fv)^3 (\varphi v')^2 + (fv)(\varphi v')^4 \\ &\quad - 2(fv')^3 (\varphi v)^2 - (fv')(\varphi v)^4 - \tfrac{2}{3}\,\varphi\big((vv')^3 f\big)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\,\varphi\big((fv)^4\, v'\big)^1 - \tfrac{1}{3}\,\varphi\big((fv')^4\, v\big)^1 = 0.\end{aligned}$$

(Gilt auch, wenn φ von der vierten Ordnung ist; wäre auch f eine biquadratische Form, so müssten die 3 letzten Terme durch

$$-\varphi\big((vv')^1 f\big)^4 - \tfrac{4}{5}\,\varphi\big((vv')^3 f\big)^2$$

ersetzt werden.)

$$\begin{aligned}\{f\varphi v v'\}_5 &= 2(f\varphi)^3 (vv')^2 + (f\varphi)(vv')^4 + 2(fv')^2 (\varphi v)^3 + (fv')^4 (\varphi v) \\ &\quad - 2(fv)^3 (\varphi v')^2 - (fv)(\varphi v')^4 - \tfrac{1}{2}\, v'\big((fv)^4\,\varphi\big)^1 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, v'\big((\varphi v)^4 f\big)^1 + v'\big((f\varphi)^3\, v\big)^2 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 - 6}\, v'\big((f\varphi)^4\, v\big)^1 \\ &\quad + \frac{\binom{n_1 - 3}{2} + \binom{n_2 - 3}{2}}{2\binom{n_1 + n_2 - 7}{2}} (f\varphi)^5\, vv' = 0.\end{aligned}$$

Gewicht 6.

$$[ffvv]_6 = (ff)^2(vv)^4 + (ff)^4(vv)^2 - 2(fv)^2(fv)^4 + \frac{4}{3}(fv)^3(fv)^3$$
$$+ v\left[2\left((ff)^4 v\right)^2 - 2\left((fv)^4 f\right)^2 + \frac{n-3}{3(2n-9)}(ff)^6 v\right]$$
$$+ \frac{2}{3} f\left[\left((fv)^4 v\right)^2 + \left((vv)^2 f\right)^4\right] = 0,$$

$$[fvvv]_6 = (vv)^4(fv)^2 + f\left((vv)^2 v\right)^4 - v\left((vv)^2 f\right)^4$$
$$- \frac{3n-10}{n-2}(fv)^4(vv)^2 + 4[(fv)^3(vv)^2]^1 = 0.$$

In allen diesen Syzyganten ist die Ordnung jeder der Formen f, φ, ψ und χ mindestens gleich dem Gewichte der Syzygante, (wenn nicht eine Ausnahme ausdrücklich bemerkt ist), ferner sind *quadratische* Formen durch $q, q' \ldots$ und Formen *vierter* Ordnung durch $v, v' \ldots$ bezeichnet.

Um nun eine elementare Syzygante auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die darin vorkommenden 4 Formen als *Potenzen linearer Formen* an, setzt also

$$f = (x-a)^{n_1}, \quad \varphi = (x-b)^{n_2}, \quad \psi = (x-c)^{n_3}, \quad \chi = (x-d)^{n_4},$$

bildet daraus alle Ueberschiebungen und nimmt den ersten Coefficienten jeder derselben. Dann ist leicht einzusehen, dass man einfach folgende Substitutionen vornehmen kann:

$$\begin{array}{llll} (f\varphi)^\lambda & \text{ersetzt man durch} & & (a-b)^\lambda, \\ (f\psi)^\mu & \text{„} \quad \text{„} & \text{„} & (a-c)^\mu, \\ \left((fq)^2 \varphi\right)^2 & \text{„} \quad \text{„} & \text{„} & (a-c)^2(a-b)^2, \\ \left((fv)^4 \varphi\right)^1 & \text{„} \quad \text{„} & \text{„} & (a-c)^4(a-b), \end{array}$$

etc. etc.

Alsdann geht beispielsweise die Syzygante $[f\varphi q q']_4$ über in

$$F(a,b,c,d) = 2(a-b)^2(c-d)^2 - 2(a-b)^3(c-d) + (a-b)^4$$
$$- (a-c)^2(b-d)^2 - (a-d)^2(b-c)^2 - 2(b-d)^2(b-a)^2$$
$$- 2(a-c)^2(a-b)^2 + (b-c)^2(b-d)^2$$
$$+ (a-c)^2(a-d)^2 = 0.$$

Da nun die Function F der partiellen Differenzialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$$

Genüge leistet, so kann sie auch als Function von nur 3 Veränderlichen dargestellt werden. In der That, setzt man

$$a - b = -b', \quad a - c = -c', \quad a - d = -d',$$

dann wird

$$b - c = b' - c', \quad b - d = b' - d', \quad c - d = c' - d'$$

und die neue Function — in b, c, d geschrieben — wird folglich einfach dadurch erhalten, dass man $a = 0$ setzt:

$$2b^2(c-d)^2 + 2b^3(c-d) + b^4 - c^2(b-d)^2 - d^2(b-c)^2 - 2b^2(b-d)^2$$
$$- 2b^2c^2 + (b-c)^2(b-d)^2 + c^2d^2 \equiv 0.$$

Der Nachweis, dass diese Function identisch verschwindet, bietet dann keine Schwierigkeit mehr. Jede der angegebenen Syzyganten kann demnach leicht in eine solche identisch verschwindende Function dreier Variabeln übergeführt werden. Auch lässt sich aus jeder solchen Function durch Umkehrung des Verfahrens die entsprechende Syzygante herstellen, woraus hervorgeht, dass das identische Verschwinden der Function auch die *hinreichende* Bedingung für die Richtigkeit der Syzygante ist.

Auch soll darauf hingewiesen werden, dass diese Uebertragungsmethode es möglich macht, elementare Syzyganten aufzufinden. Man bildet eine lineare Function aller zerfallenden Formen mit unbestimmten Coefficienten und überträgt diese auf die angegebene Art in eine Function dreier Veränderlicher. Aus dem identischen Verschwinden der letzteren können dann die Werthe der vorerst unbestimmten Coefficienten gefunden werden. Diese Methode hat den Vorzug, dass sie nur elementare Rechnung erfordert.

Als Ergänzung zu Satz (1) soll auf diesem Wege der Nachweis erbracht werden, dass von den Syzyganten $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$, wenn i die Summe zweier Ordnungszahlen z. B. $n_3 + n_4$ überschreitet, nur eine einzige existirt. Ist also $i = n_3 + n_4 + 1$, dann giebt es blos die folgenden zerfallenden Formen:

$$(f\varphi)^{n_3+1+\lambda}(\psi\chi)^{n_4-\lambda}, \quad \psi\left((f\chi)^{n_4-\lambda}\varphi\right)^{n_3+1+\lambda}, \quad \chi\left((f\psi)^{n_3-\mu}\varphi\right)^{n_4+1+\mu},$$
$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots n_4,$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots n_3.$$

Die zugehörigen Functionen dreier Veränderlicher sind nun

$$(-b)^{n_3+1+\lambda}(c-d)^{n_4-\lambda}, \quad (-1)^i d^{n_4-\lambda} b^{n_3+1+\lambda}, \quad (-1)^i c^{n_3-\mu} b^{n_4+1+\mu}.$$

Zwischen denselben giebt es jedoch nur die eine lineare Relation

$$(-b)^{i-1}(c-d) + (-1)^i c b^{i-1} - (-1)^i d b^{i-1} = 0,$$

welche der bekannten Syzygante $(k\psi\chi) = 0$ entspricht, sofern für k die Ueberschiebung $(f\varphi)^{i-1}$ substituirt wird. Zu dem gleichen Resultate gelangt man auch, wenn i noch grössere Werthe als $n_3 + n_4 + 1$ annimmt.

Ausser den angegebenen 12 elementaren Syzyganten wird nun auch noch die Relation (5) pag. 204 der Binären Formen von Clebsch einmal benützt werden. Die Gesammtzahl der elementaren Syzyganten

ist demnach gleich 13. Indessen muss hiezu bemerkt werden, dass von denselben noch zwei entbehrt werden könnten. Die Syzyganten vom Gewichte 2 lassen sich nämlich beide durch solche vom Gewichte 1 ersetzen, wie man erkennt, wenn man in der Relation $(f\varphi\chi) = 0$ statt f die Ueberschiebung $(f\psi)$ substituirt:

$$2\big((f\psi)\,\varphi\chi\big) \equiv [f\varphi\psi\chi]_2.$$

Auch ist $\{f\varphi\psi\chi\}_2 = 0$, wie in § 1 schon bemerkt wurde, nur eine Folge der Syzygante $[f\varphi\psi\chi]_2 = 0$. Daher sind blos 11 von einander unabhängige Syzyganten in Rechnung zu ziehen.

§ 4.

Reduction einiger Ueberschiebungen auf die Grundformen der binären Form sechster Ordnung.

Die Grundformen, welche bei Aufstellung der fundamentalen Syzyganten (Math. Annalen Band 34, pag. 306) benützt wurden, sollen im Folgenden beibehalten werden; jedoch wird es sich hier vortheilhaft erweisen, wenn ein und dieselbe Grundform auf mehrere verschiedene Arten als Ueberschiebung dargestellt werden kann. In folgender Tabelle ist dieser Punkt entsprechend berücksichtigt worden.

Grad 1: f;

„ 2: $H = (ff)^2$; $i = (ff)^4$; $A = (ff)^6$;

„ 3: $T = (fH)$; $q = (fi)$; $p = (fi)^2$; $l = (fi)^4$;

„ 4: $r = (Hi) = (pf)$; $s = (Hi)^3 = -\frac{1}{2}(fl)$;

$\Delta = (ii)^2 = \frac{1}{2}(fl)^2 - \frac{1}{6}Ai$; $B = (ii)^4$;

„ 5: $t = (Hl) = 2(pi) - \frac{1}{3}Aq = 2(\Delta f) - \frac{1}{3}Aq$;

$u = (il)$; $m = (il)^2$;

„ 6: $w = (pl)$; $v = (i\Delta) = \frac{1}{2}(mf) - 2w$;

$C = (i\Delta)^4 = \frac{1}{2}(ll)^2 - \frac{1}{6}AB$;

„ 7: $\pi = (im) = (l\Delta)$; $n = (im)^2 = (\Delta l)^2 + \frac{1}{3}Bl$;

„ 8: $\nu = (lm)$;

„ 9: $\varrho = (in) = (m\Delta)$;

„ 10: $\mu = (nl)$; $D = (mm)^2 = (nl)^2$;

„ 12: $\lambda = (mn)$;

„ 15: $R = (l\lambda)^2 = (m\mu)^2 = (n\nu)^2$.

Ausser den a. a. O. schon gebrauchten Ueberschiebungen werden nunmehr noch die folgenden nothwendig werden.

1. Ueberschiebungen über f.

Aus der Relation

$$(fl)^2 = 2\Delta + \frac{1}{3} Ai$$

entspringen die folgenden zusammengesetzten Ueberschiebungen:

$$(fl^2)^3 = -2\pi + \frac{1}{3} Au,$$

$$(fl^2)^4 = 2n - \frac{2}{3} Bl + \frac{1}{3} Am,$$

$$\left((fl)^2 f\right)^2 = il - \frac{1}{3} fB + \frac{1}{3} Ap,$$

$$\left((fl)^2 i\right)^2 = \frac{1}{3} A\Delta + \frac{1}{3} Bi,$$

$$\left((fl)^2 \Delta\right)^2 = \frac{2}{3} Ci - \frac{1}{3} B\Delta + \frac{1}{18} ABi.$$

Durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & l \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} i & l & f \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} l & m & f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f & i & n \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_3$$

erhält man ferner

$$(fs) = \frac{1}{4} Hl - \frac{1}{6} f\Delta - \frac{1}{36} fiA,$$

$$(fu) = i\Delta - \frac{1}{2} pl - \frac{1}{4} fm + \frac{1}{6} Ai^2,$$

$$(fv)^2 = 2\varrho + \frac{1}{3} Bu - \frac{2}{3} A\pi,$$

$$(f\varrho)^2 = -\frac{1}{6} Bv - \frac{1}{4} l\pi - \frac{1}{4} mu.$$

2. Ueberschiebungen über H und i.

Da der Werth von $(HH)^2$ aus Früherem schon bekannt ist, so ist nur

$$(HH)^4 = \frac{2}{21} fl + \frac{25}{294} i^2 - \frac{1}{15} AH$$

und

$$(HH)^6 = \frac{1}{42} Ai + \frac{10}{49} \Delta$$

zuzufügen, wie aus den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & H \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}_6 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f & f & H \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8$$

abgeleitet werden kann.

Aus

$$\begin{pmatrix} f & f & p \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgen die Ueberschiebungen:

$$(Hp)^2 = -\tfrac{1}{10} Hl - \tfrac{5}{42} ip + \tfrac{1}{18} fiA,$$

$$(H\Delta) = is + \tfrac{1}{6} fu \quad \text{(reducirt mittelst der Syzygante } (fil) = 0),$$

$$(H\Delta)^2 = \tfrac{3}{14} i\Delta - \tfrac{1}{6} pl + \tfrac{1}{18} Ai^2,$$

$$(H\Delta)^3 = \tfrac{1}{7} v + \tfrac{1}{2} w;$$

$$(H\Delta)^4 = \tfrac{1}{4} l^2 - \tfrac{1}{30} A\Delta - \tfrac{5}{42} Bi.$$

Endlich erhält man noch die Functionaldeterminanten

$$(Hm) = ls + \tfrac{1}{6} At + q \cdot \left(\tfrac{A^2}{18} - \tfrac{B}{3}\right),$$

$$(Hn) = ms + lw + \tfrac{1}{3} lv + \tfrac{1}{6} i\pi$$

durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & m \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f & f & n \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

unter gleichzeitiger Benützung der Syzyganten vom Grade 9 und der Ordnung 8.

Von den Ueberschiebungen über i sind anzuführen:

$$\begin{array}{lll}
(pi) = \tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{6} Aq & \text{aus} & \begin{pmatrix} i & f & i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
(pi)^2 = \tfrac{1}{6} fB - \tfrac{1}{10} il & \text{„} & \begin{pmatrix} i & f & i \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
(pi)^3 = -\tfrac{1}{5} u & \text{„} & \begin{pmatrix} i & f & i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
(pi)^4 = \tfrac{2}{5} m & \text{„} & \begin{pmatrix} i & f & i \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
(i\pi)^2 = -\tfrac{1}{2} \varrho & \text{„} & \begin{pmatrix} i & m & i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
(i\nu)^2 = \mu & \text{„} & \begin{pmatrix} l & m & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3, \\
(i\mu)^2 = \lambda + \tfrac{1}{2} B\nu & \text{„} & \begin{pmatrix} n & l & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3, \\
(is)^2 = -\tfrac{1}{3} v - \tfrac{1}{2} w & \text{„} & \begin{pmatrix} f & l & i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

3. Ueberschiebungen über p, l, m und n.

Durch die Substitutionen

$$\binom{f\;i\;p}{3\;2\;1}_4,\quad \binom{f\;i\;l}{0\;2\;2},\quad \binom{f\;\Delta\;i}{1\;2\;2}_3,\quad \binom{f\;i\;m}{2\;1\;1}_3,\quad \binom{i\;f\;m}{0\;2\;2}\quad \text{und}\quad \binom{i\;f\;n}{0\;2\;2}$$

ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(pp)^2 = \tfrac{1}{6} fm - \tfrac{1}{6} i\Delta - \tfrac{1}{5} lp,$$

$$(pl)^2 = \tfrac{1}{3} A\Delta + \tfrac{1}{3} Bi - \tfrac{1}{10} l^2,$$

$$(p\Delta) = -\tfrac{1}{6} Bq - \tfrac{1}{6} iu,$$

$$(pm) = \tfrac{2}{3} Bs - \tfrac{1}{3} Av + \tfrac{1}{6} lu,$$

$$(pm)^2 = \tfrac{1}{3} B\Delta - \tfrac{1}{3} Ci + \tfrac{2}{5} lm;$$

$$(pn)^2 = \tfrac{1}{2} m^2 + \tfrac{2}{5} ln - \tfrac{1}{3} C\Delta - \tfrac{1}{6} B^2 i - \tfrac{2}{9} ACi.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für $(pm)^2$ kann ferner durch die Substitution $\binom{i\;m\;p}{1\;1\;2}_3$ die Reductionsformel

$$(pn) = \tfrac{1}{3} Bv + \tfrac{2}{3} Bw - \tfrac{1}{3} um$$

erhalten werden.

Ferner reducirt man die Ueberschiebungen über l mittelst der Substitutionen

$$\binom{i\;l\;\Delta}{0\;1\;2},\ \binom{i\;l\;l}{0\;2\;1},\ \binom{p\;l\;l}{0\;2\;1},\ \binom{H\;l\;l}{0\;2\;1},\ \binom{\Delta\;l\;l}{0\;2\;1},\ \binom{f\;l\;l}{0\;2\;1},\ \binom{i\;n\;l}{0\;2\;1},$$

nämlich

$$(lv)^2 = \varrho - \tfrac{1}{6} Bu;\quad (lu)^2 = -\tfrac{v}{2};\quad (lw)^2 = \tfrac{1}{6} Bu - \tfrac{1}{6} A\pi;$$

$$(lt)^2 = \tfrac{1}{4} Aw + \tfrac{1}{2} Bs + \tfrac{5}{14} lu;\quad (l\pi)^2 = -\tfrac{1}{2} u;$$

$$(ls)^2 = \tfrac{2}{3} \pi - \tfrac{1}{9} Au;\quad (l\varrho)^2 = \lambda + \tfrac{1}{4} Bv.$$

Bezüglich der Invarianten, welche durch zweite Ueberschiebung von l, m und n gebildet werden können, sei auf Clebsch's binäre Formen verwiesen.

Von den Ueberschiebungen über m kommen vor:

$$(m\pi)^2 = -\tfrac{1}{2}\lambda;\quad (ms)^2 = -\tfrac{1}{3}\varrho - \tfrac{1}{6} Bu + \tfrac{1}{3} A\pi;$$

$$(m\Delta)^2 = \tfrac{1}{6} Bm + \tfrac{1}{3} Cl;\quad (mu)^2 = \mu,$$

die aus

$$\begin{pmatrix}\Delta & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}f & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i & i & m\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \begin{pmatrix}i & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

erhalten werden.

Endlich sind noch zu erwähnen:

$$(n\Delta) = \frac{1}{2} B\pi + \frac{1}{3} Cu \quad \text{aus} \quad \begin{pmatrix}i & i & n\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$(nu)^2 = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} Bv \quad \text{,,} \quad \begin{pmatrix}i & l & n\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

§ 5.

Entwicklung der Grundsyzyganten für die binäre Form sechster Ordnung.

Der Weg, der zur Aufstellung aller Grundsyzyganten führt, ist nun folgender. Man bildet alle Producte der Grundformen zu zweien wie z. B. fr, T^2, $H\Delta$, HB etc. etc. und zerlegt sodann jedes Product mit Hilfe der Tabelle des § 4 in Ueberschiebungen, so dass sich ergiebt

$$r = f\cdot(Hi);\quad T^2 = (fH)(fH);\quad H\Delta = (ff)^2(ii)^2;\quad HB = (ff)^2(ii)^4$$
etc. etc.

Zu jeder derartigen Zerlegung von der Art $(f\varphi)^\lambda(\psi\chi)^\mu$ können nun nach § 1 die zugehörigen *elementaren* Syzyganten entwickelt werden, welche dieses Product enthalten, wobei auch der Fall eintreten kann, dass solche Syzyganten überhaupt nicht existiren (Satz (1)). Man erhält so zu dem Producte

$f\cdot r$ die Syzygante $(fHi) = 0$,

T^2 ,, ,, $[ffHH]_2 = 0$ oder $(fHT) = 0$,

$H\Delta$,, ,, $[ffii]_4 = 0$,

HB ,, ,, $[ffii]_6 = 0$ etc. etc.

In folgender Tabelle sind nun sämmtliche Grundsyzyganten in dieser Weise symbolisch dargestellt und bis zum Grade 9 auch ausgewerthet. Von da ab ist nur derjenige Theil der Syzygante beigesetzt worden, aus welchem die *Irreducibilität* derselben ersichtlich ist, doch bietet die vollständige Ausrechnung keinerlei Schwierigkeiten, vielmehr lässt sich in vielen Fällen das Resultat unmittelbar hinschreiben.

Grad 5.

Ordnung.

16. $(fHi) = fr - Hq + iT = 0.$

Grad 6.

24. $[ffHH]_2 = 2T^2 + H^3 - \frac{1}{2} f^2Hi - \frac{1}{3} f^3p + \frac{1}{18} f^4A = 0;$

20. $[ffHi]_2 = 2Tq + H^2i - fHp - \frac{1}{3} f^2i^2 + \frac{1}{6} f^3l = 0;$

Ordnung.

18. $(fHp) = Hr + pT + \frac{1}{6} fiq - \frac{1}{3} f^2 s = 0;$

16. $[ffii]_2 = 2q^2 + Hi^2 - 2fip + f^2 \Delta = 0;$

14. $(fHl) = Tl + 2Hs + ft = 0;$

14. $(fip) = qp + ir - \frac{1}{2} ft - \frac{1}{6} fAq = 0;$

12. $[ffii]_4 = 6H\Delta - 6p^2 + i^3 - 2fil + f^2 B = 0;$

10. $(fil) = ql + 2is + fu = 0;$

8. $[ffii]_6 = HB + fm - 2lp - i\Delta - \frac{1}{3} Ai^2 = 0.$

Grad 7.

22. $$[fHHi]_2 = 2Tr - H^2 p + \frac{1}{6} fHi^2 + \frac{1}{6} f^2 Hl + \frac{1}{3} f^2 ip - \frac{1}{18} f^3 iA = 0;$$

18. $$[flHf]_2 = 4Ts - H^2 l + 2fH\Delta + \frac{1}{3} fHiA - \frac{1}{3} f^2 Ap - \frac{1}{2} f^2 il + \frac{1}{3} f^3 B = 0;$$

18. $[fHii]_2 = 2qr - Hip + fH\Delta + \frac{1}{3} fi^3 - \frac{1}{6} f^2 il = 0;$

16. $(fH\Delta) = T\Delta + \frac{1}{2} Ht + \frac{1}{6} HAq + fis + \frac{1}{6} f^2 u = 0;$

16. $(Hip) = pr - \frac{1}{2} Ht - \frac{1}{6} HAq + \frac{1}{6} i^2 q - \frac{1}{3} fis = 0;$

14. $[Hiif]_4 = 4qs - Hil + fHB + fi\Delta - flp = 0;$

12. $\{fHii\}_5 = TB + lr + 2ps + \frac{1}{2} it - \frac{1}{6} Aiq = 0;$

12. $(fi\Delta) = q\Delta + \frac{1}{2} it + fv + \frac{1}{6} Aiq = 0;$

12. $(fpl) = fw + 2sp - lr = 0;$

12. $(Hil) = lr - it + Hu = 0;$

10. $$[ffil]_4 = 6Hm - 12p\Delta - 4Aip - 4i^2 l - fl^2 + 2fA\Delta + 4fiB = 0;$$

6. $[fiii]_6 = Bp + fC - \frac{1}{2} im - 2l\Delta = 0.$

Grad 8.

20. $$[HHii]_2 = 2r^2 + H^2\Delta + \frac{1}{6} Hi^3 - \frac{1}{3} fHil - \frac{1}{3} fi^2 p + \frac{1}{18} f^2 i^2 A = 0;$$

Ordnung.

20. $\{fHpi\}_2 = \frac{1}{2} Tt + r^2 + \frac{1}{6} AqT + \frac{1}{3} fqs - \frac{1}{6} iq^2 = 0;$

16. $[fHil]_2 = 2qt - 2Hi\Delta - \frac{1}{3} Hi^2A + fHm + \frac{1}{3} fi^2 l$
$- \frac{1}{6} f^2 l^2 = 0;$

16. $[plff]_2 = 4rs + Hpl - fHm + \frac{1}{3} fiAp + \frac{1}{2} fi^2 l$
$- \frac{1}{3} f^2 iB = 0;$

16. $\{fHil\}_2 = Tu - qt - 2rs = 0;$

14. $(Hi\Delta) = r\Delta + Hv - \frac{1}{6} fiu - i^2 s = 0;$

14. $(fp\Delta) = \frac{1}{2} pt - r\Delta + \frac{1}{6} Apq - \frac{1}{6} fBq - \frac{1}{6} fiu = 0;$

14. $(Hpl) = Hw - pt + \frac{1}{3} fls - \frac{1}{6} iql = 0;$

14. $(fHm) = Tm + 2Hv + 2Hw + fls + \frac{1}{6} fAt$
$+ fq\left(\frac{A^2}{18} - \frac{B}{3}\right) = 0;$

12. $[fiil]_2 = 2qu - 2i^2\Delta + ilp - fl\Delta + fim - \frac{1}{3} Ai^3 = 0;$

12. $[ffll]_2 = 8s^2 + Hl^2 + 2fBp - fim - \frac{2}{3} fAil + \frac{1}{3} f^2 AB = 0;$

10. $(fim) = qm + 2iv + 2iw + f\pi = 0;$

10. $(ilp) = \frac{1}{2} lt - iw + pu + \frac{1}{6} Alq = 0;$

10. $\{pfii\}_5 + \frac{1}{10}(fim) - \frac{2}{5}(ilp) + \frac{3}{5}(f\Delta l) = Br - lt + \frac{1}{2} qm$
$- \frac{1}{2} f\pi - \frac{1}{3} Alq = 0;$

10. $(f\Delta l) = 2s\Delta - f\pi - \frac{1}{2} lt - \frac{1}{6} Alq = 0;$

8. $\frac{1}{2}[ffll]_4 - \frac{1}{3} A[ffii]_6 = 2CH - 4\Delta^2 + 2fn + Ai\Delta$
$+ \frac{3}{2} il^2 = 0;$

8. $[fiil]_4 = 3fn + 3pm - 6\Delta^2 - flB - 2Ai\Delta - Bi^2 = 0.$

Grad 9.

18. $[fiH\Delta]_2 = 2Tv + Hp\Delta - \frac{1}{2} Hi^2 l + \frac{1}{3} fi^2\Delta - \frac{1}{6} fipl$
$+ \frac{1}{6} fiHB - \frac{1}{18} fAi^3 - \frac{1}{6} f^2 l\Delta = 0;$

Ordnung.

18. $\{fHpl\}_2 = Tw + rt + \frac{1}{3} iqs - \frac{2}{3} fs^2 = 0;$

18. $\{f\Delta iH\}_2 = \frac{1}{2} rt - Tv + iqs + \frac{1}{6} fqu + \frac{1}{6} Aqr = 0;$

14. $[fii\Delta]_2 = 2qv + ip\Delta - f\Delta^2 - \frac{1}{2} i^3 l + \frac{1}{3} fi^2 B = 0;$

14. $[fpil]_2 = 2qw - 2ip\Delta + \frac{1}{6} i^3 l - \frac{1}{3} Ai^2 p + fpm + \frac{1}{6} fil^2 - \frac{1}{6} f^2 lB = 0;$

14. $[Hiil]_2 = 2ru + Him - Hl\Delta - \frac{1}{3} Ai^2 p - \frac{5}{6} i^3 l + \frac{1}{6} fil^2 + \frac{1}{3} fi^2 B = 0;$

14. $\{flip\}_2 = st + ru + qw + \frac{1}{3} Aqs = 0;$

12. $\{fHi\Delta\}_5 = TC + \frac{1}{2} rm + \frac{1}{2} \Delta t + ils + \frac{1}{6} iqB - \frac{1}{3} fBs - \frac{1}{4} ql^2 = 0;$

12. $(pi\Delta) = pv + \frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{6} iqB + \frac{1}{6} i^2 u + \frac{1}{6} Aq\Delta = 0;$

12. $(fpm) = 2pw + 2pv - mr + \frac{2}{3} fBs - \frac{1}{3} fAv + \frac{1}{6} flu = 0;$

12. $(Him) = rm + H\pi - ils - \frac{1}{6} iAt + \frac{1}{3} iqB - \frac{1}{18} A^2 iq = 0;$

12. $(Hl\Delta) = \Delta t + H\pi - \frac{1}{6} flu - ils = 0;$

10. $[flli]_2 = 4su + 2il\Delta - pl^2 + flm - 2fiC - \frac{1}{3} fiAB + \frac{1}{3} Ai^2 l = 0;$

10. $[ff\Delta l]_4 + l[ffii]_6 - \frac{1}{2} [flli]_2 = 3Hn - 7il\Delta - \frac{3}{2} pl^2 - Ap\Delta + fB\Delta + 2fiC + flm + \frac{1}{3} fABi - Ai^2 l = 0;$

8. $[fill]_3 = 4qC + 4sm + 4lv + 2lw + \frac{2}{3} Aiu + \frac{2}{3} ABq = 0$

8. $(fml) = 2sm - 2lw - 2lv - fv = 0;$

8. $(il\Delta) = \Delta u - lv + i\pi = 0;$

8. $[fii\Delta]_5 - \frac{2}{3}(il\Delta) = \frac{1}{2} Bt + qC + 2lv - \frac{1}{2} i\pi + \frac{1}{6} ABq = 0;$

6. $\frac{1}{4}[fill]_4 - \frac{1}{6} A[fiii]_6 = pC - \Delta m + \frac{1}{2} in - \frac{1}{2} Bil + \frac{1}{6} fB^2 = 0.$

Ordnung. Grad 10.

16. $\{fHl\Delta\}_2 \equiv T\pi;\quad [Hii\Delta]_2 \equiv 2rv;$

$\{fiHm\}_2 \equiv 2rw + 2rv - T\pi;\quad [ff\Delta\Delta]_2 \equiv \frac{1}{2}\,t^2;$

14. $(fHn) \equiv Tn;$

12. $[fli\Delta]_2 \equiv 2q\pi;\quad [f\Delta li]_2 \equiv 4sv;\quad [fllp]_2 \equiv 4sw;$

$2\{fi\Delta l\}_2 = tu - 4sv - 2q\pi + \frac{1}{3}\,Aqu = 0;$

10. $(fin) \equiv qn + f\varrho;\quad (imp) \equiv p\pi + \frac{1}{2}\,tm;$

$(l\Delta p) \equiv w\Delta + p\pi;\quad (f\Delta m) \equiv 2v\Delta + 2w\Delta - \frac{1}{2}\,tm - f\varrho;$

$(Hlm) \equiv tm + Hv;$

$[Hii\Delta]_5 = Cr - w\Delta + \frac{1}{6}\,Aiv - \frac{2}{3}\,Bis - \frac{1}{6}\,fuB + \frac{1}{12}ilu = 0;$

8. $[iill]_2 \equiv 2u^2;$

$2[ifim]_4 - [iill]_2 - \frac{1}{2}\,B[ffii]_6 - l[fiii]_6 = 6pn - 2u^2$

$- HB^2 - 2A\Delta^2 - 3iB\Delta = 0;$

6. $(ilm) = um - l\pi + iv = 0;$

$[siii]_6$*) $= Cs - \frac{1}{2}\,Bw - \frac{1}{4}\,iv - \frac{1}{2}\,l\pi = 0;$

4. $[iill]_4 \equiv 4C\Delta - 4ln - 2m^2.$

Grad 11.

14. $\{fHlm\}_2 \equiv Tv - 2tv - 2tw;$

$\{Hil\Delta\}_2 = r\pi - tv + uis + \frac{1}{6}\,fu^2 = 0;$

$\{lpf\Delta\}_2 \equiv \frac{1}{2}\,wt + r\pi;\quad [\Delta if\Delta]_2 \equiv tv;$

12. $(Hm\Delta) \equiv H\varrho;\quad (Hin) \equiv nr + H\varrho;$

10. $\{film\}_2 = qv + 2s\pi - 2uv - 2uw = 0;$

$[film]_2 \equiv -4s\pi;\quad [iil\Delta]_2 \equiv 2uv;\quad [ipll]_2 \equiv 2uw;$

8. $[film]_3 \equiv 4\Delta\pi + 4mv + 4mw;$

$[fiml]_3 \equiv 4sn + 4mv + 2mw;\quad [f\Delta i\Delta]_5 \equiv tC + mv + \Delta\pi;$

$(im\Delta) = i\varrho + \Delta\pi - mv = 0;\quad (fnl) \equiv f\mu + 2ns;$

$(plm) \equiv pv + mw;$

6. $[f\Delta ll]_4 \equiv 2\Delta n - fD;$

*) Auch aus $([fiii]_6\, l)^1 + \frac{1}{3}\,(ilm)$ zu erhalten.

Ordnung. Grad 12.

16. $\{fHin\}_2 \equiv T\varrho;$

12. $\{Hlim\}_2 \equiv t\pi - rv;\quad \{pflm\}_2 \equiv rv + 2vw + 2w^2;$

$\{fim\Delta\}_2 \equiv q\varrho + 2v^2 + 2vw - \frac{1}{2}t\pi;$

$\{pli\Delta\}_2 \equiv wv - \frac{1}{2}t\pi;\quad [ffmm]_2 \equiv 8(v+w)^2;$

$[ii\Delta\Delta]_2 \equiv 2v^2;$

10. $(fn\Delta) \equiv \frac{1}{2}tn;\quad (pin) \equiv p\varrho + \frac{1}{2}tn;$

$(Hnl) \equiv H\mu - tn;$

8. $[iilm]_2 \equiv 2u\pi;\quad [fllm]_2 \equiv -4sv;\quad [ffmm]_4 \equiv 2HD;$ *)

6. $(m\Delta l) = \Delta v + l\varrho - m\pi = 0;\quad (iln) = un - \varrho l - i\mu = 0;$

$[i\Delta ll]_3 \equiv 4Cv - 2un - 2l\varrho - 2m\pi;$

$\{lflm\}_3 \equiv -4Cw - 4Cv + 2l\varrho - 2\Delta v;$

4. $[iilm]_4 = -4mn + 2iD + 2\Delta(lm)^2 - \frac{2}{3}Cl^2 = 0.$

Grad 13.

14. $\{fHnl\}_2 \equiv T\mu;\quad \{Him\Delta\}_2 \equiv r\varrho;$

12. $[fHnl]_3 \equiv 2DT;$

10. $\{finl\}_2 \equiv q\mu - 2\varrho s;$

$\{flm\Delta\}_2 = -2\varrho s + 2v\pi + 2w\pi - \frac{1}{2}vt - \frac{1}{6}Aqv = 0;$

$\{pilm\}_2 \equiv \frac{1}{2}tv - w\pi;\quad [ii\Delta m]_2 \equiv 2v\pi;$

$[fimm]_2 \equiv -4v\pi - 4w\pi;$

---

*) Addirt man zu dieser Syzygante

$$\frac{2}{3}i[iill]_4 - \frac{8}{9}A[ifim]_4 + \frac{2}{3}B[fiil]_4 - \frac{2}{9}AB[ffii]_6 - \left(\frac{2}{3}m + \frac{4}{9}Al\right)[fiii]_6,$$

so nimmt sie die Form an

$$2DH + \frac{8}{3}fBn - \frac{8}{3}Apn - \frac{8}{3}iln + \frac{4}{3}i\Delta\left(2C + \frac{1}{3}AB\right) + \frac{2}{3}\Delta^2(A^2 - 6B) + \frac{2}{3}l\Delta(Al - 4m) - \frac{1}{2}l^4 = 0.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich in 2 Coefficienten von demjenigen, den Herr v. Gall a. a. O. pag. 70 angegeben hat.

Ordnung.

8. $[fimm]_3 \equiv 2qD + 4vn + 4wn;\quad (pnl) \equiv p\mu - nw;$

$(i\Delta n) \equiv nv - \Delta\varrho;\quad (fnm) \equiv 2wn + 2vn - f\lambda;$

$[finl]_3 \equiv 2qD + 4nv + 2nw;$

6. $[illm]_2 \equiv 2uv;$

$$[fimm]_4{}^{*)} = 2pD - 2lm^2 - nl^2 + f(nm)^2 - \frac{1}{3}Bin + Cim + \frac{4}{9}ACil + \frac{1}{3}iB^2l - \frac{2}{3}An\Delta - \frac{4}{3}Bm\Delta = 0;$$

4. $\{liml\}_3 = mv - l\mu - \left(2C + \frac{1}{3}AB\right)\pi + (lm)^2 u = 0.$

Grad 14.

12. $\{Hinl\}_2 \equiv r\mu + \varrho t;\quad \{Hlm\Delta\}_2 \equiv t\varrho;$

10. $[Himm]_3 \equiv 2Dr;\quad (Hmn) \equiv H\lambda;$

8. $[flln]_2 \equiv 4s\mu;\quad \{ilm\Delta\}_2 = u\varrho - \pi^2 + vv = 0;$

$[il\Delta m]_2 \equiv 2vv;\quad [pllm]_2 \equiv 2wv;\quad [iimm]_2 \equiv 2\pi^2;$

6. $\{mfml\}_3 \equiv -2sD - 2\varrho m;\quad (\Delta nl) \equiv n\pi + \Delta\mu;$

$(min) = m\varrho - i\lambda - n\pi = 0;\quad \{lfln\}_3 \equiv 2\Delta\mu + 2Ds;$

4. $[iimm]_4 \equiv -2n^2 + 2\Delta D.$

Grad 15.

14. $\{fHmn\}_2 \equiv T\lambda;$

10. $\{fimn\}_2 \equiv q\lambda + 2\varrho v + 2\varrho w;\quad \{pinl\}_2 \equiv \frac{1}{2}t\mu + \varrho w;$

$\{plm\Delta\}_2 \equiv \varrho w;\quad [ii\Delta n]_2 \equiv 2v\varrho;$

8. $\{mHml\}_3 \equiv Dt;\quad (pmn) \equiv p\lambda;$

6. $[ilmm]_2 \equiv 2\pi v;\quad [inll]_2 \equiv 2u\mu;$

4. $\{liln\}_3 = m\mu + (ll)^2\varrho - Du - l\lambda - \frac{1}{2}Blv = 0;$

$(nlm) = nv + l\lambda + m\mu = 0;$

$\{miml\}_3 = Du + nv - m\mu - (lm)^2\pi = 0.$

---

*) Der letzte Coefficient dieser Syzygante, wie sie von Herrn v. Gall pag. 71 angegeben ist, muss darnach in 4 abgeändert werden.

Grad 16.

12. $\{Himn\}_2 \equiv r\lambda;$

8. $\{flnm\}_2 \equiv 2s\lambda + 2v\mu + 2w\mu; \quad \{i\Delta nl\}_2 \equiv v\mu + \varrho\pi;$

$[pnll]_2 \equiv 2w\mu; \quad [iimm]_2 \equiv 2\varrho\pi;$

6. $(nm\Delta) \equiv n\varrho - \Delta\lambda; \quad \{mpml\}_3 \equiv Dw;$

$[i\Delta mm]_3 \equiv 2Dv - 2n\varrho; \quad \{flmn\}_3 \equiv fR - 2\Delta\lambda;$

4. $[llmm]_2 \equiv 2v^2;$

Grad 17.

10. $\{pimn\}_2 \equiv \frac{1}{2} t\lambda;$

8. $\{Hlmn\}_3 \equiv HR;$

6. $\{ilmn\}_2 = u\lambda + \pi\mu + \varrho v = 0;$

$[ln\Delta l]_2 \equiv 2\pi\mu; \quad [limn]_2 \equiv 2\varrho v;$

4. $\{ilnm\}_3 \equiv m\lambda + n\mu - iR;$

$\{nilm\}_3 \equiv n\mu + \pi D;$

$\{linm\}_3 \equiv D\pi + m\lambda;$

Grad 18.

12. $[fHvn]_3$*) $\equiv 2TR;$

8. $[fivn]_3 = 2qR - \frac{1}{3}\mu(2Av - 8Bs - 5ln) + \frac{2}{3}\varrho$

$(6\varrho + Bu - 2A\pi) + \frac{1}{3}v(4Bv + 4Bw - 2um) = 0;$

$\{i\Delta mn\}_2 \equiv v\lambda - \varrho^2; \quad \{plmn\}_2 \equiv w\lambda;$

$[iinn]_2 \equiv 2\varrho^2;$

6. $\{plmn\}_3 \equiv pR;$

4. $[llmn]_2 \equiv 2v\mu;$

2. $\{llmn\}_3 \equiv lR - Dv - 2C\lambda;$

Grad 19.

10. $[Hivn]_3 \equiv 2rR;$

6. $\{slmn\}_3 \equiv sR - \frac{2}{3}\lambda\pi + \frac{1}{3}\varrho\mu; \quad \{l\Delta mn\}_2 \equiv \lambda\pi + \varrho\mu;$

$[innl]_2 \equiv 2\varrho\mu;$

4. $\{\Delta lmn\}_3 \equiv \Delta R - \lambda n; \quad \{niln\}_3 \equiv D\varrho - \lambda n;$

---

*) Die hierin auftretenden Ueberschiebungen über v sind mittelst der Beziehung $((lm)^1\varphi)^2 = ((\varphi m)^2 l)^1 - ((\varphi l)^2 m)^1$ leicht zu bestimmen. Dasselbe gilt von den Ueberschiebungen über λ und μ.

Grad 20.

8. $[\Delta f \nu n]_3 \equiv tR;$

4. $[nnll]_2 \equiv 2\mu^2; \quad [lmmn]_2 \equiv 2\nu\lambda;$

$\{ulmn\}_3 \equiv uR + \lambda v - \mu^2;$

2. $\{mlmn\}_3 \equiv mR - \mu D;$

Grad 21.

6. $[i\Delta \nu n]_3 \equiv 2vR - 2\varrho\lambda; \quad \{\nu pnl\}_3 \equiv Rw;$

$[imnn]_2 \equiv 2\varrho\lambda;$

Grad 22.

4. $\{\nu inm\}_3 \equiv R\pi + \lambda\mu; \quad [nmln]_2 \equiv 2\mu\lambda;$

2. $\{nlmn\}_3 \equiv nR - \lambda D;$

Grad 23.

2. $\{\nu lmn\}_3 \equiv \nu R;$

Grad 24.

4. $\{\varrho lmn\}_3 \equiv \varrho R - \lambda^2; \quad [mmnn]_2 \equiv 2\lambda^2;$

Grad 25.

2. $\{\mu lmn\}_3 \equiv \mu R;$

Grad 27.

2. $\{\lambda lmn\}_3 \equiv \lambda R;$

Grad 30.

0. $[lmn\ lmn]_6 \equiv 2R^2;$

Hierin bedeutet das zuletzt gebrauchte Symbol:

$$[qq_1fq_2q_3\varphi]_6 = 2\left((qq_1)^1 f\right)^2 \cdot \left((q_2q_3)^1\varphi\right)^2 - \begin{vmatrix} (q\,q_2)^2 & (q\,q_3)^2 & (q\,\varphi)^2 \\ (q_1q_2)^2 & (q_1q_3)^2 & (q_1\varphi)^2 \\ (fq_2)^2 & (fq_3)^2 & (f\varphi)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

§ 6.

Uebersicht über die Verwendbarkeit der elementaren Syzyganten.

Um nachzuweisen, wie ungleich die elementaren Syzyganten im vorstehenden Systeme Verwendung gefunden haben, dazu mögen folgende Angaben dienen. Es sind benützt worden:

$$
\begin{array}{llll}
49 & \text{Syzyganten} & (f\varphi\psi) & = 0, \\
53 & \quad ,, & [f\varphi\psi\chi]_2 & = 0, \\
37 & \quad ,, & \{f\varphi\psi\chi\}_2 & = 0, \\
13 & \quad ,, & [f\varphi\psi q]_3 & = 0, \\
28 & \quad ,, & \{f\varphi q q'\}_3 & = 0, \\
2 & \quad ,, & [f\varphi\psi\chi]_4 & = 0, \\
4 & \quad ,, & [f\varphi\psi q]_4 & = 0, \\
8 & \quad ,, & [f\varphi q q']_4 & = 0, \\
3 & \quad ,, & [f\varphi v v']_5 & = 0, \\
3 & \quad ,, & \{f\varphi v v'\}_5 & = 0, \\
1 & \text{Syzygante} & [f f v v]_6 & = 0, \\
2 & \text{Syzyganten} & [f v v v]_6 & = 0
\end{array}
$$

und

$$1 \text{ Syzygante } [q q_1 f q_2 q_3 \varphi]_6 = 0,$$

Da die 3 ersten Symbole sämmtlich durch $(f\varphi\psi) = 0$ ausgedrückt werden können, so folgt, dass im Ganzen 139 Grundsyzyganten allein durch das Symbol $(f\varphi\psi)$ darstellbar sind. Doch wird man die Symbole $[f\varphi\psi\chi]_2$ und $\{f\varphi\psi\chi\}_2$ aus dem Grunde beibehalten, weil die *Auswerthung* dieser Syzyganten wesentlich leichter ist, abgesehen davon, dass letztere Relation auch in der Regel auf *kürzere* Ausdrücke führt. So besitzen beispielsweise die Syzyganten vom Grade 13 und der Ordnung 14 $\{Him\Delta\}_2$ und $\{fHnl\}_2$ nur 7 und 8 Terme, während die entsprechenden $[Hmi\Delta]_2$ und $[fnHl]_2$ deren 12 und 17 enthalten. (Vgl. v. Gall a. a. O. pag. 73). Von den übrigen Symbolen könnten nur dann einige entbehrt werden, wenn man die Bedingung fallen lässt, dass jede Syzygante unabhängig von den übrigen erhalten werden soll.

§ 7.

Die Bedeutung der partiellen Differentialgleichung $\sum \frac{\partial C}{\partial a_i} = 0$ für die Invarianten und Covarianten einer binären Form.

Im Anschlusse an das in § 3 eingeschlagene Verfahren zur Prüfung der elementaren *Syzyganten* soll nun allgemein der Nachweis geführt werden, dass die in jenem Paragraphen angeführte Differentialgleichung auch schon zu den *Invarianten* und *Covarianten* einer binären Form in engster Beziehung steht. Indem man die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung sucht, gelangt man dann zu einer symbolischen Darstellung dieser Bildungen, aus der sich die von Clebsch benützte als specieller Fall ableiten lässt.

Sei C eine Covariante der Form f, die in den Coefficienten von f vom i^{ten} Grade sei, dann kann dieselbe durch Anwendung des Aronhold'schen Processes zunächst als simultane Covariante der i Potenzen $(\alpha_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$ $\lambda = 1, 2, \ldots i$ dargestellt werden, so dass die Coefficienten $\alpha_\lambda^r a_\lambda^{n-r}$ dieser symbolischen Potenzen *linear* in C auftreten. Die vier partiellen Differentialgleichungen (Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie pag. 125), denen C genügen muss, gehen nun, weil die Operationen

$$n \frac{\partial}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + (n-1) \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 + (n-2) \frac{\partial}{\partial \bar{a}_2} \bar{a}_2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \cdot \bar{a}_0 + \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{a}_2} \cdot \bar{a}_1 + \quad 3 \frac{\partial}{\partial \bar{a}_3} \cdot a_2 + \cdots \text{ etc.}$$

sobald C in die angegebene symbolische Gestalt gebracht ist, einfach durch

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\lambda} \alpha_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial a_\lambda} \alpha_\lambda, \text{ etc.}$$

ersetzt werden können, in die folgenden über:

$$(1) \qquad \begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial \alpha_\lambda} \alpha_\lambda - \sum x_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} = g \cdot C, \\
&\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial \alpha_\lambda} \cdot a_\lambda - \sum x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2} = 0, \\
&\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} \alpha_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1} = 0, \\
&\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} a_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} = g \cdot C.
\end{aligned}$$

Hierin erstrecken sich die an zweiter Stelle auftretenden Summen über alle etwa in C vorkommenden Reihen von Veränderlichen, während g das Gewicht des Leitgliedes der Covariante ist.

Es ist nun die Bemerkung von Wichtigkeit, *dass in den symbolischen Formen* $(\alpha_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$ *von* f *durchweg* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$ *gesetzt werden darf, ohne dass in der Covariante* C *beim Uebergange zum wirklichen Werthe irgend eine Vieldeutigkeit der zu ersetzenden Symbole eintreten kann.* Denn jeder Coefficient $\bar{a}_r$ von f ist durch das Symbol $\alpha^{n-r} a_\lambda^r$ genügend bestimmt, ausgenommen der erste Coefficient $\bar{a}_0$, der, weil a_λ^0 stets den Werth 1 besitzt, nur durch das eine Symbol α^n vertreten ist. Allein da die Covariante C in den Coefficienten $\bar{a}_r$ *homogen* ist, so hat $\bar{a}_0$ auf den Werth derselben nur insoferne

Einfluss, als durch Zufügung passender Potenzen von $\bar{a}_0$ die Homogenität der Covariante hergestellt wird. Sind daher die übrigen Coefficienten von f durch Symbole eindeutig bestimmt, dann ist die Covariante C ebenfalls eindeutig bestimmt, und es kann demnach überhaupt jedes Symbol für $\bar{a}_0$ entbehrt werden d. h. es ändert sich nichts, wenn auch $\alpha = 1$ angenommen wird.

Unter dieser Voraussetzung reduciren sich die obigen Differentialgleichungen auf die folgenden beiden:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} \quad -\sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1} = 0, \\ &\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} a_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} = g \,.\, C. \end{aligned}$$

Es ist nun die Annahme gestattet, dass in der Covariante C nur eine Reihe Veränderlicher vorkomme, und es zeigt sich dann, dass die Covariante schon durch ihren ersten Coefficienten C_0 vollständig bestimmt ist. Suchen wir nun die erhaltenen Differentialgleichungen auf den Coefficienten C_0 zu transformiren, so ergiebt sich einfach

$$(3)\qquad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} a_\lambda = g \cdot C_0 .$$

Die letztere Gleichung verlangt bekanntlich nur, dass C_0 in den Symbolen $a_1, a_2, \ldots a_i$ homogen sei und zwar von der Ordnung g, während die erste Gleichung die eigentliche Bestimmungsgleichung für C_0 ist. Man hat daher das Resultat:

(4) *Sei φ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$, welche in den Variablen $a_1, a_2, \ldots a_i$ rational ganz und homogen sei, und man ersetzt in φ jede Potenz a_λ^r durch $\bar{a}_r$, fügt ferner passende Potenzen von $\bar{a}_0$ zu, um die erhaltene Function in $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n$ homogen zu machen, dann ergiebt sich das Leitglied einer Covariante der Form f mit den Coefficienten $\bar{a}_r$.*

Damit ist es gelungen, die oben angeschriebenen 4 Differentialgleichungen auf eine einzige zu reduciren und man erkennt daraus, dass die übrigen 3 durch die Forderungen der Homogenität zugleich befriedigt sind. Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, dass nicht nur jede Covariante von f der in Rede stehenden Differentialgleichung Genüge leistet, sondern dass auch jede Lösung der letzteren zur Bildung einer Covariante von f die Veranlassung giebt, sobald die Ordnungen

der Symbole a_r die Zahl n nicht überschreiten. Wie die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung unter diesen Bedingungen aufgefunden werden kann, soll im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§ 8.

Die allgemeinste symbolische Darstellung der Covarianten einer binären Form.

Nach einem von Hesse, Crelle's Journal Bd. 42 bewiesenen Satze ist die homogene ganze Function $\varphi(a_1\, a_2 \ldots a_i)$ durch die partielle Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$$

derart specialisirt, dass sie als ganze homogene Function von nur $i-1$ Variabeln dargestellt werden kann. In der That, setzt man

$$\text{(II)} \qquad a_1 = \varrho a_1', \; a_2 = a_2' + \varrho a_1', \; a_3 = a_3' + \varrho a_1' \text{ etc.}$$

dann wird

$$\varphi(a_1\, a_2 \cdots a_i) = \varphi(0, a_2', a_3', \cdots a_i') + \varrho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} + \cdots$$

und weil

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = a_1'\left[\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\right] = 0,$$

ferner auch alle folgenden Glieder verschwinden, so ist φ als ganze homogene Function der $i-1$ Grössen $a_2'\, a_3' \ldots a_i'$ dargestellt. Ist φ in der letzteren Form gegeben, so lässt sich dadurch wieder zu der Function von i Veränderlichen zurückkehren, dass man die Substitutionen vornimmt:

$$\text{(III)} \qquad a_2' = a_2 - a_1, \quad a_3' = a_3 - a_1, \quad a_4' = a_4 - a_1, \quad \text{etc.}$$

und diese Function genügt auch stets der Gleichung (I). Demnach lässt sich die allgemeinste Lösung von (I) auf folgende Weise construiren: Man stellt zunächst die allgemeinste Function von $i-1$ homogenen Veränderlichen $a_2'\, a_3' \ldots a_i'$ auf, deren Ordnung gleich g sei und in der keine Variable in einer höhern Potenz als n auftritt. Durch die Substitutionen (III) gelangt man alsdann zur allgemeinsten Lösung von (I). Dieser Weg kann dann immer eingeschlagen werden, wenn $g \leqq n$ ist und mit diesem Falle wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Die allgemeine homogene Function von $i-1$ Veränderlichen enthält $\binom{g+i-2}{i-2}$ Constante. Dieselbe kann daher als Summe von ebensovielen g^{ten} Potenzen angenommen werden:

$$\varphi(a_2' a_3' \cdots a_i') = \sum_k c_k (\lambda_2^{(k)} a_2' + \lambda_3^{(k)} a_3' + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i')^g,$$

worin die Zahlen $\lambda^{(k)}$ derart gewählt sein müssen, dass zwischen diesen Potenzen keine lineare Relation stattfindet. Durch die Substitutionen (III) ergiebt sich nun

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_i) = \sum_k c_k (\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i)^g$$

mit den Bedingungen

$$\lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)} + \cdots + \lambda_i^{(k)} = 0.$$

Damit ist die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (I) für den Fall, dass $g \leqq n$ ist, aufgestellt und es wird später auch hiervon Gebrauch gemacht werden.

Ist nun $g > n$, dann kann zwar in ähnlicher Weise verfahren werden; allein nach Ausführung der Substitutionen (III) erscheint dann das Symbol a_1 in einer Potenz $g > n$, während die übrigen Symbole nach Annahme höchstens bis zur n^{ten} Potenz vorkommen. Um diese einseitige Bevorzugung eines Symbols zu umgehen, suchen wir zunächst diejenigen Lösungen der Gleichung (I), welche von der ersten Ordnung sind, und die in der Form

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i, \\ \lambda_1 &+ \lambda_2 \quad + \cdots + \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

darstellbar sind und nennen jede solche ein *Grundsymbol*. Die *einfachsten* Grundsymbole sind dann $a_r - a_s$, deren Rang gleich 2 ist, während z. B. $a_1 + 2a_2 - 3a_3$ ein Grundsymbol vom Range 3 ist.

Es ist dann klar, dass nur $i - 1$ unabhängige Grundsymbole existiren und dass jede Lösung der Gleichung (I) durch diese rational und ganz ausgedrückt werden kann. Bildet man demnach aus g Grundsymbolen ein Product, in welchem jedes Symbol a höchstens in der n^{ten} Potenz vorkommt, so hat man die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f. Auch erhält man die ganze Covariante aus ihrem Leitgliede einfach auf folgende Weise*). Man ersetze jedes Symbol a_λ^r durch den Differentialquotienten $(n-r)!\,\frac{d^r f}{dx^r}$, wobei f in nicht homogenen Veränderlichen $\frac{x_1}{x_2} = x$ geschrieben gedacht wird. Dann erhält man die ganze Covariante bis auf einen Zahlenfactor.

---

*) Dieser Uebergang wurde von mir angegeben und benutzt, Math. Ann. Bd. 22, pag. 402. Ausführlicher behandelt wurde diese Frage von Hilbert ebenda Bd. 30. pag. 15. Jede Unterscheidung zwischen einer Covariante und ihrem Leitgliede wird dadurch aufgehoben. Vgl. auch § 9 Anm.

Es gilt demnach der Satz:

Jedes Product von g Grundsymbolen $\Sigma \lambda_k a_k$ $(\Sigma \lambda_k = 0)$, *in welchem jedes Symbol* a_k *höchstens bis zur* n^{ten} *Ordnung vorkommt, ist der symbolische Ausdruck für das Leitglied einer Covariante von f. Man erhält diese selbst, indem man z. B. das Symbol* a_k^r *durch* $(n-r)!\,\frac{d^r f}{dx^r}$ *ersetzt.*

Wählt man sämmtliche Grundsymbole in der einfachsten Gestalt $a_r - a_s$, so ergiebt sich die von Clebsch begründete symbolische Darstellung der Covarianten von f. Indem man nämlich jedes Symbol a_r durch Einführung von $\frac{a_r}{\alpha_r}$ homogen macht und die Linearfactoren $\alpha_r x_1 + a_r x_2$ passend zugefügt, tritt an Stelle jeder Differenz $a_r - a_s$ der Klammerfactor*) $(a_r \alpha_s - \alpha_r a_s)$ und man erhält genau den Werth der Covariante in der Darstellungsweise von Clebsch.

§ 9.

Umsetzung der Symbole von Clebsch in Grundsymbole und umgekehrt.

Wenn eine Covariante der Form f in der Symbolik von Clebsch gegeben ist, so lässt sich dieselbe durch Grundsymbole in folgender Weise darstellen. Zunächst ist erforderlich, dass in allen symbolischen Factoren $\alpha_k x_1 + a_k x_2$ $\alpha_k = 1$ gesetzt wird, wodurch alle Klammerfactoren in einfache Differenzen übergehen. Es möge dann derjenige Theil der Klammerfactoren, in welchem das Symbol a_1 vorkommt, abgesondert werden:

$$p_1 = (a_1 - a_2)^{n_{12}} (a_1 - a_3)^{n_{13}} \cdots (a_1 - a_\nu)^{n_{1\nu}}.$$

Setzt man vorübergehend $a_1 - a_\varrho = a_\varrho'$, so kann p_1 als Summe von Potenzen der Functionen $\Sigma \lambda_\varrho a_\varrho'$ dargestellt werden und indem man rückwärts zu den Symbolen a_ϱ übergeht, ergiebt sich die Beziehung

$$p_1 = \sum_r (\lambda_1^{(r)} a_1 + \lambda_2^{(r)} a_2 + \cdots + \lambda_\nu^{(r)} a_\nu)^{n_1} \qquad \lambda_1^{(r)} + \cdots + \lambda_\nu^{(r)} = 0.$$

Demnach tritt nach dieser Umformung das Symbol a_1 nur noch in *Grundsymbolen* auf, die vom ν^{ten} Range sind. In gleicher Weise lässt sich nun mit den weitern Symbolen $a_2, a_3 \ldots$ etc. verfahren und es ergiebt sich schliesslich die folgende Darstellung der Covariante C

$$C = \sum_\lambda c_\lambda (a_1 a_2 \ldots a_\nu)^{n_1} (a_2 a_3 \,..\, a_{\nu_1})^{n_2} \ldots (a_{i-1} a_i)^{n_{i-1}} \prod_{\varrho=1}^{\varrho=i} (x_1 + a_\varrho x_2)^{m_\varrho},$$

*) Die Bezeichnung der symbolischen Determinante als „Klammerfactor" wurde von Gordan eingeführt.

worin die Grundsymbole abgekürzt durch $(a_1\, a_2 \ldots a_\nu)$ etc. bezeichnet sind. Während nun ursprünglich in der Covariante C im ganzen $\frac{i(i-1)}{2}$ verschiedene symbolische Klammerfactoren enthalten sein konnten, treten jetzt deren höchstens $i-1$ auf und darin liegt ein wesentlicher Vorzug dieser neuen symbolischen Darstellungsweise.

Es möge umgekehrt der Werth einer Covariante in *Grundsymbolen* gegeben sein und zwar sei das Leitglied derselben

$$C_0 = \prod_k (\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i),$$

dann kann dieselbe durch andere Covarianten linear ausgedrückt werden, welche sämmtlich durch einfache Klammerfactoren dargestellt sind. Da nämlich in jedem Grundsymbole $\sum_r \lambda_r = 0$ ist, so folgt

$$\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i = \lambda_2^{(k)}(a_2 - a_1) + \lambda_3^{(k)}(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_i^{(k)}(a_i - a_1)$$

und es kann daher die Covariante C, indem alle Grundsymbole in dieser Weise umgeformt werden, als Function der Differenzen $a_r - a_s$ dargestellt werden. Durch Entwicklung nach Potenzen und Producten dieser Grössen erhält man dann unter Berücksichtigung des am Schlusse des § 8 Gesagten nur Covarianten, die in den Symbolen von Clebsch ausgedrückt sind.*) Man hat somit das Resultat:

Jede Covariante, welche in den Symbolen von Clebsch gegeben ist, kann durch solche Covarianten linear dargestellt werden, die sämmtlich in Grundsymbolen ausgedrückt sind, und umgekehrt.

Die Benützung der Grundsymbole statt der einfachen Klammerfactoren hat nun den Vortheil, dass in den Covarianten *weniger verschiedenartige symbolische Factoren* auftreten. So kann z. B. die Covariante $T = (ab)^2(bc)a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1}$, in welcher die zwei verschiedenen symbolischen Factoren (ab) und (bc) vorkommen, nunmehr durch $(a+b-2c)^3$ dargestellt werden, wobei nur das eine Grundsymbol $a+b-2c$ verwendet ist. Bei Covarianten höherer Grade tritt dieser Vortheil noch deutlicher hervor.

§ 10.

Das Formensystem einer Form unbegrenzt hoher Ordnung.

Wenn die Ordnung der Ausgangsform f stets höher bleibt, als das Gewicht der zu betrachtenden Covarianten, dann sind nach § 8 alle Covarianten vom Gewichte g und dem Grade i durch die folgenden

*) Auf diesem Wege kann man auch einen Uebergang vom Leitgliede einer Covariante zu dieser selbst herstellen, da nur die Linearfactoren $a_r x_1 + a_r x_2$ *nach* der Entwicklung passend zuzufügen sind.

$$P = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

linear ausdrückbar. Die *Leitglieder* aller Covarianten von f wurden von Sylvester und Cayley Seminvarianten genannt, doch werde ich im folgenden den Ausdruck *Potenziante* gebrauchen, um die symbolische Darstellungsform dieser Seminvarianten anzudeuten. Es gilt demnach der Satz:

Alle Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch Potenzianten $(\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ linear ausdrückbar.

Um alle *linear unabhängigen* Potenzianten vom Grade i und dem Gewichte g zu finden, hat man nun für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ alle möglichen verschiedenen Werthe anzunehmen, welche der Bedingung $\sum\limits_r \lambda_r = 0$ Genüge leisten, und aus allen entsprechenden Potenzianten die linear unabhängigen auszuwählen. Die Zahl dieser kann aber leicht bestimmt werden. Entwickelt man nämlich

$$P_0 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

nach Potenzen der Symbole a_r und setzt statt $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_i^{r_i}$ die realen Werthe $a_{r_1} a_{r_2} \ldots \bar{a}_{r_i}$, dann ergiebt sich

$$P_0 = \sum_r c_r (r_1 r_2 \ldots r_i) \cdot a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_i},$$

worin die c_r Polynomialcoefficienten und $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ die symmetrischen Functionen $\Sigma \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_i^{r_i}$ darstellen. Vermöge der Beziehung $\sum\limits_r \lambda_r = 0$ können nun aber zwischen den symmetrischen Functionen $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ lineare Relationen aufgefunden werden. Man erhält sie dadurch, dass man sämmtliche $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ durch die elementaren symmetrischen Functionen $e_1 e_2 \ldots e_i$ der λ ausdrückt, sodann $e_1 = 0$ setzt und die andern e eliminirt. Es bleiben dann so viele Terme linear unabhängig, als die Gleichung

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g \tag{1}$$

ganzzahlige Lösungen besitzt, entsprechend der Anzahl der Producte $e_2^{\mu_2} e_3^{\mu_3} \ldots e_i^{\mu_i}$ von der Gesammtordnung g in den λ. Sei N_g diese Zahl, dann ist demnach P_0 durch N_g symmetrische Functionen $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ ausgedrückt

$$P_0 = \sum_{r=1}^{N_g} c_r (r_1 r_2 \ldots r_i) A_r \tag{2}$$

wobei jedoch nunmehr die Coefficienten A_r Seminvarianten sind, da sie einzeln der Differentialgleichung (I) § 8 Genüge leisten müssen.

Da ferner jede der Seminvarianten A_r einen Term $a_{r_1} . a_{r_2} \ldots a_{r_i}$ enthält, der in keiner anderen Seminvariante mehr vorkommt, so folgt zugleich, dass diese N_g Seminvarianten auch *linear unabhängig* sind. An Stelle der N_g symmetrischen Functionen $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ kann man offenbar in (2) auch die N_g Producte der elementaren symmetrischen Functionen einführen, da beide gegenseitig linear ausdrückbar sind. Daher gilt der Satz:

Entwickelt man die Potenziante $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ *nach elementaren symmetrischen Functionen der* λ *und setzt* $\Sigma \lambda_r = 0$, *dann erhält man als Coefficienten alle linear unabhängigen Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g.*

Um z. B. alle Seminvarianten vom Grade 3 und dem Gewichte 6 zu erhalten, entwickelt man die Potenziante

$$p_0 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)^6$$

nach symmetrischen Functionen der λ und erhält, nachdem $e_1 = 0$ gesetzt ist,

$$\begin{aligned} p_0 = &- e_2^3 (\bar{a}_0 \bar{a}_6 - 6 \bar{a}_1 \bar{a}_5 + 15 \bar{a}_2 \bar{a}_4 - 10 \bar{a}_3^2) \bar{a}_0 \\ &+ 3 e_3^2 (\bar{a}_0^2 \bar{a}_6 - 6 \bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_5 - 15 \bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_4 + 20 \bar{a}_0 \bar{a}_3^2 - 60 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \\ &\qquad + 30 \bar{a}_1^2 \bar{a}_4 + 30 \bar{a}_2^3). \end{aligned}$$

Daher giebt es nur die angeschriebenen beiden linear unabhängigen Seminvarianten. Bildet man nun durch Einführung von Zahlenwerthen an Stelle der λ specielle Potenzianten:

$$(a_1 + a_2 - 2 a_3)^6, \quad (a_1 + 2 a_2 - 3 a_3)^6, \quad \text{etc.}$$

so können deren nur 2 linear unabhängige existiren. Wegen der kürzeren Darstellungsweise erweist es sich nun als vortheilhaft, alle Seminvarianten durch solche passend gewählte Potenzianten auszudrücken. Setzt man zu diesem Zwecke in der Entwicklung

$$(3) \qquad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g = \sum_r c_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} B_r$$

für die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_i$ nach und nach solche numerische Werthe, dass die Determinante aus den Zahlencoefficienten der B_r nicht verschwindet, so ergeben sich lineare Gleichungen, aus denen die N_g Unbekannten B_r bestimmt werden können. *Jede Seminvariante kann daher durch* N_g *linear unabhängige Potenzianten linear ausgedrückt werden.* (Vgl. die Anmerkung am Schlusse).

§ 11.

Symbolische Darstellung von Perpetuanten.

Eine Seminvariante wird *reducibel* genannt, wenn sie als ganze rationale Function von Seminvarianten niederer Grade dargestellt

werden kann. Wenn alle *reducibeln* Seminvarianten ausgeschieden sind, so wird noch ein Theil derselben zurückbleiben, die von Sylvester Perpetuanten genannt worden sind. Diese Formen sind in gewissen Sinne identisch mit den von Gordan bei Aufstellung vollständiger Formensysteme verwendeten „herübergenommenen Formen", insoferne alle Perpetuanten (für die betreffende Form f) in letzteren enthalten sind.

Die Darstellung aller Seminvarianten durch Potenzianten gestattet nun, ohne grosse Mühe alle *reducibeln* Seminvarianten auszuscheiden. Die Potenziante

$$(1) \qquad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g \qquad \sum_{r=1}^{i} \lambda_r = 0$$

ist offenbar immer dann reducibel, wenn die Summe aus einem Theile der Grössen λ_r für sich verschwindet. Alsdann lässt sich das Grundsymbol in 2 Theile zerlegen

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_\varrho a_\varrho) + (\lambda_{\varrho+1} a_{\varrho+1} + \cdots + \lambda_i a_i)$$

und als Binom entwickeln, so dass eine ganze Function von Potenzianten niederer Grade erhalten wird. Bei Bildung der Gleichungen (3) des § 10 wird man daher eine möglichst grosse Zahl solcher reducibleu Potenzianten verwenden.

Beginnen wir mit den Potenzianten, für welche einfach $\lambda_1 = 0$ ist, und die in Folge dessen durch Multiplication der Potenzianten vom Grade $i - 1$ mit $\bar{a}_0$ gewonnen werden können, so zeigt sich, dass für alle diese Potenzianten $e_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_i = 0$ ist, während die übrigen symmetrischen Functionen $e_2, \ldots e_{i-1}$ von einander unabhängig bleiben. In den Gleichungen (3) des § 10 verschwinden nun alle Glieder, welche den Factor e_i besitzen und deren giebt es so viele, als die Gleichung

$$(2) \qquad 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g - i$$

ganzzahlige Lösungen besitzt. Sei diese Zahl N_{g-i}, dann sind demnach $N_g - N_{g-i}$ Seminvarianten B_r durch ebensoviele lineare Gleichungen auf die in Rede stehenden zerfallenden Formen $(1 . i - 1)$ reducirbar.

In gleicher Weise können nun diejenigen Seminvarianten zur Reduction herangezogen werden, welche durch Multiplication der Formen 2ten Grades mit den Formen $(i-2)$ten Grades entstehen. Wählen wir in (1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, so ergeben sich durch Variation der Zahlen λ alle diese Producte. In der Gleichung (3) des § 10 führen wir nun die symmetrische Function

$$(3) \quad p_2 = \prod (\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_r c_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} \quad 2r_2 + 3r_3 + \cdots = \binom{i}{2}$$

ein, indem wir möglichst viele Producte der e durch p_2 zu ersetzen suchen, und zwar nur solche Producte, deren Factoren B noch nicht als reducibel nachgewiesen sind. Da nun p_2 in den λ vom Grade $\binom{i}{2}$ ist, so sind $N_{g-\binom{i}{1}-\binom{i}{2}}$ Producte der e durch p_2 ersetzbar. Dann nimmt die Gleichung (3) § 10 die Form an

$$(4)\quad (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i)^g = \sum_r c_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_{i-1}^{r_{i-1}} B_r + e_i \sum_r c'_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} B'_r$$

$$+ e_i p_2 \sum_r c''_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} B''_r.$$

Setzt man darin solche Zahlenwerthe der λ, welche den Bedingungen $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i = 0$ genügen, so werden in den entstehenden Gleichungen alle Terme mit dem Factor p_2 fehlen. Ausser den schon als reducibel nachgewiesenen Formen B_r treten in diesen Gleichungen nur die Formen B'_r auf, deren Zahl

$$N_{g-i} - N_{g-\binom{i}{1}-\binom{i}{2}}$$

beträgt und diese können daher auf die zerfallenden Formen $(2 \cdot i - 2)$ reducirt werden. Da die Coefficienten der B', wenn $p_2 = 0$ ist, auch linear unabhängig sein müssen, so folgt auch, dass in den entstehenden Gleichungen die Determinante der Coefficienten bei passender Wahl der λ einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Weiterhin können in gleicher Weise die Producte $(3 \cdot i - 3)$, $(4 \cdot i - 4)$ etc. zur Reduction der Seminvarianten B'', B''' etc. verwendet werden. Bezeichnen wir die hiebei auftretenden symmetrischen Functionen

$$\prod(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad \prod(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \text{ etc.}$$

durch $p_3, p_4, \ldots p_{\frac{i}{2}}$ für ein gerades i (bez. $p_{\frac{i-1}{2}}$ für ein ungerades i), dann kann die Gleichung (3) des § 10 schliesslich in folgende Form gebracht werden

$$(5)\quad (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

$$= R + e_i \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\frac{i}{2}} \left(p_{\frac{i-1}{2}}\right) \cdot \sum_r c_r e_2^{r_2} \cdots e_i^{r_i} C_r.$$

Darin enthält R alle *reduciblen* Seminvarianten, während die Formen C_r die eigentlichen Perpetuanten sind. Dass diese *irreducibel* sind, folgt daraus, dass bei dem eingeschlagenen Verfahren *sämmtliche* Producte aus Perpetuanten niederer Grade zur Verwendung gekommen

sind. Um die Zahl der Perpetuanten C_r zu bestimmen, suchen wir zuerst den Grad des Factors

$$p = c_i \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\frac{i}{2}} \left(p_{\frac{i-1}{2}}\right)$$

in Bezug auf die λ. Dieser ist

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\binom{i}{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}2^i - 1 = 2^{i-1} - 1 \text{ wenn } i \text{ gerade,}$$

und

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \cdots + \binom{i}{\frac{i-1}{2}} = \frac{1}{2}2^i - 1 = 2^{i-1} - 1 \text{ wenn } i \text{ ungerade,}$$

somit in beiden Fällen $2^{i-1} - 1$. Daher ist die Zahl der Formen C_r einfach $N_{g-2^{i-1}+1}$:

Die Zahl der Perpetuanten vom Grade i und dem Gewichte g ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1.$$

Dieser Satz wurde für die einfachsten Fälle $i = 3, 4, 5$ von Cayley Amer. Journal of Math. Vol. VII, bewiesen, der allgemeine Beweis wurde — mit anderen complicirteren Hilfsmitteln — von Mac Mahon ebenda Vol. VII und VIII geführt.

Die entwickelte Methode kann jedoch nicht allein zur Bestimmung der *Zahl* der Perpetuanten dienen, sondern es lassen sich auch diese Perpetuanten selbst in Gestalt von Potenzianten sofort anschreiben. Wählen wir in (5) die Zahlen λ so, dass die Potenziante links nicht zerfällt, dann wird auch das Product $e_i \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$ nicht verschwinden. Es lassen sich nun offenbar $N_{g-2^{i-1}+1}$ solcher Gleichungen bilden, aus denen die Perpetuanten C_r linear durch die gewählten Potenzianten ausgedrückt werden können. Diese Gleichungen sind nun ganz analog den Gleichungen (3) des § 10 zu bilden, wenn dort das Gewicht gleich $g - 2^{i-1} + 1$ angenommen wird und wenn keine der Potenzianten zerfällt. Sind jene Gleichungen auflösbar, dann sind es auch die Gleichungen (5). Daher kann man sagen:

Wenn alle linear unabhängigen, nicht zerfallenden Potenzianten vom Gewichte $\gamma = g - 2^{i-1} + 1$ durch

$$(\lambda_1^{(1)} a_1 + \cdots + \lambda_i^{(1)} a_i)^\gamma, \quad (\lambda_1^{(2)} a_1 + \cdots + \lambda_i^{(2)} a_i)^\gamma, \text{ etc.}$$

dargestellt sind, dann sind

$$(\lambda_1^{(1)} a_1 + \cdots + \lambda_i^{(1)} a_i)^g, \quad (\lambda_1^{(2)} a_1 + \cdots + \lambda_i^{(2)} a_i)^g, \text{ etc.}$$

alle Perpetuanten vom gleichen Grade i und dem Gewichte g.

§ 12.

Das ternäre Grundsymbol.

Auch die Covarianten von Formen mit mehr Veränderlichen lassen sich in derselben Weise symbolisch darstellen, wie dies im Vorigen für Covarianten von binären Formen durchgeführt wurde.

Sei f eine ternäre Form, dann können Contravarianten und Zwischenformen von f dadurch aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, dass man in allen Covarianten zwei Reihen Veränderlicher x und y zulässt. Denn jede derartige Form geht durch die Substitutionen

$$u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad u_2 = y_1 x_3 - x_1 y_3, \quad u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

in eine Covariante mit 2 Reihen Veränderlicher über.

Zunächst transformiren wir nun mittelst des Aronhold'schen Processes die Covariante C in eine simultane Covariante der Potenzen

$$(\alpha_1 x_1 + a_1 x_2 + b_1 x_3)^n, \quad (\alpha_2 x_1 + a_2 x_2 + b_2 x_3)^n, \quad \text{etc.}$$

so dass C in den Coefficienten jeder derselben *linear* wird. In dieser Gestalt genügt der Coefficient C_0 der höchsten Potenzen von x_1 und y_1 den 9 partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r} \alpha_r = g \,.\, C_0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r} a_r = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r} b_r = 0, \\ \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} \alpha_r = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} a_r = g \,.\, C_0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} b_r = 0, \\ \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} \alpha_r = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} a_r = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} b_r = g \,.\, C_0 \,. \end{array}$$

Da nun C in den Coefficienten von f *homogen* ist, so können die Symbole α_r entbehrt werden und man darf daher $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 1$ setzen. Dadurch reduciren sich die 9 Differentialgleichungen auf die folgenden 6:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} a_r = g C_0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} b_r = 0, \\ \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} a_r = 0, & \sum\limits_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} b_r = g C_0 \,. \end{array}$$

Setzen wir nun fest, dass C_0 sowohl in den a_r als auch in den b_r *homogen* vom Grade g sei, dann wird die 2[te] und 6[te] Differentialgleichung überflüssig. Ferner möge C_0 durch die Substitutionen

$$(3) \quad \begin{array}{l} a_2 - a_1 = a_2', \quad a_3 - a_1 = a_3', \ldots a_i - a_1 = a_i', \\ b_2 - b_1 = b_2', \quad b_3 - b_1 = b_3', \ldots b_i - b_1 = b_i' \end{array}$$

in eine ganze homogene Function der Grössen a' und b' übergehen, dann ist auch die erste und vierte Gleichung erfüllt. Es bleiben daher nur noch 2 der Gleichungen (2) übrig, die nach einfacher Transformation auf die Grössen a' und b' die Form annehmen

$$(4) \qquad \sum_{r=2}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a'_r} b'_r = 0, \qquad \sum_{r=2}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial b'_r} a'_r = 0.$$

Die allgemeinste Lösung dieser beiden Gleichungen ist die ganze homogene Function der Determinanten $a'_r b'_s - a'_s b'_r$, welche in den a' und b' bis zum Grade g ansteigt und die in folgender Weise gebildet werden kann. Zunächst ist ersichtlich, dass die bilineare Function

$$A'_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \lambda_2 a_2' + \cdots + \lambda_i a_i' & \lambda_2 b_2' + \cdots + \lambda_i b_i' \\ \mu_2 a_2' + \cdots + \mu_i a_i' & \mu_2 b_2' + \cdots + \mu_i b_i' \end{vmatrix}$$

eine Lösung der Gleichungen (4) ist. Jede andere Lösung derselben Ordnung kann nun aus dieser dadurch erhalten werden, dass man die Zahlen λ und μ zweckmässig variirt und aus allen entstehenden Functionen die Summe bildet. Da nämlich zwischen den Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_i \\ \mu_2 & \mu_3 & \ldots & \mu_i \end{Vmatrix}$$

keine *lineare* Identität stattfindet, so lässt sich die allgemeine bilineare Lösung von (4) in der Weise

$$A' = c_0 A_0' + c_1 A_1' + \cdots$$

aus speciellen Lösungen zusammensetzen.

Jede Lösung von höherer Ordnung kann nun ebenfalls als Function der $A'_{\lambda\mu}$ dargestellt werden. Denn sei φ eine ganze homogene Function der $\binom{i-1}{2}$ Determinanten $a'_r b'_s - a_s' b_r'$ von der Ordnung g in den a' und b', dann besitzt dieselbe genau ebensoviele willkürliche Constanten, als die Potenz $A'^g_{\lambda\mu}$ linear unabhängige Terme enthält. Bringt man nämlich $A'_{\lambda\mu}$ in die Form

$$A'_{\lambda\mu} = \sum_{r,s} \begin{vmatrix} a'_r & a'_s \\ b'_r & b'_s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_r & \lambda_s \\ \mu_r & \mu_s \end{vmatrix}$$

und erhebt zur g^{ten} Potenz, dann wird zwischen den Producten der Determinanten $\lambda_r \mu_s - \lambda_s \mu_r$ eine gewisse Zahl linearer Relationen stattfinden. Ganz dieselben Relationen finden aber auch zwischen den Producten der Determinanten $a'_r b'_s - a'_s b'_r$ statt, und es reducirt sich die Constantenzahl von φ um die gleiche Grösse. Daher gilt der Satz:

Jede Lösung der Differentialgleichungen (4), *welche von der g^{ten} Ordnung in jeder Variabelnreihe ist, kann durch die*

g^{ten} Potenzen der einfachsten Lösungen $A'_{\lambda\mu}$ linear ausgedrückt werden.

Kehrt man nun durch die Substitutionen (3) zu den Symbolen a_r und b_r zurück, dann wird aus $A'_{\lambda\mu}$ das *ternäre Grundsymbol:*

$$A_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i & \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_i b_i \\ \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_i a_i & \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_i b_i \end{vmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i = 0,$$
$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i = 0.$$

Es hat auch hier keine Schwierigkeit, den Zusammenhang dieses Grundsymbols mit den Klammerfactoren von Clebsch herzustellen.

Ist die Ordnung von f unbegrenzt hoch, so dass stets $n \geqq g$ bleibt, dann wird der Coefficient C_0, der den Gleichungen (1) genügt, eine *ternäre Seminvariante* genannt. Es ergiebt sich aus dem Gesagten dann unmittelbar der Satz:

Alle ternären Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch die g^{ten} Potenzen des ternären Grundsymbols $A_{\lambda\mu}$ linear ausdrückbar.

Es erweist sich daher auch hier zweckmässig, alle Seminvarianten durch solche ternäre *Potenzianten* $A^g_{\lambda\mu}$ darzustellen. Die Behandlung der übrigen Fragen, wie Zahl der linear unabhängigen Seminvarianten, Darstellung der Perpetuanten etc. kann dann in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie dies für binäre Formen oben geschehen ist.

München, im Januar 1890.

Anmerkung. Der in § 10 und weiterhin öfter benützte elementare Hilfssatz lautet: „Sind die Functionen $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ der Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_i$ *linear unabhängig*, dann können stets für die x m Werthereihen $x_1^{(\lambda)} \ldots x_i^{(\lambda)}$; $\lambda = 1, 2, \ldots m$ gefunden werden, so dass die Determinante aus den entsprechenden Functionen $\varphi_1^{(\lambda)} \ldots \varphi_m^{(\lambda)}$ $\lambda = 1, \ldots m$ nicht verschwindet.“ Der Beweis folgt aus dem Umstande, dass das in Bezug auf eine Reihe der x identische Verschwinden der Determinante bez. einer Unterdeterminante eine lineare Relation der φ zur Folge haben würde. Auf diesen Hilfssatz stützen sich auch zum Theil die Entwicklungen des § 12. Denn es ist deutlich, dass die allgemeine Function $a_1 y_1 + \cdots a_m y_m$ aus den speciellen Functionen $z_\lambda = \varphi_1^{(\lambda)} y_1 + \cdots + \varphi_m^{(\lambda)} y_m$ in der Weise erhalten werden kann:

$$a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_m z_m.$$

Während demnach zwischen den Functionen φ_i Relationen von *höherer* als der *ersten* Ordnung existiren können, kann dies für die Combinationen

$$b_1 \varphi_i^{(1)} + \cdots + b_m \varphi_i^{(m)}$$

nicht mehr stattfinden, vielmehr müssen dieselben — bei willkürlich gedachten b — als völlig unabhängige Grössen betrachtet werden.

Anmerkung zu § 9. Zu der angegebenen Umsetzung eines Productes von Klammerfactoren in Grundsymbole ist noch zu bemerken, dass im Resultate unter gewissen Umständen ein Symbol a_r in einer höheren als der n^{ten} Potenz auftreten kann. Wäre z. B. die Invariante $j = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2$ einer Form 4^{ter} Ordnung durch Grundsymbole auszudrücken, so würde in den einzelnen Summanden des Resultats jedes Symbol a_2 und a_3 bis zur 6^{ten} Ordnung vorkommen, was im Allgemeinen vermieden werden muss. Es geschieht dies leicht dadurch, dass man zum Producte p_1 nur *einen Theil* der Differenzen $a_1 - a_r$ hinzunimmt, während die übrigen entweder ganz unverändert gelassen oder später zu einem der andern Producte $p_2, p_3, \ldots$ zugezogen werden können. Die Invariante j würde z. B. unter Berücksichtigung dieses Umstandes ihre Form beibehalten, ein Fall der nicht ausgeschlossen ist. Dagegen lässt sich z. B. die Covariante $(ab)^4 (ac)^2 (ad) b_x^3 c_x^5 d_x^6$ durch Formen $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4)^7$ linear darstellen. Jeder specielle Fall erfordert daher eine kleine Modification des beschriebenen allgemeinen Verfahrens.

Zur Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen.

Von

Franz Rogel in Brünn.

Im „Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe, T. VII, 1889 S. 381 wurde vom Verfasser für die Anzahl $\mathfrak{A}_m$ der Primzahlen $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \ldots$, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl m sind, folgender Ausdruck angegeben:

$$(1) \qquad \mathfrak{A}_m = |m| \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) + n - 1; \quad p_n < \sqrt{m} < p_{n+1}$$

wo das eingeklammerte $|m|$ symbolisch anzeigt, dass nach vollzogener Multiplication der $n - 1$ gliedrigen Factorenfolge jedes Glied noch vor der Reduction mit $|m|$ zu multipliciren und dann

$$|m| \frac{1}{p_r p_s \cdots} = \left| \frac{m}{p_r p_s \cdots} \right|,$$

d. h. gleich der grössten in dem Bruche $\frac{m}{p_r p_s \cdots}$ enthaltenen ganzen Zahl zu setzen ist, wobei schliesslich folgender Ausdruck entsteht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m = m - \left|\frac{m}{p_2}\right| - \left|\frac{m}{p_3}\right| - \left|\frac{m}{p_4}\right| - \cdots & \\ + \left|\frac{m}{p_2 p_3}\right| + \left|\frac{m}{p_2 p_4}\right| + \left|\frac{m}{p_3 p_4}\right| + \cdots & \\ - \left|\frac{m}{p_2 p_3 p_4}\right| - \cdots \qquad\qquad & + n - 1. \end{aligned}$$

Diese Formel (1) ist noch einer weiteren Umgestaltung fähig, deren Zweck es ist, durch Verminderung der Factorenanzahl $n - 1$ in $\prod_2^n$ die Rechnung zu vereinfachen. Durch die Reducirung dieser Anzahl auf ein Minimum und womöglich durch Eliminirung des Productes $|m| \prod$ soll ein recursiver Ausdruck für $\mathfrak{A}_m$ geschaffen werden, welcher Aufschluss über die Beziehungen verschiedener $\mathfrak{A}$ geben wird.

1. Vor Allem muss bemerkt werden, dass die nämlichen Schlüsse, welche zur Formel (1) führten, es erlauben, den Ausscheidungsprocess aller Primzahlen < als die gegebene Zahl z bis zur letzten $p_{\mathfrak{A}_z}$ fortzusetzen, wodurch die Grenzen von $\prod$ erweitert werden. Es ist offenbar:

$$(1^*)\quad \mathfrak{A}_z = \left|z\right|\prod_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n-1$$

$$=\left|z\right|\prod_2^{n+1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n=$$

$$=\left|z\right|\prod_2^{n+\nu}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n+\nu-1 \quad (\text{wo } \nu \leqq \mathfrak{A}_z-n)\ \cdots$$

$$=\left|z\right|\prod_2^{\mathfrak{A}_z}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+\mathfrak{A}_z-1;$$

denn die grösste Primzahl $\leqq z$ ist offenbar $p_{\mathfrak{A}_z}$.

Durch Gleichsetzung des ursprünglichen mit dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{A}_z$ entsteht:

$$(2)\qquad \left|z\right|\prod_{r=2}^{\mathfrak{A}_z}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=1.$$

Es ist einleuchtend, dass die obere Grenze $\mathfrak{A}_z$ beliebig vergrössert werden kann, ohne den Werth von $\prod$ zu verändern. Factoren $\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, welche Primzahlen entsprechen, die $> z$ sind, können selbstverständlich keinen Einfluss haben, da $\left|\frac{z}{p_r}\right|=0$, wenn $p_r > z$ ist.

In ihrer allgemeinsten Form lautet daher die Gleichung (2):

$$(2^*)\qquad \left|z\right|\prod_{r=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=1.$$

Nach dem leicht zu beweisenden Satze

$$(3)\qquad \left|z\right|\prod_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=\left|z\right|\prod_2^{n-1}-\left|\frac{z}{p_n}\right|\prod_2^{n-1},$$

welcher für jedes $n \gtreqless \mathfrak{A}_z$ giltig ist, kann geschrieben werden:

$$\mathfrak{A}_z=\left|z\right|\prod_2^{n+1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n=\left|z\right|\prod_2^{n}-\left|\frac{z}{p_{n+1}}\right|\prod_2^{n}+n,$$

nun ist auch

$$\mathfrak{A}_z = |z|\prod_2^n + n - 1,$$

woraus:

$$\left|\frac{z}{p_{n+1}}\right|\prod_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1. \tag{4}$$

Dieser Satz gilt auch, wenn die obere Grenze $\begin{smallmatrix} > n \\ < \mathfrak{A}_z \end{smallmatrix}$ ist; ein specieller Fall ist

$$\left|\frac{z}{p_{\mathfrak{A}_z}}\right|\prod_2^{\mathfrak{A}_z - 1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1. \tag{4'}$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes (3) ergiebt sich:

$$\left|\left|\frac{z}{p_{n+1}}\right| + \left|\frac{z}{p_{n+2}}\right| - \left|\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+2}}\right|\right|\prod_2^n = 2,$$

$$\left[\left|\frac{z}{p_{n+1}}\right| + \left|\frac{z}{p_{n+2}}\right| + \left|\frac{z}{p_{n+3}}\right| - \left|\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+2}}\right| - \left|\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+3}}\right| - \left|\frac{z}{p_{n+2}\cdot p_{n+3}}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{z}{p_{n+1}\,p_{n+2}\,p_{n+3}}\right|\right]\cdot\prod_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 3.$$

u. s. w.

2. Um nun die Grenzen von $\prod$ einzuengen, kann der Satz (3) vortheilhaft benützt werden. Es ist

$$\mathfrak{A}_z = |z|\prod_2^n + n - 1 = |z|\prod_2^{n-1} - \left|\frac{z}{p_n}\right|\prod_2^{n-1} + n - 1,$$

wobei abkürzungsweise $\prod\limits_2^n$ für $\prod\limits_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$ gesetzt wurde; ferner hat man

$$\mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_n}\right| = \left|\frac{z}{p_n}\right|\prod_2^{n-1} + n - 2,$$

weil $n-1 \geqq n'$, wo $p_{n'} < \sqrt{\frac{z}{p_n}} < p_{n'+1}$; hieraus ist:

$$\left|\frac{z}{p_n}\right|\prod_2^{n-1} = \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_n}\right| - (n-2);$$

dies in $\mathfrak{A}_z$ gesetzt, giebt:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{n-1} - \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_n}\right| + n - 1 + n - 2$$

und ebenso folgt durch wiederholte Anwendung des Satzes (3):

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{n-1} - \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_{n-1}}\right| - \mathfrak{A}\frac{z}{p_n} + n - 1 + n - 2 + n - 3, \ldots$$

$$(5)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{\nu} - \sum_{\nu+1}^{n} \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_r}\right| + n - 1 + \cdots + \nu - 1.$$

Die Zerlegung von $|z| \prod\limits_{2}^{\nu}$ nach Satz (3) kann nur dann mit Erfolg fortgesetzt werden, solange $p_{\nu-1} > \sqrt{\frac{z}{p_\nu}}$ ist; es wird aber endlich als obere Grenze eine Zahl m hervorgehen, für welche $p_m < \sqrt{\frac{z}{p_{m+1}}} < p_{m+1}$ sein wird, oder $p_m^2\, p_{m+1} < z < p_{m+1}^3$ und weil $p_m < p_{m+1}$, umsomehr

$$(6)\qquad p_m^3 < z < p_{m+1}^3.$$

Dem entspricht:

$$(7)\qquad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{m} - \sum_{m+1}^{n} \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_r}\right| + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2}.$$

Diese Formel lässt sich durch einfache Substitutionen in jene überführen, welche Meissel in den „Mathematischen Annalen" Bd. II u. III für die Anzahl gegeben hat; in derselben wird die Einheit nicht mitgezählt ($p_1 = 2$, $p_2 = 3 \ldots$). Die Ableitung mittelst Ungleichungen ist eine bei weitem umständlichere als die hier gegebene; sie hat den weiteren Nachtheil, dass sie keine Handhabe zu wiederholten Umgestaltungen derselben Formel (7) darbietet.

Je grösser die gegebene Zahl z ist, desto vortheilhafter wird die Anwendung obiger Formel, weil mit wachsendem z auch der Unterschied zwischen m und n sehr rasch zunimmt.

Z. B. für $z = 1000$	ist $n =$ 12,	$m =$ 5,
$= 10\,000$	„ $=$ 26,	$=$ 9,
$= 100\,000$	„ $=$ 67,	$=$ 15,
$= 1\,000\,000$	„ $=$ 168,	$=$ 26.

. . . .

3. Um die Reihe der Theiler $p_2 \ldots p_m$ noch weiter zu reduciren, wird wieder Satz (3) angewendet, dann ist:

$$(8)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{m-1} - \left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} - \sum_{m+1}^{n} {}^r\mathfrak{A}\frac{z}{p_r} + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2}.$$

Nun lässt sich auf das zweite Glied rechter Hand sofort die Formel (5) anwenden, weil stets $m - 1 < n'$ ist, $p'_n < \sqrt{\frac{z}{p_m}} < p_{n'+1}$; denn es gilt auch: $p_m < \sqrt[3]{z} < p_{m+1}$. Wenn in ersterer Ungleichung statt p_m das grössere $\sqrt[3]{z}$ gesetzt wird, so ist $p_{n'+1} > \sqrt[3]{z} > p_m$, daher wirklich $n' + 1 > m$ oder $m - 1 < n'$. Es ist daher gestattet zu schreiben:

$$(9)\quad \mathfrak{A}\frac{z}{p_m} = \left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} - \sum_m^{n'} \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_m p_r}\right| + n' - 1 + \cdots + m - 2.$$

Da $n' \geqq m$ ist, so kann die untere Grenze von $\sum$ die obere nie übertreffen. Aus (9) folgt:

$$\left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m} + \sum_m^{n'} {}^r\mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} - \binom{n'}{2} + \binom{m-2}{2},$$

dies in (8) gesetzt, giebt:

$$(10)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{m-1} - \sum_m^{n} {}^r\mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_m^{n'} {}^r\mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} + \binom{n}{2} + \binom{n'}{2} - \binom{m-1}{2} - \binom{m-2}{2}.$$

Ist $z = p^3 + \alpha$ und $\frac{\alpha}{p} < p_1{}^2 - p^2$, unter p, p_1 zwei aufeinanderfolgende Primzahlen verstanden, so ist $p_{n'} \leqq \sqrt{\frac{p^3+\alpha}{p}}$, weil $p_m < \sqrt[3]{p^3 + \alpha}$, daher $= p$ ist, somit $p_{n'} < \sqrt{p^2 + \frac{\alpha}{p}} < p_{n'+1}$ und $p_{n'} = p = p_m$, $n' = m$. In diesem Falle besteht also die Summe $\sum_m^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m^2}$ nur aus einem einzigen Gliede. Im Allgemeinen umfasst dieselbe im Verhältniss zu z nur sehr wenige Glieder, so ist z. B. für $z = 1{,}000{,}000$: $m = 26$ $n' = 27$ und $\sum_m^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26}^2} + \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26} \cdot p_{27}}$. Da $\frac{\alpha}{p} < p_1{}^2 - p^2$ und $z = p^3 + \alpha$, so ist $z < p_1{}^2 p$. Wenn also $p^3 < z < p_1{}^2 p$ ist, so folgt immer $m = n'$.

Das symbolische Product lässt sich weiter zerfällen und so behandeln wie $|z| \prod_2^m$; es entsteht:

$$(11)\quad \mathfrak{A}_z = |z|\prod_{2}^{m-2} - \sum_{m-1}^{n}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{m}^{n'}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} - \sum_{m-1}^{n''}{}_r \frac{z}{p_{m-1} p_r}$$
$$+\binom{n}{2}+\binom{n'}{2}+\binom{n''}{2}-\binom{m-1}{2}-\binom{m-2}{2}-\binom{m-3}{2};$$
$$p_{n''} < \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}} < p_{n''+1}.$$

Da $p_{m-1} < p_m$, so ist $\sqrt{\frac{z}{p_m}} \geqq \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}}$, folglich auch $n'' \geqq n'$; ferner ist $n' \geqq m$, umsomehr $n'' > m-1$, die obere Grenze in $\sum\limits_{m-1}^{n''}$ ist mithin grösser als die untere, daher ist die Summirung ausführbar.

Diese allmähliche Verminderung der oberen Grenze m wird im allgemeinen nicht bis zum Verschwinden derselben, sondern nur bis zu einem gewissen Grenzwerth k getrieben werden können. Ein beliebiges $|u|\prod\limits_2^s$ wird ja nach Formel (5) sich nur dann durch $\mathfrak{A}u$ darstellen lassen, wenn $s \geqq \sigma$, $p_\sigma < \sqrt[3]{u} < p_{\sigma+1}$ ist. In Folge des bisher befolgten Vorganges wird $\left|\frac{z}{p_r}\right|$ immer grösser, weil der Theiler p_r immer kleiner wird, während die obere Grenze fortwährend abnimmt. Für die Grenze k wird nach dem leicht zu erkennenden Bildungsgesetz der Formel (11) offenbar:

$$(12)\quad \mathfrak{A}_z = |z|\prod_{2}^{k} - \sum_{k+1}^{n}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k}{}_\nu \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}_\nu \binom{n^{(\nu)}}{2}$$
$$-\binom{m}{3}+\binom{k-1}{3}.$$

Hierin entstand $|z|\prod\limits_2^k$ aus $|z|\prod\limits_2^{k+1} = |z|\prod\limits_2^k - \left|\frac{z}{p_k}\right|\prod\limits_2^k$; damit nun $\left|\frac{z}{p_{k+1}}\right|\prod\limits_2^{\varkappa}$ mittelst der Formel (5) durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_{k+1}}$ ausgedrückt werden konnte, musste $p_k < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k+1}}} < p_{k+1}$ oder $p_k^3 p_{k+1} < z < p_{k+1}^4$ und umsomehr

$$(13)\qquad p_k^4 < z < p_{k+1}^4 \text{ oder } p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1}$$

sein, wodurch die Grenze k definirt ist.

4. Die Formel (12) bietet nun wieder analog wie bei (5) das Mittel dar, das Gebiet der Primzahlen-Theiler $p_2, p_3, \ldots$ weiter einzuschränken. Es ist

$$|z| \prod_2^k = |z| \prod_2^{k-1} - \left|\frac{z}{p_\varkappa}\right| \prod_2^{k-1};$$

das negative Product kann durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_\varkappa}$ mittelst einer der Formeln, welche aus (12) durch die Substitutionen $k = m-1,\ m-2, \ldots k$ hervorgehen, ausgedrückt werden. Ein Repräsentant dieses Systems ist:

$$(14)\quad \mathfrak{A}z = |z| \prod_2^{\varkappa} - \sum_{\varkappa+1}^{n} {}^r\, \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_1^{m-\varkappa} {}^\nu \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} {}^r\, \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\, p_r}$$
$$+ \sum_0^{m-\varkappa} {}^\nu \binom{n^{(\nu)}}{2} - \binom{m}{3} + \binom{\varkappa-1}{3}, \ldots$$

worin $\varkappa$ alle Werthe von m bis k annehmen kann. Die Bedingung, unter welcher $\left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_2^{k-1}$ durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_k}$ mit Hilfe dieser Formel (14) ausgedrückt werden kann, ist gegeben durch die Ungleichung $k-1 < k'$, wo $p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1}$ ist. Nun ist

$$p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1}, \text{ und } p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1};$$

setzt man hierin statt p_k das grössere $\sqrt[4]{z}$, so folgt $\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt[4]{z}}} = \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$, mithin $p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$ und $k-1 < k'$. Die Bedingung wird daher thatsächlich erfüllt.

Setzt man an Stelle von m und n die sich auf $\left|\frac{z}{p_k}\right|$ beziehenden Grössen m_1 und n_1, ferner $\varkappa = k-1$, so folgt:

$$(15)\quad \left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_2^{k-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} + \sum_k^{n_1} {}^r\, \mathfrak{A}\frac{z}{p_k p_r} \sum_1^{m_1-k+1} {}^\nu \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}} {}^r\, \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1}\, p_k\, p_r}$$
$$- \sum_0^{m_1-k+1} {}^\nu \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \binom{m_1}{3} - \binom{k-2}{3}; \ldots$$

da ferner $p_{n_1} < \sqrt{\frac{z}{p_k}} < p_{n_1+1}$, $p_{m_1} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{m_1+1}$, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}_3 = |z| \prod_2^{k-1} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} - \sum_{k+1}^{n}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{k}^{n_1}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_k p_r} - \sum_{1}^{m-k}{}_\nu \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}_\nu \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1} p_k p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}_\nu \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}_\nu \binom{n_1^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3}.$$

Berücksichtigt man, dass $n_1 = n^{(m-k+1)}$, so lässt sich das 4. und 5. Glied auf der rechten Seite der Gleichung vereinigen und es kann kürzer geschrieben werden:

$$(16)\quad \mathfrak{A}_3 = |z| \prod_2^{k-1} - \sum_{k}^{n}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k+1}{}_\nu \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}_\nu \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1} p_k p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}_\nu \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}_\nu \binom{n_1^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3}.$$

Ebenso wird gefunden:

$$(17)\quad \mathfrak{A}_3 = |z| \prod_2^{k-2} - \sum_{k-1}^{n}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k+2}{}_\nu \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}_\nu \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1} p_k p_r} - \sum_{1}^{m_2-k+2}{}_\nu \sum_{m_2-\nu+1}^{n_2^{(\nu)}}{}_r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_2-\nu+1} p_{k-1} p_r}$$

$$+ \sum_{0}^{m-k}{}_\nu \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}_\nu \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_2-k+2}{}_\nu \binom{n_2^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} - \binom{m_2}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3} + \binom{k-3}{3};$$

$n_2 = n^{(m-k+2)}$, $n_0^{(\nu)} = n^{(\nu)}$, $p_{n_2} < \sqrt{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{n_2+1}$, $p_{m_2} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{m_2+1}$.

U. s. f. Schliesslich kommt, mit einfacher Reduction:

$$(18)\quad \mathfrak{A}_s = |z| \prod_{2}^{h} - \sum_{h+1}^{n}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-h}{}_{v} \sum_{m-v+1}^{n^{(v)}}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_{m-v+1}\, p_r}$$

$$- \sum_{1}^{k-h}{}_{\mu} \sum_{1}^{m_\mu - k + \mu}{}_{v} \sum_{m_\mu - v + 1}^{n_\mu^{(v)}}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_{m_\mu - v + 1}\, p_{k-\mu+1}\, p_r} + \sum_{0}^{k-h}{}_{\mu} \sum_{0}^{m_\mu - k + \mu}{}_{v} \binom{n_\mu^{(v)}}{2}$$

$$- \sum_{0}^{k-h}{}_{\mu} \binom{m_\mu}{3} + \binom{k}{4} - \binom{h-1}{4},$$

$$p_h < \sqrt[5]{z} < p_{h+1}.$$

Die Grösse h kann übrigens alle Werthe $h = k - 1; \ldots h + 1,\ h$ annehmen.

Mit Hilfe der Formel (12) liesse sich dieser Ausdruck nicht weiter entwickeln; es müsste zu diesem Zwecke die Formel (18) selbst herangezogen werden.

Ein Vergleich der bisher gewonnenen Resultate dieser, durch die Grössen $n, m, k, h, \ldots$ markirten stufenförmigen Entwicklung, lässt ein allgemeines Bildungsgesetz deutlich wahrnehmen. Für irgend eine Stufe c, $\left(p_c < \sqrt[q]{z} < p_{c+1},\ q \text{ eine ganze Zahl}\right)$, ist

$$(19)\quad \mathfrak{A}_s = |z| \prod_{2}^{c} - \sum_{c+1}^{n}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-c}{}_{v} \sum_{m-v+1}^{n^{(v)}}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_{m-v+1}\, p_r}$$

$$- \sum_{1}^{k-c}{}_{\mu} \sum_{1}^{m_\mu - k + \mu}{}_{r} \sum_{m_\mu - v + 1}^{n_\mu^{(v)}}{}_{r}\, \mathfrak{A}\, \frac{z}{p_{m_\mu - v + 1}\, p_{k-\mu+1}\, p_r} - \cdots$$

$$+ (-1)^{q-1} \left(\frac{k}{q-1}\right) + (-1)^{q} \binom{c-1}{q-1}.$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Unterschied zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Stufen mit fortschreitender Entwicklung ziemlich rasch abnimmt. Dieses Verfahren findet selbstverständlich seinen Abschluss, sobald die Stufe $\mathfrak{A} = 1$ erreicht wird.

Im Folgenden soll nun eine Methode gezeigt werden, welche das vollständige Erschöpfen des Theilergebietes $p_2 \ldots p_n$ entbehrlich macht.

5. Die Gleichung

$$(20)\quad \left|\frac{a}{b}\right| - \left|\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{a-c}{b}\right|$$

ist stets, aber auch nur dann richtig, wenn der Rest $\left|\frac{a}{b}\right|_r \geqq \left|\frac{c}{b}\right|_r$. Sie ist unter allen Umständen giltig, wenn c durch b theilbar ist. Dieser

Satz kann sofort auf das Product $|a|\prod_2^i = |a|\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ angewendet werden, wenn eine Zahl $c < a$ gefunden werden kann, welche durch $2 \,.\, 3 \ldots p_i = f_i$ theilbar ist. Ein wirklicher Vortheil für vorliegende Zwecke wird jedoch nur dann erwachsen, wenn die Differenz $a - c$ möglichst klein ausfällt. Es kommt demnach darauf an, die gegebene Zahl z zwischen Vielfachen von Primzahlen-Factoriellen $2 \,.\, 3 \ldots p_{i-1} \,.\, p_i$ so einzuschliessen, dass

$$\lambda \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p_{i-1} \,.\, p_i < z < (\lambda + 1) \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p_{i-1} \,.\, p_i, \quad \lambda < p_{i+1}$$

ist; selbstverständlich giebt es unter dieser Bedingung nur eine einzige Factorielle f_i.

Wurde nun zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_z$ die obere Grenze n von $|z|\prod_2^n$ bis auf i reducirt, so ist $\mathfrak{A}_z = z\prod_2^i + \sigma$; zieht man davon $\varphi(\lambda \,.\, f_i) = \lambda \,.\, f_i \prod_2^i$ ab, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}_z - \varphi(\lambda f_i) = (z - \lambda \,.\, f_i)\prod_2^i + \sigma. \tag{20*}$$

Dass sich dieses Product ungleich leichter bestimmen lässt als $|z|\prod_2^i$, liegt auf der Hand.

Für alle Zahlen von $7 - 24$ und von $31 - 48$ ist die Factorielle f_n *aller* Theiler von p_2 bis p_n kleiner als die Zahlen selbst; für alle andern Zahlen ist dies nicht der Fall. Der Unterschied zwischen einem Primzahlenquadrat p_n^2 und der entsprechenden Factorielle f_n wächst mit zunehmendem n ausserordentlich rasch.

In Wertheim's „*Zahlentheorie*" ist ein Beispiel für $z = 1000$ mittelst der Meissel'schen Formel ausgerechnet zu finden. Das Product $|1000|\prod_2^5$ wurde direct berechnet; es besteht aus $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15$ Gliedern.

Mittelst der Herbeiziehung von $f_7 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 210$ wird die Rechnung einfacher. Es ist $4 \,.\, 210 < 1000 < 5 \,.\, 210$,

$$|1000|\prod_2^5 = |1000 - 4 \,.\, 210|\prod_2^5 + 192 = 160\prod_2^5 + 192$$

$$= \mathfrak{A}_{160} - 5 + \left|\frac{160}{11}\right|\prod_2^5 + 192 = 38 - 5 + 3 + 192 = 228.$$

Je näher die Zahl z einem Vielfachen von f liegt, desto vortheilhafter ist die Benützung desselben. Am einfachsten wird sich die Entwicklung für $z=f$ geben. Sei beispielsweise $z=2.3.5.7.11=2310=f_6$, so ist hier $p_n=47$, $n=16$, $p_m=13$, $m=7$, $p_{n'}=13$, $n'=7$ und nach Formel (10):

$$\mathfrak{A}_{2310}=1.2.4.6.10-\sum_7^{16}\mathfrak{A}\frac{2310}{p_r}-\mathfrak{A}\frac{2310}{13^2}+\binom{16}{2}+\binom{7}{2}-\binom{6}{2}-\binom{5}{2}$$

$$=480-\mathfrak{A}_{177}-\mathfrak{A}_{135}-\mathfrak{A}_{121}-\mathfrak{A}_{100}-\mathfrak{A}_{79}-\mathfrak{A}_{74}-\mathfrak{A}_{62}-\mathfrak{A}_{56}$$
$$-\mathfrak{A}_{53}-\mathfrak{A}_{49}-\mathfrak{A}_{47}+116$$

$$=480-261+116=335.$$

Bei der Aufstellung einer Primzahlen-Tafel dürfte es sich empfehlen, von diesem abkürzenden Verfahren behufs Verification der Primzahlen-Zeiger (n in p_n) Gebrauch zu machen.

Liegt die gegebene Zahl näher bei $(\lambda+1)f_i$ als bei λf_i, so kann der Umstand benützt werden, dass $(\lambda+1)f_i-1$ durch irgend eine Combination ohne Wiederholung c der Primzahlen von p_2 bis p_i getheilt, den grösstmöglichen Rest $C-1$ giebt. Daher lässt sich auch in diesem Falle die Formel (20) anwenden; es ist dann:

$$|(\lambda+1)f_i-1|\prod_2^i-|z|\prod_2^i=|(\lambda+1)f_i-1-z|\prod_2^i.$$

Nun bezeichnet allgemein $|u|\prod_2^n$ die Anzahl Zahlen $\leqq u$, welche durch keine der Primzahlen von p_2 bis p_n theilbar sind; da aber $(\lambda+1)f_i$ unter diese Zahlen offenbar nicht gehört, so folgt

$$|(\lambda+1)f_i-1|\prod_2^i=(\lambda+1)f_i|\prod_2^i=(\lambda+1).1.2.4\ldots(p_i-1)$$

und

$$(21)\qquad |z|\prod_2^i=(\lambda+1)\,1.2.4\ldots(p_i-1)-|(\lambda+1)f_i-z-1|\prod_2^i.$$

Endlich kann auch die Formel (4) behufs Abkürzung der Entwicklung mit Vortheil angewendet werden, wenn $\left|\frac{p_n^2}{p_{n+1}}\right|\leqq u\leqq p_{n+1}-1$ ist. Denn die kleinste, mittelst der Theilerreihe $p_2\ldots p_n$ bestimmbare Anzahl $\mathfrak{A}_u$ ist die für die Zahl p_n^2, während die grösste die für p_{n+1}^2-1 ist. In beiden Fällen ist nach Formel (4):

$$(22)\qquad \left|\frac{p_2^n}{p_{n+1}}\right|\prod_2^n=1,\quad \left|\frac{p_{n+1}^2-1}{p_{n+1}}\right|\prod_2^n=(p_{n+1}-1)\prod_2^n=1.$$

Wenn daher in (20*): $\left|\frac{p_i^2}{p_{i+1}}\right| \leqq z - \lambda f_i \leqq p_{i+1} - 1$ ist, so folgt: $|z - \lambda f_i| \prod\limits_2^i = 1$, und wenn in (21) $\left|\frac{p_i^2}{p_{i+1}}\right| \leqq (\lambda + i) f_i - z - 1 \leqq p_{i+1} - 1$ ist, folgt ebenso: $|(\lambda + 1) f_i - z - 1| \prod\limits_2^i = 1$. Allgemein, wurde $|z| \prod\limits_2^n$ auf $|u| \prod\limits_2^i$ reducirt, und ist $p_g < \sqrt{u} < p_{g+1}$, ferner $g \leqq i \leqq \mathfrak{A}_u$, so ist nach Formel (1*): $|u| \prod\limits_2^i = \mathfrak{A}_u - i + 1$.

Salzburg, im September 1889.

Ueber ein System linearer Gleichungen, welches in Verbindung mit einer ebenen Curve 3. O. auftritt.

Von

J. Rosanes in Breslau.

Wenn $a_1|a_2|a_3$ die Symbole in der Gleichung einer ebenen Curve dritter Ordnung C_3, $\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3$ die ihrer Hesse'schen Covariante H bedeuten, so lässt sich die bekannte Salmon'sche Identität dahin aussprechen, dass die cubische Contravariante $(a\alpha u)^3$ in den Variabeln $u_1|u_2|u_3$ identisch zu Null wird. Diese wichtige Beziehung zwischen den Coefficienten von C_3 und H, welche mit einem Schlage in die einfachen Lagenbeziehungen zwischen den Schnittpunkten jener Curven Einblick gewährt, wird aber in der Regel durch Einsetzung der Werthe für die Coefficienten von H verificirt.

In seiner Abhandlung „Sulle cubiche ternarie sizigetiche" (Collectanea Mathematica, ed. L. Cremona et E. Beltrami, Roma 1881) geht Herr Battaglini umgekehrt von dem Ausdrucke $P=(a\varrho u)^3$ aus, indem er ihn zur Definition derjenigen Curven dritter Ordnung benutzt, deren Symbole ϱ_i den Ausdruck P identisch zu Null machen. Dass C_3 selbst dieser Forderung genügt, ist evident, ebenso dass die Existenz einer zweiten Lösung die einer zweigliedrigen Gruppe von Lösungen zur Folge haben würde. Von ihr beweist Herr Battaglini, dass sie den sogenannten syzygetischen Büschel bildet.

Da aber Herr B. einen Beweis dafür, dass die Aufgabe wirklich mehr als eine Lösung besitzt, nicht mittheilt, so möchte ich mir erlauben, auf diesen Gegenstand und gewisse andere hier nur anzudeutende Fragen mit einigen Worten einzugehen.

Bildet man aus den Symbolen $a_1\mid a_2\mid a_3$, $\varrho_1\mid\varrho_2\mid\varrho_3$ zweier unbestimmter cubischer ternärer Formen (Curven) C_3, Γ_3 und den Variabeln $u_1\mid u_2\mid u_3$ den Ausdruck $P=(a\varrho u)^3$, so führt die Forderung $P\equiv 0$ zu den 10 in den Coefficienten von C_3 und Γ_3 bilineären Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} (a\varrho)_1^3=0, & (a\varrho)_2^3=0, & (a\varrho)_3^3=0, & 3(a\varrho)_1^2(a\varrho)_2=0, \\ 3(a\varrho)_1^2(a\varrho)_3=0, & 3(a\varrho)_2^2(a\varrho)_1=0, & 3(a\varrho)_2^2(a\varrho)_3=0, \\ 3(a\varrho)_3^2(a\varrho)_1=0, & 3(a\varrho)_3^2(a\varrho)_2=0, & 6(a\varrho)_1(a\varrho)_2(a\varrho)_3=0, \end{cases}$$

worin $(a\varrho)_i$ die Adjuncte von u_i in der Determinante $(a\varrho u)$ bedeuten soll.

Bezeichnen wir die linken Seiten in (1) in der gegebenen Folge kurz durch $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_9$ und die Coefficienten von Γ_3 in entsprechender Folge durch $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_9$, so dürfen wir setzen:

$$\Theta_k = \sum_i p_{ik}\,\xi_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, 9) \tag{2}$$

wobei die Summation sich, wie alle folgenden auf die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 9$ erstreckt. Durch Einführung der 10 Unbestimmten $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_9$ und ihrer Symbole $h_1 \mid h_2 \mid h_3$ durch die Gleichungen

$$\eta_0 = h_1^3,\ \eta_1 = h_2^3, \ldots, \eta_9 = h_1 h_2 h_3$$

erhalten wir:

$$\sum_k \eta_k \Theta_k = \sum_{i,k} p_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = (a\varrho h)^3.$$

Fasst man in dieser Gleichung die Buchstaben h_i als mit ϱ_i äquivalente Symbole von Γ_3 auf, wodurch $\eta_k = \xi_k$ wird, so folgt für beliebige Werthe der Indices i, k die Relation

$$p_{ik} + p_{ki} = 0,$$

d. h. *die 10 Gleichungen* (1) *bilden rücksichtlich der Coefficienten von* Γ_3 *ein „schiefsymmetrisches" System* (gauche symétrique). Da sie aber, wie oben bemerkt, *eine* gemeinsame Lösung jedenfalls besitzen, d. h. ihre Determinante gleich Null ist, so müssen nach einem bekannten Satze aus der Determinantentheorie auch sämmtliche ersten Minoren verschwinden, m. a. W.

Das System (1) *steht in „zweifacher Abhängigkeit", die Lösungen desselben bilden eine zum Mindesten zweigliedrige Gruppe.*

Es giebt sonach zu einer gegebenen C_3 einen Büschel von Γ_3 derart, dass $(a\varrho u)^3 \equiv 0$ ist. Dass die Abhängigkeit der Gleichungen (1) im Allgemeinen keine höhere ist, zeigt der Fall

$$C_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Die Eigenschaft des Systems (1) lässt auch folgende Deutung zu:

„Die sämmtlichen Punkttripel, welche durch eine veränderliche Grade aus einer ebenen Curve 3. O. ausgeschnitten werden, bilden eine nur achtgliedrige Gruppe."

Die Methode der Beweisführung ist derart, dass sie auch für höhere Ordnungen anwendbar ist.

Bei besonderen Curven C_3 kann die Abhängigkeit der Gleichungen (1) eine höhere werden, muss aber immer gradzahlig bleiben. Besonders sei aber bemerkt, dass die Abhängigkeit eine vierfache wird, sobald C_3 in drei Graden zerfällt. Die viergliedrige Gruppe der sich

ergebenden Curven Γ_3 kann dann durch die 4 Formen: x_1^3, x_2^3, x_3^3, $x_1 x_2 x_3$ dargestellt werden. Sie besitzt die ausgezeichnete Eigenschaft, *auf jeder Geraden der Ebene Punkttripel auszuschneiden, welche eine nur dreigliedrige Gruppe bilden.*

Bei drei Curven zweiter Ordnung f, φ, ψ constituiren die Graden der Ebene, welche von ihnen in drei abhängigen Punktepaaren getroffen werden, die sogenannte Hermite'sche Form. Dieselbe verschwindet bei independenten f, φ, ψ nur dann identisch, wenn sie eine Grade gemein haben.

Definiren wir entsprechend die Gesammtheit der Graden, welche von vier independenten Curven dritter O. C_3, C_3', C_3'', C_3''' in vier abhängigen Punkttripeln getroffen werden, als Hermite'sche Form (Contravariante) jener vier Curven, so erkennt man, dass dieselbe in der Regel durch eine Curve 6ter Classe dargestellt wird. *Die vier Formen x_1^3, x_2^3, x_3^3, $x_1 x_2 x_3$ haben jedoch die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Hermite'sche Form identisch verschwindet.*

Eine viergliedrige Gruppe, deren Hermite'sche Form identisch Null ist, ist so beschaffen, dass jede Grade der Ebene sich durch einen Kegelschnitt zu einer Curve der Gruppe ergänzen lässt, und umgekehrt.

Breslau, im März 1890.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig, im März 1890.)

Für das Jahr 1893.

Durch die allgemeinen Untersuchungen von Herrn Lie über die Differentialinvarianten der endlichen und unendlichen Transformationsgruppen*) sind die Mittel und Wege gegeben, um zu einer Invariantentheorie beliebiger Differentialgleichungen zu gelangen. Die betreffenden allgemeinen Methoden von Lie sind in den zahlreichen Untersuchungen über die Invarianten specieller Differentialgleichungen fast gar nicht berücksichtigt worden, es erscheint der Gesellschaft daher wünschenswerth, dass

die Invariantenbestimmung einer ausgedehnteren Kategorie zunächst von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Grund der Lie'schen Begriffsbestimmungen und Methoden

in Angriff genommen werde. Um die Art der Aufgaben zu bezeichnen, deren Erledigung der Gesellschaft erwünscht sein würde, führen wir beispielsweise an die Bestimmung der Invarianten, welche die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

einer Ebene (x, y) gegenüber der unendlichen Gruppe

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \chi(x, y)$$

aller Punkttransformationen dieser Ebene besitzt, *oder* die Bestimmung aller Invarianten eines Differentialausdrucks erster Ordnung

$$\Omega(x, y, y')$$

gegenüber der genannten unendlichen Gruppe**).

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer

---

*) Vergl. namentlich auch Bd. 24 der Mathemat. Annalen. S. 537 ff.

**) ω und Ω sollen hier sogen. „analytische" Functionen bezeichnen, welche in der Umgebung eines Werthsystems $x_0 y_0 y_0'$ von allgemeiner Lage, in gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$, $y - y_0$, $y' - y_0'$ entwickelt werden können.

andern Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Umschlag begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden würde, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Ueber algebraische Correspondenzen.

Zweite Abhandlung:

Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve.

Von

A. Brill in Tübingen.

In der gemeinsamen Arbeit über die algebraischen Functionen von Herrn Nöther und mir (VII. Band dieser Annalen) wird der Begriff der „Punktgruppen" einer algebraischen Curve an die Spitze der Theorie gestellt. Einer solchen kommt insbesondere dann eine von den ausschneidenden Curven in gewissem Sinne unabhängige Existenz zu, wenn sie „Specialgruppe" ist. Wir verstehen darunter eine Punktgruppe, welche den adjungirten Curven, die durch diese Punkte gehen, weniger Bestimmungsstücke entzieht, als die Anzahl der Punkte beträgt, die sie enthält. Eine Specialgruppe, die man auf einer Curve gefunden hat, steht jedoch nicht vereinzelt da, sondern lässt sich mit anderen zu einer Schaar von einer gewissen Mannigfaltigkeit zusammenfassen, der wiederum eine andere solche Schaar entspricht. Nach dem Riemann-Roch'schen Satz nämlich trifft jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus einer Curve n^{ter} Ordnung eine Specialgruppe ausschneidet, diese in den Punkten einer weiteren Specialgruppe, die einer Schaar angehört, deren Mannigfaltigkeit durch die Zahl der Punkte der ersten Gruppe und die Mannigfaltigkeit ihrer Schaar bestimmt ist. Wir haben diesem Satz den Namen Riemann's, des eigentlichen Begründers einer Theorie der algebraischen Functionen, und des um dieselbe verdienten Roch geben zu sollen geglaubt, weil in den Arbeiten Beider sich wesentliche Bestandtheile dieses grundlegenden Satzes vorfinden. Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen (Borchardt's Journ. Bd. 54, § 5) den Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken einer Specialgruppe und den Constanten der Function, die sie zu Unendlichkeitspunkten besitzt, für einen besonderen Fall aufgestellt und damit die Grundlage für Roch's (ibd. Bd. 64) allgemeine Abzählung der Constanten einer algebraischen Function ge-

liefert. Auch erkennt Riemann im Zusammenhang mit der Frage nach dem identischen Verschwinden der ϑ-Functionen (ibd. Bd. 65) in zwei ihm dort nahe gerückten Fällen das gegenseitige Entsprechen gewisser Schaaren von Specialgruppen. Aber es erübrigte, diese Gesichtspunkte in einen algebraischen Satz zusammenzufassen, welcher die Reciprocität der Specialgruppen allgemein feststellt, und dessen Fassung auf den Begriff der Punktgruppe mit allen seinen Merkmalen, Mannigfaltigkeit der Schaar, Unterscheidung ihrer beweglichen und festen Punkte u. s. w., sich gründet, wie man ihn in expliciter Form weder bei Riemann noch bei Roch vorfindet.

Es muss somit festgestellt werden, dass weder Riemann noch Roch den nach ihnen benannten Satz wirklich ausgesprochen haben, wiewohl neuere Schriftsteller ihn unter dem von uns vorgeschlagenen Namen acceptirt und zur Grundlage weiterer Untersuchungen gemacht haben, ohne dieses Umstandes zu gedenken. Allerdings tragen zu dieser Auffassung zwei Stellen unseres gemeinsamen Aufsatzes bei, in welchen Riemann und Roch die Entdeckung jenes Satzes unumschränkt zuerkannt oder doch nicht ausdrücklich genug das Neue hervorgehoben wird, das wir hinzugefügt. Uebrigens hat auch Herr Nöther schon seinerseits in einer Note im 97. Bd. des Journals von Kronecker unsere Ansprüche auf den Satz geltend gemacht.

Erhält durch den Riemann-Roch'schen Satz der Begriff der Specialgruppe eine ausgezeichnete Stellung in der Theorie der algebraischen Functionen überhaupt, so erscheint es um so mehr geboten, auf eine diesem Begriff noch anhaftende Unsicherheit hinzuweisen, die darin besteht, dass man die Existenz der Specialgruppen auf einer allgemeinen Curve bis jetzt nur durch eine summarische Abzählung der Gleichungen, von denen sie abhängen, nachgewiesen hat, ohne deren gegenseitige Vereinbarkeit zu prüfen. Dass hierbei eine Täuschung nicht ausgeschlossen ist, zeigt ein Beispiel, das ich unten anführen werde. Ich beabsichtige nun im Folgenden die Verträglichkeit der Gleichungen dadurch zu erweisen, dass ich den Weg angebe, auf dem sich die gemeinsamen Lösungen finden lassen, und, gewissermassen als Probe der Stichhaltigkeit des Verfahrens, für den allgemeinen Fall, nämlich wenn besondere Beziehungen zwischen den Moduln der vorliegenden Curve nicht bestehen, die Anzahl der gemeinsamen Lösungen des Gleichungssystems bestimme, welche das Problem der Specialgruppen mit sich bringt*). Die so gestellte Aufgabe verlangt eine vielverzweigte

*) Zwar ist die allgemeine Schlussformel, zu der ich hier gelange, bereits in der gemeinsamen Arbeit mit Herrn Nöther angegeben, auch in Salmon-Fiedler's Geometrie der höheren Curven (3. Aufl., S. 422) übergegangen. Aber sie blieb dort unbewiesen, weil damals die algebraischen Hilfsmittel für eine strenge und allgemeine Behandlung der Frage noch fehlten.

Vorbereitung, und bildet eigentlich nur das Bindeglied zwischen drei wesentlich verschiedenen Untersuchungen.

Der erste Theil dieser Abhandlung (Abschnitt II) umgrenzt die Bedingungen, welche das Verschwinden sämmtlicher Determinanten einer Matrix nach sich zieht, und enthält den Beweis für eine bereits bekannte Abzählungsformel. Der zweite (Abschn. III—V) beschäftigt sich mit der Bestimmung der Werthsysteme, die n Correspondenzen zwischen n Punkten einer Curve zugleich genügen. Dieselbe beruht auf den Ergebnissen einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung über die reducirte Resultante*) und einer anderen über die Gestalt einer Correspondenzgleichung**), knüpft an sie jedoch nicht unmittelbar an. Vielmehr nöthigte mich die Menge des Stoffes, ein Zwischenglied auszulassen und die einwandfreie Begründung von zwei hier benutzten Formeln, welche jedoch bereits seit Langem bekannt und auch von anderer Seite bestätigt sind, in einer späteren Arbeit nachfolgen zu lassen. Der dritte Theil endlich (VI, VII, VIII) enthält die Anwendung der beiden ersten auf das Problem der Specialgruppen im Falle einer Minimalzahl von Punkten, welchen Riemann im § 5 seiner „Abel'schen Functionen" hervorhebt.

Ich muss, bevor ich in den Gegenstand eintrete, noch einer sehr bemerkenswerthen Methode gedenken, durch die neuerdings Herr Castelnuovo in einer Note (Bd. V der Berichte der Acad. dei Lincei, Sept. 1889), von der ich eben beim Abschliessen dieser Arbeit Kenntniss erhalte, das Ergebniss meines dritten Theiles: die Anzahl der Grenz-Specialgruppen (rationalen Involutionen), und darüber hinaus die Anzahl sämmtlicher Specialgruppen, die auf einer Curve vorkommen können, ermittelt. Man kann, wie ich früher einmal (d. Ann. Bd. 2) gezeigt habe, die Frage der Specialgruppen auf die nach den mehrfach schneidenden Sehnen (bezw. gewissen ebenen Räumen) von Curven in höheren Räumen zurückführen. Auf Grund nun der Forderung, dass der Schluss von zerfallenden auf nicht zerfallende Raumcurven für diese Art von Abzählungen berechtigt ist***), bestimmt Herr Castelnuovo an der Hand der von H. Schubert geschaffenen Abzählungsmethoden die gewünschte Zahl. Das Resultat des VIII. Abschnittes steht zwar, wie gesagt, an Allgemeinheit hinter der Formel des Herrn Castelnuovo zurück; dafür aber zeigt die hier gewählte algebraische Formulirung die Mittel zur

*) Abhdl. d. Münch. Acad. d. Wiss. II. Cl. Bd. XVII.

**) Diese Ann. Bd. 31.

***) Dieses Princip besitzt in der Gestalt, in der es Herr Castelnuovo verwendet, Aehnlichkeit mit den im VI. und VII. Abschnitt entwickelten Formeln, von denen es sich jedoch durch das (bei mir wechselnde) Vorzeichen unterscheidet, und scheint auf denselben Grundlagen wie diese Formeln zu beruhen.

wirklichen Ausführung der Elimination und zur Berechnung der gewünschten Lösungen, und bedarf deshalb nicht nur nicht der Anwendung eines besonderen „Princips", sondern geht auch eine Strecke weiter auf dem Wege der Entwicklung zu einem Problem der Algebra, der nach meiner Ansicht überhaupt den Resultaten der abzählenden Geometrie vorgezeichnet ist.

I.

Algebraische Formulirung des Problems der Specialgruppen.

Nach § 9 der Abhandlung von Herrn Nöther und mir kann man das Problem der Specialgruppen, wie folgt, aussprechen:

Zu Grunde gelegt sei eine algebraische Curve $f(xy) = 0$ von der n^{ten} Ordnung und dem Geschlecht p, mit beliebig vielfachen Punkten, deren Zweige sich jedoch gegenseitig nicht berühren. Gegeben sei ferner eine ∞^{P-1}-fach lineare Schaar von adjungirten (durch jeden α-fachen Punkt von f $(\alpha - 1)$-fach hindurchgehenden) Curven:

$$\alpha_1 \varphi_1(xy) + \alpha_2 \varphi_2(xy) + \cdots + \alpha_P \varphi_P(xy) = 0,$$

wo die α willkürliche Grössen sind, die φ ganze Functionen, die sich adjungirt verhalten. Man soll auf der Curve f eine Gruppe G_R von R Punkten so bestimmen, dass die durch sie hindurchgehenden Curven der Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden, wo die Zahl

$$q > P - 1 - R$$

ist, während $R \lesseqgtr P$ sein kann.

Von den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \varphi_1(x_1 y_1) + \alpha_2 \varphi_2(x_1 y_1) + \cdots + \alpha_P \varphi_P(x_1 y_1) &= 0,\\
\alpha_1 \varphi_1(x_2 y_2) + \alpha_2 \varphi_2(x_2 y_2) + \cdots + \alpha_P \varphi_P(x_2 y_2) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
\alpha_1 \varphi_1(x_R y_R) + \alpha_2 \varphi_2(x_R y_R) + \cdots + \alpha_P \varphi_P(x_R y_R) &= 0
\end{aligned}$$

sind alsdann

$$r = q - (P - 1 - R)$$

eine identische Folge der übrigen, eine Beziehung, die sich ausdrückt durch das Verschwinden sämmtlicher $(R - r + 1)$-reihigen Determinanten des aus den Elementen $\varphi(xy)$ gebildeten „Rechtecks", der „Matrix" dieser Determinanten. Es ist also die Aufgabe 1. zu bestimmen, wie viele von den Punkten $x_1 y_1, \ldots x_R y_R$ noch willkürlich annehmbar sind, d. h. wie viele von einander unabhängige Gleichungen das Verschwinden jener Determinanten mit sich führt. 2. Die Anzahl der Punktsysteme zu ermitteln, die nach beliebiger Verfügung über

jene willkürlich annehmbaren zu diesen gefunden werden können, so dass die angegebenen Gleichungen alle erfüllt sind.

Was die erste dieser Fragen angeht, so ergiebt*) eine einfache Abzählung (wie auch die Ueberlegungen des II. Abschnitts), *dass aus dem Verschwinden der Determinanten des Rechtecks:*

$$r[P-(R-r+1)+1]=r(q+1)$$

von einander unabhängige Gleichungen fliessen. Hiernach scheint es, als ob unser Problem in dem Falle, dass $r(q+1) \leqq R$ ist, immer Lösungen besitzt. Indessen können sich unter Umständen Widersprüche einstellen, die sich dadurch kenntlich machen, dass die Anzahl der Lösungen gleich Null wird. Dies tritt z. B. in dem Fall:

$$R=3, \quad q=2, \quad r=1$$

ein, wie man mittelst der Schlussformel des Abschn. VIII bestätigt. In der That liefert der Riemann-Roch'sche Satz eine *weitere* Bedingung für das Problem, welche in § 9 der erwähnten Abhandlung aufgestellt wird, und die diesen Fall ausschliesst. Die Anzahlbestimmung unterrichtet hier von dem Eintreten eines Widerspruchs. — Von dem so charakterisirten Problem beansprucht wegen seiner Beziehungen zur Modulnfrage ein hervorragendes Interesse der von Riemann erwähnte Grenzfall, dass bei gegebenem P die Zahl R einen Maximalwerth annimmt. Wenn man sich auf adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung beschränkt, was in diesem Fall der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, und demnach die Zahl $P=p$, dem Geschlecht der Curve f setzt, wo denn der Riemann-Roch'sche Satz die weitere Beziehung zwischen r und q giebt (a. a. O. § 5):

$$(R-Q)=2(r-q),$$

so tritt der erwähnte Fall ein, wenn (ibd. § 10):

1) p eine gerade Zahl ist, für $R=\frac{3p}{2}-3$; $r=\frac{p}{2}-1$; $q=1$.

2) „ „ ungerade „ „ „ $R=\frac{3p-7}{2}$; $r=\frac{p-3}{2}$; $q=1$.

Die durch die r willkürlichen Punkte mitbestimmten $R-r$ weiteren Punkte sind selbstverständlich nicht eindeutig erhältlich. Es ist vielmehr eine schwierige Aufgabe, die Werthsysteme $x_i y_i$ zu finden, für welche alle $(p-1)$-reihigen Determinanten jenes Rechtecks von p Vertical- und R Horizontalreihen verschwinden, oder auch nur durch Abzählungen die Anzahl der Specialgruppen $G_R^{(r)}$ zu bestimmen, die zu r gegebenen Punkten gefunden werden können, derart, dass die durch sie gehenden adjungirten Curven noch eine ∞^1-Schaar bilden. Durch den Riemann-Roch'schen Satz wird aber dieses Problem auf ein anderes

*) Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Determinanten, § 8.

zurückgeführt, welches weit leichter anzugreifen ist, nämlich das folgende:

Die Anzahl der Gruppen $G_Q^{(1)}$ von $Q = 2p - 2 - R$ Punkten zu bestimmen, die zu einem willkürlich annehmbaren Punkt gehören und so beschaffen sind, dass alle durch sie gehenden adjungirten Curven noch eine ∞^r-Schaar bilden. Wenn man einerseits r, andererseits $q = 1$ Punkt willkürlich auf f annimmt, so entspricht *jeder* Gruppe $G_R^{(r)}$, die zu den r Punkten als Specialgruppe von der angegebenen Eigenschaft gehört, nur *eine* Gruppe G_Q^1, die jenen einen Punkt enthält, weil sich durch die $R + 1$ Punkte nur noch eine adjungirte Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen lässt, und ebenso umgekehrt. Demnach entsprechen sich die Lösungen beider Probleme eindeutig, und ihre Anzahl ist die gleiche. Wir haben also gewisse Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots x_Q y_Q$, wo $Q = \frac{p}{2} + 1$, bezw. $= \frac{p+3}{2}$ ist, zu bestimmen, für welche die linearen Gleichungen:

$$\alpha_1 \varphi_1(x_i y_i) + \alpha_2 \varphi_2(x_i y_i) + \cdots + \alpha_p \varphi_p(x_i y_i) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots Q)$$

in der Weise erfüllt sind, dass jede eine identische Folge der $Q - 1$ übrigen ist. Diese Bedingung zieht das Verschwinden der Q-reihigen Determinanten des Rechtecks nach sich:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \ldots & \varphi_p(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \ldots & \varphi_p(x_2 y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_Q y_Q) & \varphi_2(x_Q y_Q) & \ldots & \varphi_p(x_Q y_Q) \end{matrix} \right\|,$$

während noch die Gleichungen bestehen:

$$f(x_1 y_1) = 0; \quad f(x_2 y_2) = 0; \quad \ldots \; f(x_Q y_Q) = 0.$$

Das so formulirte Problem lässt sich mit *algebraischen* Hilfsmitteln erfolgreich behandeln, wie ich nun zeigen will.

II.

Bedingungen für das Verschwinden der Determinanten eines Rechtecks.*)

Wir beginnen mit der Aufstellung gewisser Gleichungen, welche die nothwendige und hinreichende Bedingung darstellen dafür, dass alle k-reihigen Determinanten eines „Rechtecks" von Elementen (einer „Matrix") mit k Horizontalreihen („Zeilen") und $k + i$ Verticalreihen („Reihen"):

*) Das Nachfolgende enthält den Beweis der in § 1 meines Aufsatzes „Ueber Elimination u. s. w. (d. Ann. Bd. V) mitgetheilten Formeln.

$$\left\|\begin{matrix} 1_1 & 2_1 & 3_1 & \dots & (k+i)_1 \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 & \dots & (k+i)_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1_k & 2_k & 3_k & \dots & (k+i)_k \end{matrix}\right\|$$

verschwinden, wobei die Elemente m_n Functionen von einer so grossen Anzahl von Veränderlichen sein mögen, dass das Problem einen Sinn hat.

Scheidet man aus den Reihen irgend $k+1$ aus und vereinigt sie wieder zu einem Rechteck (die Zahl der Zeilen ist immer gleich k angenommen, wenn nichts beigefügt wird), so bestehen zwischen den $k+1$ Determinanten, die aus dem neuen Rechteck durch Weglassen je einer Reihe hervorgehen, k Gleichungen, die man erhält, wenn man das Rechteck zu einem Quadrat von $k+1$ Zeilen und Reihen dadurch ergänzt, dass man eine der Zeilen wiederholt.

So führt das Rechteck:

$$\| 1\,2\,3\,4 \dots k+1 \|_k,$$

(dessen k Zeilen aus der angeschriebenen durch Anhängen der k Indices $1\,2 \dots k$ entstehen), zu den $k+1$ identischen Gleichungen:

(1) $1_\varrho(2\,3\,4 \dots k+1) + 2_\varrho(1\,3\,4 \dots k+1) + \cdots + (k+1)_\varrho(1\,2\,3 \dots k) = 0,$

wo $(2\,3\,4 \dots k+1)$ die Determinante:

$$(2\,3\,4 \dots k+1) = \left|\begin{matrix} 2_1 & 3_1 & 4_1 & \dots & (k+1)_1 \\ 2_2 & 3_2 & 4_2 & \dots & (k+1)_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2_k & 3_k & 4_k & \dots & (k+1)_k \end{matrix}\right|$$

ist, und $\varrho = 1, 2, 3, \dots k$ gesetzt werden kann. Ich schreibe in der Folge die Identitäten in der kürzeren Form:

(1a) $\sum 1_\varrho(2\,3\,4 \dots k+1) = 0. \quad (\varrho = 1, 2, \dots k).$

Wir wollen nun annehmen, dass irgend zwei Determinanten des Rechtecks:

$$\|1\,2\,3 \dots k+1\|_k$$

verschwinden. Sei also z. B.:

$$(2\,3 \dots k+1) = 0; \quad (1\,2\,3 \dots k) = 0.$$

Dann bestehen wegen der Identitäten (1) die $k+1$ Gleichungen:

$$2_\varrho(1\,3\,4 \cdots k+1) + 3_\varrho(1\,3\,4 \cdots k+1) + \cdots$$
$$+ k_\varrho(1\,2 \cdots k-1,\, k+1) = 0.$$

Diese $k+1$ linearen Gleichungen zwischen den $k-1$ Determinanten sind aber nur erfüllbar, entweder: 1. wenn die $k-1$ Deter-

minanten alle Null sind, oder: 2. wenn alle $(k-1)$-reihigen Determinanten des Rechtecks von $k-1$ Reihen und k Zeilen:

$$\left\|\begin{matrix} 2_1 & 3_1 & \dots & k_1 \\ 2_2 & 3_2 & \dots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2_k & 3_k & \dots & k_k \end{matrix}\right\|,$$

das wieder abgekürzt durch:

$$\|2\,3\,\dots\,k\|_k$$

bezeichnet werden möge, verschwinden.

Enthalten also beispielsweise alle Elemente zwei Veränderliche x, y, so verschwinden *alle* Determinanten *zugleich* für diejenigen Werthepaare, welche die zwei:

$$(2\,3\,\dots\,k+1),\quad (1\,2\,3\,\dots\,k)$$

zum Verschwinden bringen, aber *nicht* die Determinanten des Rechtecks:

$$\|2\,3\,\dots\,k\|$$

auf Null reduciren. Der Ausdruck also, der gleich Null gesetzt die Werthe einer der beiden Variabeln ergiebt, für die alle Determinanten verschwinden, (die „Resultante" des Rechtecks) ist ein Quotient, dessen Zähler die Resultante aus jenen beiden Determinanten ist, und dessen Nenner gleich der Resultante aus den Gleichungen des Rechtecks mit 2 Verticalreihen weniger ist. Die Bildung der Letzteren ist aber im Allgemeinen eine leichtere Aufgabe, auf welche die Erstere somit zurückkommt. Man kann dieses Ergebniss noch in einer anderen Form ausdrücken, die wir im Folgenden vorziehen. Wenn man nämlich unter:

$$(1\,2\,3\,\dots\,k+1)_k$$

die *Anzahl* der Lösungen (im obigen Fall: Werthepaare) versteht, welche alle Determinanten des entsprechenden Rechtecks zum Verschwinden bringen, (den Grad der „Resultante des Rechtecks"), ferner unter:

$$\{1\,2\,3\,\dots\,k)_k\,(2\,3\,4\,\dots\,k+1)_k\}$$

die Anzahl derjenigen, die gleichzeitig die beiden in $\{\,\}$ eingeschlossenen Determinanten zu Null machen, so ist nach dem Gesagten:

$$(2)\quad (1\,2\,3\dots k+1)_k = \{(1\,2\,3\dots k)_k\,(2\,3\,4\dots k+1)_k\} - (2\,3\dots k)_k.$$

Man kann nun weiterhin die Ermittlung der Lösungen, welche die Determinanten der Matrix:

$$\|1\,2\,3\,\dots\,k+2\|_k$$

verschwinden machen, zurückführen auf die eben gelöste Aufgabe, und findet die Anzahl dieser Lösungen — unter Anwendung einer der

eben eingeführten Bezeichnungsweise analogen — durch die Formel ausgedrückt:

$$(3)\quad (1\,2\,3\,\ldots\,k+2)_k = \{(1\,2\,3\,\ldots\,k+1)\,(3\,4\,\ldots\,k+2)\}$$
$$-\{(1\,2\,3\ldots k)\,(3\,4\,\ldots\,k+1)\} + (3\,4\ldots k),$$

wo wieder: $\{(1\,2\,3\,\ldots\,k+1)\,(3\,4\,\ldots\,k+2)\}$ die Anzahl der Lösungssysteme (diesmal von wenigstens 3 Veränderlichen) bedeutet, die zugleich die Determinanten der eingeschlossenen Matrix und die einzeln bezeichnete Determinante zu Null machen, u. s. w. Anstatt jedoch diese Formel gesondert zu beweisen, wende ich mich gleich zu der allgemeinen Aufgabe, diejenigen Lösungssysteme zu finden, die alle Determinanten des Rechtecks:

$$\|1\,2\,3\,\ldots\,k+i\|_k$$

zum Verschwinden bringen, beziehungsweise die Anzahl:

$$(1\,2\,3\,\ldots\,k+i)_k$$

dieser Lösungen zu ermitteln, wo $k > i$ ist.

Hinsichtlich der Beschaffenheit der Elemente setze ich den sogenannten „allgemeinen“ Fall voraus, d. h. ich nehme an, dass das Verschwinden der einzelnen Determinanten der Rechtecke (von k Zeilen) wirklich soviele Bedingungen mit sich bringt, wie beispielsweise in dem Fall, dass die einzelnen Elemente ganze Functionen gleichhohen Grades mit unbestimmten Coefficienten aller Veränderlichen sind. — Die Zahl der Veränderlichen sei mindestens gleich $i+1$. Dann lässt sich zunächst zeigen, dass das Verschwinden aller Determinanten der beiden Rechtecke ($1 \leqq g \leqq i$):

$$(4)\quad \begin{cases} \|1\,2\,3\,\ldots\,i,\ i+1,\ \ldots\,k,\ \ldots\,k+g-1\|, \\ \|i+1,\ \ldots\,k+g\| \end{cases}$$

mit $k+g-1$, bezw. $k+g-i$ Reihen und je k Zeilen (der untere Index k ist weggelassen worden), d. h. der k-reihigen des ersten, der $(k+g-i)$-reihigen des zweiten Rechtecks, immer auch das Verschwinden der Determinanten der folgenden beiden Rechtecke — ich werde abkürzend auch von dem „Verschwinden der Rechtecke“ sprechen —:

$$(5)\quad \begin{cases} \|1\,2\,3\,\ldots\,i\,\ldots\,k\,\ldots\,k+g\|, \\ \|i+1\,\ldots\,k+g+1\| \end{cases}$$

nach sich zieht, ausser wenn die Determinanten des Rechtecks:

$$\|i+1\,\ldots\,k+g-1\|$$

zugleich Null werden.

Was das Letzte der Rechtecke (5) angeht, so verschwindet dasselbe offenbar immer dann, wenn das Letzte der (4) verschwindet.

Hinsichtlich des ersten der (5) betrachte man die Systeme von je k linearen Gleichungen von der Form:

$$(6)\quad \sum (\alpha_1)_\varrho (\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{i-g},\ i+1, \ldots k+g-1,\ k+g) = 0,$$

wo $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-g}$ irgend $i-g$ verschiedene der i Reihen

$$1\,2\,3 \ldots i$$

vorstellen. Auf der linken Seite verschwinden infolge der Voraussetzung die Glieder mit den Factoren:

$$\begin{gathered}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-g},\ i+1, \ldots k+g-1),\\ (\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{i-g},\ i+1, \ldots k+g),\\ (\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_{i-g},\ i+1, \ldots k+g),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

und die Gleichungen (6) nehmen die Gestalt an:

$$\begin{aligned}&(i+1)_\varrho (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g},\ i+2, \cdots k+g)\\ &+ (i+2)_\varrho (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g},\ i+1,\ i+3, \cdots k+g) + \cdots\\ &+ (k+g-1)_\varrho (\alpha_1\alpha_2 \cdots k+g-2,\ k+g) = 0.\end{aligned}$$

Weil jedes dieser Systeme von je k Gleichungen nur $k-(i-g)-1$ Terme besitzt, so müssen entweder die darin auftretenden *Determinanten* einfach verschwinden, oder es müssen die aus den *Coefficienten* gebildeten Rechtecke verschwindende Determinanten haben, also entweder:

1. Alle Determinanten von der Form:

$$\begin{gathered}(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g},\ i+2, \cdots k+g),\\ (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g},\ i+1,\ i+3, \cdots k+g),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g},\ i+1, \cdots k+g-2, k+g),\end{gathered}$$

oder kürzer von der Form:

$$(7)\qquad (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g}\,\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+g-i-2},\ k+g),$$

verschwinden, wo

die α: $(i-g)$ verschiedene Elemente aus den: $1, 2, 3 \ldots i$,

die β: $k+g-i-2$ Elemente aus den: $i+1, \ldots k+g-1$

bedeuten.

Oder aber 2., verschwinden die $(k+g-i-1)$-reihigen Determinanten des Rechtecks:

$$(8)\qquad \| i+1,\ i+2, \ldots k+g-1 \|.$$

Verfolgen wir zunächst *unter Ausschluss der zweiten* die erste Annahme, dass nämlich die Determinanten (7) verschwinden, und bilden die Identitäten:

$$\sum (\alpha_1)_\varrho(\alpha_2 \cdots \alpha_{i-g+1},\ i+2, \cdots k+g) = 0,$$

wo die $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-g+1}$ aus den Zahlen: $1\,2\,3 \ldots i+1$ ausgewählt sind, so verschwinden wegen (4) und (7) die Glieder mit den Factoren:

$$\begin{array}{l}
(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-g+1},\ i+2, \ldots k+g-1),\\
(\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{i-g+1},\ i+2, \ldots k+g),\\
(\alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{i-g+1},\ i+2, \ldots k+g),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-g}\ \ ,\ i+2, \ldots k+g),
\end{array}$$

und es bleiben die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
(9) & (i+2)_\varrho(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-g+1},\ i+3, \cdots k+g)\\
& +(i+3)_\varrho(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-g+1},\ i+2,\ i+4, \cdots k+g)\\
& + \cdots + (k+g-1)_\varrho(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-g+1},\ i+2, \cdots k+g-2,\ k+g) = 0.
\end{array}$$

Die $(k+g-i-2)$-reihigen Determinanten des Rechtecks:

$$\| i+2,\ i+3, \ldots k+g-1 \|$$

können nicht verschwinden, weil sonst der ausgeschlossene Fall 2. eintreten würde, dass nämlich die des Rechtecks (8) verschwinden. Daher müssen nothwendig die Coefficienten verschwinden, die in den Gleichungen (9) auftreten, nämlich alle Determinanten von der Form:

$$(\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_{i-g+1},\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k+g-i-2},\ k+g),$$

wo die α irgend welche Zahlen der Reihe $1\,2 \ldots i+1$, die β solche der Reihe $i+2 \ldots k+g-1$ bedeuten. Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens gelangt man in dem betrachteten 1. Fall zu dem Ergebniss, dass *alle* Determinanten, die $k+g$ als letzte Reihe enthalten, und folglich, wegen der ersten der Bedingungen (4), auch alle Determinanten der Rechtecke (5) verschwinden, q. e. d.

Betrachten wir ferner den ausgeschlossenen zweiten Fall, dass nämlich das Rechteck (8) verschwindet. Man kann diejenigen Gleichungen anzugeben verlangen, welche, combinirt mit dem Verschwinden von (8):

$$(8) \qquad \| i+1,\ i+2, \ldots k+g-1 \|,$$

das Verschwinden der Rechtecke (4) nach sich ziehn. Aus dem eben Bewiesenen ergiebt sich sofort, dass dies der Fall ist, wenn man die Bedingung zufügt, dass neben (8) noch eine aus irgend $k+g-2$ Reihen des ersten Rechtecks in (4) bestehende Matrix, z. B.:

$$(8a) \qquad \| 1\,2\,3 \ldots k+g-2 \|,$$

verschwindet. In der That folgt ebenso, wie aus dem Verschwinden der (4) das der (5) sich ergiebt, das der (4) aus dem der (8) und (8a). Und zwar umfasst dieses System (8), (8a) *alle* Fälle, in denen über-

haupt durch das Bestehen der (8) die (4) verschwinden, d. h. *alle* oben ausgeschlossenen Fälle. Denn, wenn das erste Rechteck (4) verschwinden soll, so muss unter Anderen gewiss auch das Rechteck (8a) verschwinden.

Wir schliessen hieraus, dass sämmtliche Lösungen, die das System (4) zu Null machen, in zwei Theile zerfallen, nämlich:

1) Diejenigen, welche das System (5) zum Verschwinden bringen,
2) Diejenigen, für welche das System (8), (8a) zu Null wird.

Die letzteren zerfallen ihrerseits in derselben Weise wieder in Solche, welche das System (4) zu Null machen, und solche, für welche das System:

(9) $$\| i+1 \ldots k+g-2 \|$$

Null wird. Combinirt man dies mit einem System von $k+g-3$ Reihen der Matrix (8a), also z. B. mit:

(9a) $$\| 1\,2\,3 \ldots k+g-3 \|,$$

so verhält sich (9), (9a) gegenüber (8), (8a) wiederum ebenso, wie das letztere System gegenüber (4), und wie dieses gegenüber (5), u. s. f. Man gelangt durch Verlängerung dieser Kette zuletzt zu einer Einzeldeterminante und einem Rechteck:

(10) $$(1\,2\,3 \ldots k), \quad \| i+1, \ldots k+1 \|,$$

aus deren Verschwindungswerthen wieder diejenigen auszuscheiden sind, für welche die Determinanten des Rechtecks:

(11) $$\| i+1, \ldots k \|$$

alle verschwinden. Weil nun umgekehrt die letztere Bedingung das Verschwinden *beider* Recktecke (10) nach sich zieht, so bricht das Verfahren hier ab.

Man kann das Ergebniss desselben darstellen durch eine Gleichung für die Anzahl $(1\,2\,3 \ldots k+i)_k$ der Lösungen, welche die k-reihigen Determinanten des Recktecks:

$$\| 1\,2\,3 \ldots k+i \|_k$$

zum Verschwinden bringen. Man ermittelt zunächst die Anzahl:

$$\{(1\,2\,3 \ldots k+i-1)_k\,(i+1, \ldots k+i)_k\}$$

der Werthsysteme, die zugleich die Determinanten der Rechtecke (bezw. die Einzeldeterminante):

$$\| 1\,2\,3 \ldots k+i-1 \|, \quad (i+1, \ldots k+i)$$

zum Verschwinden bringen (für $g=i$ in (4), (5)), zieht davon ab die Anzahl:

$$\{(1\,2\,3 \ldots k+i-2)_k\,(i+1, \ldots k+i-1)_k\}$$

derer, für welche die den Klammern entsprechenden Rechtecke zu Null werden, *nachdem zuvor* die Zahl:

$$\{(1\,2\,3,\ldots k+i-3)_k\ (i+1,\ldots k+i-2)_k\}$$

ermittelt und abgezogen ist (diese Zahl tritt also mit positivem Vorzeichen in die Formel ein), u. s. w. *Man erhält so die Schlussformel:*

$$
\begin{aligned}
(11)\quad (123\ldots k+i)_k = &\ \{(123\ldots k+i-1)_k(i+1,\ldots k+i)_k\}\\
&-\{(123\ldots k+i-2)_k(i+1,\ldots k+i-1)_k\}\\
&+\{(123\ldots k+i-3)_k(i+1,\ldots k+i-2)_k\}\\
&-\cdots(-1)^i(i+1,\cdots k)_k.
\end{aligned}
$$

Hiernach wird insbesondere:

$$
\begin{aligned}
(123)_2 &= \{(12)_2\,(23)_2\} - (2)_3,\\
(1234)_3 &= \{(123)_3\,(234)_3\} - (23)_3,\\
(12345)_3 &= \{(1234)_3\,(345)_3\} - \{(123)_3\,(34)_3\} + (3)_3
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Für die Anwendung auf die Rechtecke des Specialgruppenproblems kann man die Formel (11) noch in eine einfachere Gestalt bringen. In diesem Falle nämlich unterscheiden sich die einzelnen Verticalreihen der Rechtecke nur durch den Index in der Bezeichnung: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ der eingehenden ganzen Functionen, sind aber für die Abzählung, da die φ alle von dem gleichen Grad $m-3$ sind, gleichwerthig. Es genügt also dann, statt die Reihen einzeln zu benennen, die Rechtecke nur durch die Anzahl der eingehenden Verticalreihen zu kennzeichnen. *Mit dieser Abkürzung geht die Formel* (11) *über in die folgende:*

$$
\begin{aligned}
(12)\quad (k+i) = &\ \{k+i-1,\ k\} - \{k+i-2,\ k-1\}\\
&+\{k+i-3,\ k-2\} - \cdots(-1)^i(k-i),
\end{aligned}
$$

in welcher Gestalt sie unten angewandt wird.

III.

Correspondenzen, die zwischen mehreren Punkten einer Curve bestehen.

Das zu behandelnde System von Gleichungen, durch welches das Verschwinden der Determinanten des in der Einleitung aufgestellten Rechtecks seinen Ausdruck findet, bereitet der Frage nach der von überflüssigen Factoren freien Resultante nicht unerhebliche Schwierigkeiten, weil zwischen den Paaren von Veränderlichen, die in den Elementen des Rechtecks auftreten, je eine Gleichung besteht, die aussagt, dass die ihnen entsprechenden Punkte auf der Curve f liegen.

Im Allgemeinen enthalten die aus den Rechtecksbedingungen, wie sie der vorstehende Abschnitt liefert, fliessenden Gleichungen alle Variabelnpaare, die das Problem mit sich führt. Es entsteht somit

die Aufgabe, die Anzahl der Lösungen zu ermitteln eines Gleichungssystems von der Form:

$$\varphi(x_1 y_1,\ x_2 y_2, \dots x_k y_k) = 0,$$
$$\psi(x_1 y_1,\ x_2 y_2, \dots x_k y_k) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\vartheta(x_1 y_1,\ x_2 y_2, \dots x_k y_k) = 0,$$

während zugleich die Beziehungen stattfinden:

$$f(x_1 y_1) = 0;\ f(x_2 y_2) = 0;\ \dots f(x_k y_k) = 0.$$

Die Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \dots$ vermöge deren zwischen den Punkten $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $\dots x_k y_k$ ein Entsprechen stattfindet, und die ich deshalb früher „Correspondenzgleichungen" oder „Correspondenzen" genannt habe, werden in den zu betrachtenden Fällen theilweise oder alle befriedigt, wenn irgend ein Variabelnpaar $x_i y_i$ gleich einem anderen $x_j y_j$ wird; die $\varphi, \psi, \dots$ verschwinden auch, wenn irgend einer der Punkte $x_i y_i$ in einen der einfachen oder vielfachen Punkte von f („Ausnahmepunkte") hereinrückt, durch welche die adjungirten Curven alle hindurchgehen.

Wir nehmen an, um diese Möglichkeiten zu umfassen, dass für den Ausnahmepunkt $x_i = a_\alpha$, $y_i = b_\alpha$, wo (a_α, b_α) ein α-facher Punkt von f ist $(\alpha \geqq 1)$, die Function φ sammt ihren ersten, zweiten, $\dots$ $(\varphi_i^{(\alpha)} - 1)^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten nach $x_i y_i$ verschwindet, oder, wie wir kürzer sagen wollen, dass die „Correspondenzcurve" $\varphi(x_i y_i) = 0$ (wenn φ als Function nur der Variabeln $x_i y_i$ angesehn wird) einen $\varphi_i^{(\alpha)}$-fachen Punkt in a_α, b_α besitzt, ebenso $\psi(x_i y_i)$ einen $\psi_i^{(\alpha)}$-fachen Punkt u. s. w., wobei jedoch eine gegenseitige Berührung zwischen den Zweigen dieser vielfachen Punkte der Curven

$$f = 0,\ \varphi = 0,\ \psi = 0, \dots$$

ausgeschlossen sein möge. — Wiewohl in den später zu betrachtenden Fällen die Curven

$$\varphi(x_i y_i) = 0,\ \psi(x_i y_i) = 0 \dots$$

für

$$x_i = x_j,\ y_i = y_j \quad (i, j = 1, 2 \dots k)$$

je nur einen einfachen Punkt haben, mögen doch vorerst der Allgemeinheit wegen auch diese Punkte als mehrfache angesehen werden. Bekanntlich*) ist die Zahl, welche die Vielfachheit (die „Werthigkeit") etwa von $\varphi(x_i y_i)$ für $x_i = x_k$, $y_i = y_k$ angiebt, dieselbe, wie die Vielfachheit der Curve $\varphi(x_k y_k)$ für $x_k = x_i$, $y_k = y_i$.

Die vorliegende Aufgabe ist in einzelnen Fällen, so insbesondere, wenn zwei Correspondenzen zwischen zwei Punkten vorliegen $(k=2)$,

---

*) Diese Annalen, Band 31, S. 377.

sowie für $k = 3$ und $k = 4$ schon früher von mir und Anderen behandelt worden**). Inzwischen habe ich die allgemeine Formel gefunden und eine auf den Fall $k = 2$ sich stützende Begründung derselben, die in den folgenden Abschnitten enthalten ist. Ich beginne mit einer Zusammenstellung der auf den Fall von zwei Correspondenzen mit zwei Variabelnpaaren bezüglichen Formeln, deren Ableitung ich jedoch für eine andere Gelegenheit aufsparen muss.

Zwischen drei Punkten k, r, s (mit den Coordinaten $x_k y_k$, $x_r y_r$, $x_s y_s$) der Curve $f = 0$, für die also:

$$f(x_k y_k) = 0, \quad f(x_r y_r) = 0, \quad f(x_s y_s) = 0$$

ist, mögen zwei Correspondenzen bestehen:

$$\varphi(x_k y_k,\ x_r y_r,\ x_s y_s) = 0,$$
$$\psi(x_k y_k,\ x_r y_r,\ x_s y_s) = 0,$$

deren „Werthigkeiten" wir beziehungsweise durch:

$$\varphi_{kr},\ \psi_{kr},\ \varphi_{ks},\ \psi_{ks},\ \varphi_{rs},\ \psi_{rs}$$

bezeichnen. Also für z. B. $x_k = x_r$, $y_k = y_r$ verschwindet φ mitsammt den 1., 2., ... $(\varphi_{kr} - 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach x_k, y_k, während die $\varphi_{kr}{}^{\text{ten}}$ nicht alle zugleich verschwinden.

Die gemeinsamen Werthepaare (Schnittpunkte) der Gleichung $\varphi = 0$, als Curvengleichung für die Coordinaten $x_k y_k$ (bezw. $x_r y_r$, $x_s y_s$) aufgefasst, mit $f = 0$, bestehen aus:

1. Auf f festliegenden, d. h. von der Lage der Punkte r, s, bezw. k, s, und k, r unabhängigen Punkten (α), (β) ... (mit den Coordinaten $a_\alpha b_\alpha$, $a_\beta b_\beta$, ...), die auch singuläre Punkte von f sein können. In den nachfolgenden Anwendungen ist das Verhalten der Correspondenzen das von „adjungirten" Curven. Wir nennen diese festen Punkte: *Ausnahmepunkte.* Ihre Annahme wird durch jene Anwendungen erfordert.

2. Aus veränderlichen aber rational bekannten Schnittpunkten, nämlich $x_k = x_r$, $y_k = y_r$; $x_k = x_s$, $y_k = y_s$ und $x_r = x_s$, $y_r = y_s$.

3. Aus im Allgemeinen rational nicht trennbaren, mit r, s veränderlichen „*freien*" Schnittpunkten.

Die Anzahl der letzteren sei

$$\varphi_k \text{ (bezw. } \varphi_r,\ \varphi_s) \text{ für } \varphi = 0; \quad \psi_k(\psi_r,\ \psi_s) \text{ für } \psi = 0.$$

Dann ist:

$$\varphi_k = n \cdot [\varphi_k] - \sum_\alpha \alpha \cdot \varphi_k^{(\alpha)} - \varphi_{kr} - \varphi_{ks},$$

**) Ibd. Bd 6, S. 33; ferner die abweichende Darstellung in Clebsch-Lindemann, analyt. Geom. d. Ebene S. 720.

wenn $[\varphi_k]$ die Ordnung (der Grad) von φ hinsichtlich der Coordinaten von (k), n die Ordnung von f, α die Vielfachheit von f in einem Ausnahmepunkt, in welchem $\varphi_k^{(\alpha)}$ die Vielfachheit von $\varphi(x_k y_k) = 0$ ist, Σ die Summe über alle Ausnahmepunkte bedeutet, in denen $\varphi(x_k y_k)$ verschwindet, endlich φ_{kr}, φ_{ks}, φ_{rs} die Vielfachheit der in (2) erwähnten Schnittpunkte („Werthigkeiten") ist. Analog ist:

$$\varphi_r = n[\varphi_r] - \sum \alpha \varphi_r^{(\alpha)} - \varphi_{rk} - \varphi_{rs}.$$

Wenn man aus den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$ die Grössen $x_k y_k$ eliminirt, so lässt sich die von fremden Lösungen freie Resultante nur durch einen (im Allgemeinen selbst mit Hülfe von $f = 0$ nicht ausführbaren) Quotienten aus mehreren Correspondenzen zwischen r, s darstellen*), den man jedoch bezüglich seines Verhaltens gegenüber f als eine einzige Correspondenz auffassen kann, wobei nöthigenfalls selbst negative Zahlen als Werthigkeit nicht ausgeschlossen sind**). Dieser Quotient („gebrochene Correspondenz"):

$$\Omega(x_r y_r,\ x_s y_s) = 0$$

oder kürzer:

$$\Omega(r, s) = 0$$

hat, als Function von (r) (der Coordinaten $x_r y_r$) aufgefasst:

$$\Omega_r = \varphi_r \psi_k + \psi_r \varphi_k - 2p\,\varphi_{kr} \psi_{kr}$$

„freie" Schnittpunkte***) mit $f = 0$, und besitzt in $(r) = (s)$ einen:

$$\Omega_{rs} = \varphi_{rs} \psi_k + \psi_{rs} \varphi_k - \varphi_{kr} \psi_{ks} - \varphi_{ks} \psi_{kr}$$

-fachen Punkt. p bedeutet das Geschlecht der Curve f. Die Zahlen Ω_r und Ω_{rs} sind als Differenzen der entsprechenden Zahlen für Zähler und Nenner des Bruches Ω aufzufassen†).

---

*) Clebsch-Lindemann, Geometrie, 6. Abtheilung, IV, S. 731, S. 747.

**) Vergl. Hurwitz, über Correspondenzen, d. Ann. Bd. XXVIII, S. 561, sowie die Abh. d. Verf. in d. Ann. Bd. VII, S. 611 ff., und Bd. XXXI, S. 405.

***) Es ist nicht ausgeschlossen, dass auch von diesen freien Punkten in besonderen Fällen einige in die Ausnahmepunkte rücken, so z. B. immer in einen solchen, für den in beiden Correspondenzen die Vielfachheit je kleiner als die Werthigkeit ist, was übrigens in den folgenden Anwendungen nicht vorkommt. Wir würden alsdann auch diese als *freie* Schnittpunkte rechnen.

†) S. d. Abhdl. d. Verf. in Bd. VI, S. 42, S. 46 und Bd. VII, S. 611 d. Ann., sowie Clebsch-Lindemann, Geometrie, S. 734. — Allgemein hat in jedem α-fachen Punkt von f, der $\varphi_k^{(\alpha)}$-facher bez. $\psi_k^{(\alpha)}$-facher Ausnahmepunkt von φ und ψ ist, Ω einen:

$$\varphi_k^{(\alpha)} \psi_k + \psi_k^{(\alpha)} \varphi_k - \varphi_{kr} \psi_k^{(\alpha)} - \psi_{kr} \varphi_k^{(\alpha)} - \varphi_{kr} \psi_{kr} (\alpha - 1)$$

-fachen Punkt. — Ich führe noch den *Grad* $[\Omega_r]$ des Quotienten Ω (als Differenz der Gradzahlen von Zähler und Nenner aufgefasst) hinsichtlich $x_r y_r$ an (unter n den Grad von f, $[\varphi_r]$ den von φ in $x_r y_r$ u. s. w. verstanden):

$$[\Omega_r] = [\varphi_r]\psi_k + [\psi_r]\varphi_k - \varphi_{kr}[\psi_k] - \psi_{kr}[\varphi_k] - \varphi_{kr}\psi_{kr}(n-1).$$

Die gebrochene Correspondenz $\Omega(x_r y_r, x_s y_s) = 0$ will ich in der Folge, als Resultat der Elimination von (k) aus $\varphi = 0$, $\psi = 0$ mit $(\varphi\psi)^{(k)}$ oder kürzer $(\varphi\psi)$ bezeichnen. Entsprechend werden dann *die Zahlen für die freien Schnittpunkte mit f und die Werthigkeit der Resultante* Ω *durch:*

$$(1)\quad \begin{cases} (\varphi\psi)_r^{(k)} = \Omega_r = \varphi_r\psi_k + \psi_r\varphi_k - 2p\varphi_{kr}\psi_{kr}, \\ (\varphi\psi)_s^{(k)} = \Omega_s = \varphi_s\psi_k + \psi_s\varphi_k - 2p\varphi_{ks}\psi_{ks}, \\ (\varphi\psi)_{rs}^{(k)} = \Omega_{rs} = \varphi_{rs}\psi_k + \psi_{rs}\varphi_k - \varphi_{kr}\psi_{ks} - \varphi_{ks}\psi_{kr} \end{cases}$$

dargestellt, wo hier, wie in der Folge der *obere Index* die *eliminirten* Variabeln angiebt. Uebrigens ist:

$$(\varphi\psi)_r^{(k)} = (\varphi\psi)_k^{(r)}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die gegebenen Correspondenzen φ, ψ selbst „gebrochene" sind, weil die entsprechenden Ausdrücke sich aus den bilinearen für Zähler und Nenner einzeln hergestellten durch Addition und Subtraction zusammensetzen lassen.

In Anlehnung an diese Formeln die ich wie gesagt als bekannt voraussetze, kann man nun sogleich den nächst höheren Fall behandeln, wo *drei* Correspondenzen zwischen *vier* Variabelnreihen gegeben sind:

$$\varphi(x_1y_1, x_ky_k, x_ry_r, x_sy_s) = 0,$$
$$\psi(x_1y_1, x_ky_k, x_ry_r, x_sy_s) = 0,$$
$$\chi(x_1y_1, x_ky_k, x_ry_r, x_sy_s) = 0,$$

und für die durch Elimination von (1) und (k) aus diesen Gleichungen und:

$$f(x_1y_1) = 0, \quad f(x_ky_k) = 0$$

entstehende (gebrochene) Correspondenz:

$$\Omega(r, s) = 0$$

die Zahlen Ω_r und Ω_{rs} bestimmen, welche den Grad und die Werthigkeit angeben. Ich beschränke mich zu diesem Behufe auf den Fall, dass in einer der Correspondenzen, z. B. $\varphi = 0$, eines der Variabelnpaare, etwa x_1y_1, gar nicht auftritt, und bestimme jene Zahlen für diesen *besonderen* Fall, indem ich auf dem früher angegebenen Wege x_1y_1 aus $\psi = 0$, $\chi = 0$ eliminire, ferner aus der so erhaltenen (gebrochenen) Correspondenz:

$$\Phi(k, r, s) = 0,$$

in Verbindung mit:

$$\varphi(k, r, s) = 0$$

und $f = 0$ die Variabeln (k) wegschaffe. Aus den für diese Resultante

bestimmten Zahlen $(\varphi\Phi)_r$ und $(\varphi\Phi)_{rs}$ leitet man nun die dem *allgemeinen* Fall entsprechenden Zahlen ab durch Zufügen derjenigen Glieder, die aus Gründen der *symmetrischen* Gestalt dieser Formeln zu ergänzen sind.

Die Rechtfertigung für dieses Verfahren beruht auf der Einsicht in *einige allgemeine Eigenschaften der Resultante* aus mehreren Correspondenzgleichungen, die wir zunächst zusammenstellen wollen. Gegeben seien $k+1$ Correspondenzgleichungen zwischen den $k+2$ Variabelnpaaren $x_1y_1, x_2y_2, \ldots x_ky_k, x_ry_r, x_sy_s$ $\big($kurz $(1)(2)\ldots k, r, s\big)$:

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \chi = 0,\ \omega = 0, \ldots, \vartheta = 0,$$

wo noch die Gleichung:

$$f = 0$$

für jedes Paar der Veränderlichen erfüllt ist. Wir verstehen unter der *Resultante aus diesen Correspondenzgleichungen* die linke Seite der durch Elimination von (1) (2) . . . (k) entstehenden Correspondenz:

$$\mathsf{P}(x_ry_r,\ x_sy_s) = 0,$$

welche als Function von (r) aufgefasst ausser in den Ausnahmepunkten die Curve f nur noch in solchen Punkten (r) trifft, zu welchen Systeme (1) (2) . . . (k) gefunden werden können, die allen Correspondenzen zugleich genügen. Bezeichnet man eines der Werthsysteme von (1) (2) . . . (k), welches den ersten k Correspondenzen allein (also allen mit Ausnahme von ϑ) bei beliebig gegebenem r, s genügt und keinen Ausnahmepunkt enthält, mit (h), so ist die Resultante P darstellbar in der Form einer symmetrischen Function aller Werthsysteme h, nämlich durch das Product:

$$\mathsf{P} = \frac{\Theta_0 \Pi \vartheta^{(h)}}{\Theta_1},$$

wo $\Pi\vartheta^{(h)}$ das Product über alle $\vartheta^{(h)}$ $\big(\vartheta^{(h)}$ die Function ϑ geschrieben in einem der Werthsysteme $(h)\big)$ ist, Θ_0 aber und Θ_1 ganze Functionen der Coefficienten der Correspondenzen $\varphi, \psi, \ldots$ (*ausser* ϑ) sind, von denen Θ_0 dazu dient, den Nenner in $\Pi\vartheta^h$ wegzuheben, und in Producte von Potenzen zerfällt, deren Exponenten die *Gradzahlen* $[\vartheta_1], [\vartheta_2] \ldots [\vartheta_k]$ von ϑ hinsichtlich x_1y_1, x_2y_2, . . . sind, während Θ_1 in Producte zerfällt von Potenzen, deren Exponenten*) sind:

1. Die *Vielfachheitszahlen*, die das Verschwinden von ϑ hinsicht-

---

*) Vorausgesetzt ist hierbei, dass, abgesehen von den Ausnahmepunkten, die Correspondenzen alle zugleich nur für *discrete* Werthsysteme der Variabeln 1, 2, . . . r (bei gegebenem s) verschwinden, dass also, geometrisch zu reden, in den durch die Variabelnpaare bestimmten höheren Räumen continuirliche Gebilde wie Curven, Flächen, . . . nicht allen gemeinsam sind.

lich der Variabeln (1) (2), ... in den Ausnahmepunkten $\alpha, \beta, \ldots$ angeben: $\vartheta_1^{(\alpha)}, \vartheta_2^{(\alpha)}, \ldots, \vartheta_1^{(\beta)}, \vartheta_2^{(\beta)}, \ldots$

2. Die *Werthigkeitszahlen* $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \ldots \vartheta_{1k}, \ldots$ Im Uebrigen sind $\Theta_0\, \Theta_1$ von den der Correspondenz ϑ zugehörigen Zahlen unabhängig.

Ich übergehe hier den Beweis für die Richtigkeit dieser Darstellung der Resultante P, die, der Form nach unsymmetrisch, doch in der Ausrechnung die erforderliche Symmetrie hinsichtlich aller den $k+1$ Correspondenzen zugehörigen Coefficienten besitzt, und verweise deshalb auf meinen Aufsatz über die reducirte Resultante.

Die Symmetrie von P hinsichtlich der Correspondenzen zieht eine symmetrische Gestalt nach sich auch der *Formeln* für den *Grad* $[\mathsf{P}_r]$ von P hinsichtlich $x_r y_r$, für die *Werthigkeitszahl* P_{rs}, sowie für diejenigen Zahlen, welche die Höhe des Verschwindens in den Ausnahmepunkten $\alpha, \beta, \ldots$ ausdrücken: $\mathsf{P}_r^{(\alpha)}, \mathsf{P}_s^{(\alpha)}; \mathsf{P}_r^{(\beta)}, \mathsf{P}_s^{(\beta)}; \ldots$ was dann auch noch für die *Zahl der freien Schnittpunkte* P_r von $\mathsf{P}=0$ mit $f=0$ gilt, welche sich linear und homogen aus diesen Grössen zusammensetzt:

$$\mathsf{P}_r = [\mathsf{P}_r]\, n - \sum \alpha\, \mathsf{P}_r^{(\alpha)} - \mathsf{P}_{rs},$$

und entsprechend für P_s. Aus der angeführten Darstellung von P folgt aber, dass in die Ausdrücke $[\mathsf{P}_r]$, $\mathsf{P}_r^{(\alpha)}$, P_{rs} und P_r von den der Correspondenz zugehörigen Zahlen nur die Gradzahlen $[\vartheta_1], [\vartheta_2], \ldots$ die Werthigkeitszahlen ϑ_{ik} und die Vielfachheitszahlen $\vartheta_1^{(\alpha)}, \vartheta_2^{(\alpha)}, \ldots$ (bezw. also deren lineare Combinationen $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots$, wo

$$\vartheta_i = [\vartheta_i]\, n - \sum \alpha\, \vartheta_i^{(\alpha)} - \vartheta_{1i} - \vartheta_{2i} - \cdots$$

ist) eingehen können. Was den Nenner Θ_1 angeht, so ist dies nach dem Gesagten unmittelbar klar, und der Zähler $\Theta_0 \prod \vartheta^{(h)}$ theilt diese Eigenschaft mit der angegebenen Form der Resultante aus irgendwelchen Gleichungen, die *keine* gemeinsamen Lösungssysteme besitzen.

Man beweist nunmehr leicht, dass die Ausdrücke $[\mathsf{P}], \ldots$

1) nothwendig *lineare homogene Functionen der Grössen* $[\vartheta_i]$, $\vartheta_i^{(\alpha)}$, ϑ_{ik} (oder auch der ϑ_i) sind. Denn vermöge ihrer algebraischen Bedeutung besitzen diese Grössen die Eigenschaft, dass sie, wenn man für die Correspondenz ϑ die λ^{te} Potenz einer ebensolchen η setzt:

$$\vartheta = \eta^\lambda,$$

in das λ-fache der entsprechenden Zahlen für η übergehen. Andererseits verwandelt sich dann auch die Resultante P in die λ^{te} Potenz der Resultante R aus $\varphi, \psi, \ldots \eta$, d. h. die Zahlen $[\mathsf{P}_r], \ldots$ werden das λ-fache der entsprechenden $[R_r], \ldots$. Sieht man also die Zahl P_{rs} als Functionszeichen an, so wird:

$$\mathsf{P}_{rs}(\lambda[\eta_i],\ \lambda\eta_i^{(\alpha)}, \ldots) = \lambda \,.\, \mathsf{P}_{rs}([\eta_i],\ \eta_i^{(\alpha)}, \ldots).$$

Diese Functionalgleichung bestimmt aber P_{rs} als lineare homogene

Function der Grössen $[\eta_i]$, ..., und analoges gilt für die Zahlen $[\mathsf{P}_r]$, $\mathsf{P}_r^{(\alpha)}$, P_r, q. e. d. Da sich dieselben den anderen Correspondenzen gegenüber ebenso verhalten, so folgt, dass sie homogene lineare Ausdrücke in den entsprechenden Zahlen für jede einzelne Correspondenz $\varphi, \psi, \ldots \vartheta$ sind.

Wir beweisen noch eine *zweite* Eigenschaft dieser Ausdrücke. Die unteren Indices an den Zahlen $[\vartheta_i]$, ϑ_{pq}, $\vartheta_i^{(\alpha)}$, ϑ_i sind den einzelnen Variabelnpaaren $x_i y_i$, $x_p y_p$, $x_q y_q$, ... zugeordnet. Wir behaupten nun:

2) *Dass in jedem Glied der Ausdrücke* $[\mathsf{P}_r]$, ... *alle Indices der zu eliminirenden Variabeln* $1, 2, \ldots k$, *sowie diejenigen des Ausdrucks selbst* (r, *bez.* s), *wirklich mindestens einmal auftreten müssen.* Denn würde in einem Glied z. B. der Index 1 fehlen, so könnte es eintreten, dass das Variabelnpaar $x_1 y_1$ überhaupt gar nicht vorkommt, ohne dass der Werth dieses Gliedes sich auf Null reducirt. Aber wenn $x_1 y_1$ allenthalben ausfiele, so würden im Allgemeinen die $k+1$ Correspondenzen zwischen nur k Punkten von f $2, 3, \ldots k, r$ mit einander unverträglich sein. Die Zahlen $[\mathsf{P}]$, ... müssen also in diesem Fall verschwinden, was nur so möglich ist, dass der Index 1 in jedem Glied auftritt. Ein ähnlicher Schluss gilt für die Zahlen r, s.

Die beiden erwähnten Eigenschaften *ermöglichen nun die Bildung der allgemeinen Ausdrücke für* $[\mathsf{P}_r]$, P_{rs}, $\mathsf{P}_r^{(\alpha)}$, P_r an der Hand eines Recursionsverfahrens. Man geht nämlich von dem besonderen Fall aus, dass in einer der Correspondenzen, z. B. φ, die Variabeln (1) (2) ... ($k-1$) nicht vorkommen, bestimmt die gewünschten Ausdrücke für diesen Fall mit Hilfe der Formel für den nächstniederen von nur k Variabeln und fügt dann die fehlenden Glieder aus Symmetriegründen zu, indem man z. B. aus dem Vorkommen eines Gliedes wie $\varphi_k \psi_{rs} \chi_{pq} \ldots$ auf die ausgefallenen Glieder: $\varphi_{pq} \psi_{rs} \chi_k \ldots \varphi_{pq} \psi_k \chi_{rs} \ldots$ u. s. w. schliesst. Nach dem Gesagten ist leicht zu ersehen, dass man auf diesem Wege zu allen überhaupt möglichen Gliedern gelangt. Denn weil die Variabeln k, r und s in φ auftreten, also der specielle Fall alle Glieder der linearen homogenen Function mit $[\varphi_k]$, φ_k, ... $[\varphi_r]$, φ_r, ... $[\varphi_s]$, φ_s, ... φ_{kr}, ... liefert, so kann, da wegen der Eigenschaft (2) die Indices k, r, s in allen Gliedern vorkommen, überhaupt kein Glied ausgefallen sein, für welches nicht andererseits ein Musterglied vorhanden ist. Zahlencoefficienten und die von f herrührenden Factoren sind dann jedesmal zu übertragen.

Wenn nun aber aus den dem speciellen Fall entsprechenden Ausdrücken durch Zufügen bloss der symmetrischen Glieder die allgemeinen Formeln ableitbar sind, so muss umgekehrt ein symmetrisch hinsichtlich der $\varphi, \psi, \ldots \vartheta$ gebildeter Ausdruck von den angegebenen Eigenschaften, der für:

$$[\varphi_1] = [\varphi_2] = \cdots = [\varphi_{k-1}] = 0,$$
$$\varphi_1^{(\alpha)} = \varphi_2^{(\alpha)} = \cdots = \varphi_{k-1}^{(\alpha)} = \varphi_1^{(\beta)} = \cdots = 0,$$
$$\varphi_{pq} = 0, \qquad (q = 1, 2, \ldots k, r, s;\ p = 1, 2, \ldots k-1)$$

auf jenen speciellen sich reducirt, die allgemeine Formel darstellen.

Ich werde im nächsten Abschnitt zeigen, dass diese Bedingungen von *den beiden nachfolgenden Formeln**) erfüllt werden, durch welche *der Ausdruck für die Anzahl* $\mathsf{P}_r = (\varphi\psi\chi \ldots \vartheta)_r^{(12\cdots k)}$ *der freien Schnittpunkte der resultirenden Correspondenz* $\mathsf{P}(rs) = 0$ *mit* $f = 0$, *sowie der für die Werthigkeit* $\mathsf{P}_{rs} = (\varphi\psi\chi \ldots \vartheta)_{rs}^{(12\cdots k)}$ (wo der obere Index jedesmal die eliminirten Veränderlichen angiebt) zurückgeführt wird auf die entsprechenden Ausdrücke für nur je k Correspondenzen, aus denen $k-1$ Variable eliminirt werden:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathsf{P}_r = (\varphi\psi\chi \ldots \vartheta)_r^{(12\cdots k)} = S\varphi_r(\psi\chi \ldots \vartheta)_k^{(12\cdots k-1)} \\ \qquad\qquad - p\sum\limits_{i=1}^{i=k} S\varphi_{ir}(\psi\chi \ldots \vartheta)_{ir}^{(12\cdots k-1)}, \\ \mathsf{P}_{rs} = (\varphi\psi\chi \ldots \vartheta)_{rs}^{(12\cdots k)} = S\varphi_{rs}(\psi\chi \ldots \vartheta)_k^{(12\cdots k-1)} \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{i=1}^{i=k} S\varphi_{ir}(\psi\chi \ldots \vartheta)_{is}^{(12\cdots k-1)}. \end{cases}$$

Hier bedeutet p das Geschlecht von f, S die Summe über alle $k+1$ durch Vertauschung von φ mit $\psi\chi \ldots \vartheta$ aus dem angeschriebenen Glied entstehenden Glieder.

IV.

Correspondenzen zwischen mehreren Punkten einer Curve. Fortsetzung.

Die *Symmetrie* der am Schluss des vorigen Abschnitts aufgestellten Ausdrücke hinsichtlich der $k+1$ Correspondenzen $\varphi\psi \ldots \vartheta$ liegt auf der Hand**). Es bleibt zu erweisen, dass *für den Fall*, dass in der Correspondenz φ die Variabeln $1, 2, \ldots k-1$ nicht auftreten, φ also von der Form ist:

$$\varphi(x_k y_k,\ x_r y_r,\ x_s y_s) = 0$$

jene Formeln übergehen in solche, die, unter Annahme ihrer Giltigkeit

---

*) Die Formeln für $[\mathsf{P}]$ und $\left[\mathsf{P}_r^{(\alpha)}\right]$, die sich leicht mit denselben Hilfsmitteln entwickeln lassen, sind im Folgenden nicht erforderlich und weggelassen.

**) Nicht unmittelbar lässt sich die Symmetrie dieser Ausdrücke hinsichtlich der k Variabeln $1, 2, \ldots k$ erkennen. Für den Nachweis derselben wären ähnliche Umformungen wie in Nr. V nöthig.

für bloss k Correspondenzen mit $k+1$ Variabelnpaaren, *sich auf directem Weg* aufstellen lassen.

Eliminirt man in dem letzterwähnten Fall die Variabeln $1, 2, \ldots k-1$ aus den Correspondenzgleichungen $\psi, \chi, \ldots \vartheta$ in Verbindung mit $f=0$, so gelangt man zu einer Gleichung:

$$\Phi(k, r, s) = 0.$$

Eliminirt man aus dieser und:

$$\varphi(k, r, s) = 0; \quad f = 0$$

etwa (k), so erhält man für die Resultante $R(x_r y_r, x_s y_s) = 0$ vermöge der Ausdrücke (1) in III die Zahlen:

$$R_r = (\varphi\,\Phi)_r^{(k)} = \varphi_r \Phi_k + \varphi_k \Phi_r - 2p\,\varphi_{kr}\Phi_{kr},$$
$$R_{rs} = (\varphi\,\Phi)_{rs}^{(k)} = \varphi_{rs}\Phi_k + \varphi_k\Phi_{rs} - \varphi_{kr}\Phi_{ks} - \varphi_{ks}\Phi_{kr},$$

oder, in der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned} R_r &= \varphi_r\ (\psi\chi\ldots\vartheta)_k^{(12\cdots k-1)} + \varphi_k(\psi\chi\ldots\vartheta)_r^{(12\cdots k-1)} \\ &\qquad - 2p\,\varphi_{kr}(\psi\chi\ldots\vartheta)_{kr}^{(12\cdots k-1)}, \\ R_{rs} &= \varphi_{rs}(\psi\chi\ldots\vartheta)_k + \varphi_k(\psi\chi\ldots\vartheta)_{rs} - \varphi_{kr}(\psi\chi\ldots\vartheta)_{ks} \\ &\qquad - \varphi_{ks}(\psi\chi\ldots\vartheta)_{kr}, \end{aligned}$$

wo in der zweiten Formel der obere Index, der die eliminirten Variabeln angiebt, weggelassen wurde.

Dies sind die gesuchten Vergleichsformeln.

Andererseits lassen sich nun die Formeln (2) für P_r und P_{rs} am Schlusse des vorigen Abschnitts mit Hilfe der Bedingungen, die das Nichtvorkommen der Variabeln $1, 2, \ldots k-1$ in φ ausdrücken:

$$\varphi_\lambda = 0; \quad \varphi_{\lambda\mu} = 0; \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-1;\ \mu = 1, 2, \ldots k, r, s)$$

in folgende Form bringen — wenn man durch Einschliessen in eckige Klammern das Resultat der Einführung dieser Bedingungsgleichungen ausdrückt*):

$$\begin{aligned} [\mathsf{P}_r] &= \varphi_r\ (\psi\chi\ldots\vartheta)_k + [\dot S\psi_r\ (\varphi\chi\ldots\vartheta)_k] - p\,\varphi_{kr}(\psi\chi\ldots\vartheta)_{kr} \\ &\quad - p\sum_1^{k-1}[\dot S\psi_{ir}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{ir}] - p[\dot S\psi_{kr}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{kr}], \\ [\mathsf{P}_{rs}] &= \varphi_{rs}(\psi\chi\ldots\vartheta)_k + [\dot S\psi_{rs}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_k] - \varphi_{kr}(\psi\chi\ldots\vartheta)_{ks} \\ &\quad - \sum_1^{k-1}[\dot S\psi_{ir}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{is}] - [\dot S\psi_{kr}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{ks}]. \end{aligned}$$

---

*) Eine Verwechslung mit den oben durch ebensolche Klammern bezeichneten *Gradzahlen* ist wohl ausgeschlossen.

wo die Summe $\dot{S}$ dasselbe bedeutet, wie oben S, unter Ausschluss jedoch des Buchstabens φ (der also an seiner Stelle bleibt, während $\psi, \chi \ldots \vartheta$ wechseln). Um in diesen Ausdrücken die Summe

$$\dot{S}\,\psi_r(\varphi\chi\ldots\vartheta)_k$$

und die analogen als explicite Functionen der φ darzustellen, bestimme man die dem Resultat der Elimination von $1, 2, \ldots k-2$ aus den Correspondenzen $\chi, \omega, \ldots \vartheta$:

$$(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(12\ldots k-2)} = \Phi'(k-1, k, r, s)$$

entsprechenden beiden charakteristischen Zahlen:

$$\Phi'_{k-1} = (\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1},$$
$$\Phi'_{k-1,k} = (\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1,k}.$$

Wird alsdann (k) aus:

$$\Phi' = 0,$$
$$\varphi(k-1, k, r, s) = 0$$

eliminirt, indem man sich vorbehält, erst *nachträglich* die Bedingungen:

$$\varphi_{k-1} = 0, \quad \varphi_{k-1,k} = 0$$

einzuführen, so erhält man für die Resultante:

$$\Phi(k, r, s) = (\varphi\chi\omega\ldots\vartheta)^{(1,2\ldots k-1)},$$

vermittelst der Formeln (1) des vorigen Paragraphen, unter Einführung der erwähnten Bedingungen, die Zahlen:

$$[(\varphi\Phi')_k\,] = [(\varphi\chi\ldots\vartheta)_k^{(12\ldots k-1)}] = \varphi_k\ \Phi'_{k-1} = \varphi_k\ (\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1}^{(12\ldots k-2)},$$
$$[(\varphi\Phi')_{kr}] = [(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{kr}^{(12\ldots k-1)}] = \varphi_{kr}\Phi'_{k-1} = \varphi_{kr}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1}^{(12\ldots k-2)}.$$

Daher wird endlich:

$$[\dot{S}\,\psi_r\ (\varphi\chi\ldots\vartheta)_k^{(12\ldots k-1)}] = \varphi_k\ S\psi_r\ (\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1}^{(12\ldots k-2)},$$
$$[\dot{S}\,\psi_{rs}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_k] = \varphi_k\ S\psi_{rs}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1},$$
$$[\dot{S}\,\psi_{kr}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{kr}] = \varphi_{kr}S\psi_{kr}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1},$$

wo wieder in den letzten beiden Formeln der obere Index weggelassen wurde.

Ebenso erhält man

$$[(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{ir}] \quad (i = 1, 2\ldots k-1).$$

Z. B. für $i = 1$ eliminire man zunächst aus $\chi, \omega, \ldots \vartheta$ die Variabeln $2, 3, \ldots k-1$ und bilde eine Resultante von der Form:

$$\Phi''\big((1), k, r, s\big) = 0,$$

Eliminirt man k aus dieser und:

$$\varphi\big((1),\, k,\, r,\, s\big) = 0$$

unter dem Vorbehalt, nachträglich $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{1k} = 0$ zu setzen, so erhält man für die Resultante die Zahlen:

$$\begin{aligned}[(\varphi\Phi'')^{k}_{1r}] = [\varphi\chi\omega\ldots\vartheta)_{1r}] &= [\varphi_{1r}\Phi''_k + \varphi_k\Phi''_{1r} - \varphi_{kr}\Phi''_{1k} - \varphi_{1k}\Phi''_{kr}] \\ &= \varphi_k\Phi''_{1r} - \varphi_{kr}\Phi''_{1k} \\ &= \varphi_k(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(23\cdots k-1)}_{1r} - \varphi_{kr}(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(23\cdots k-1)}_{1k}.\end{aligned}$$

Daher schliesslich:

$$\dot S\psi_{1r}(\varphi\chi\ldots\vartheta)_{1r} = \varphi_k S\psi_{1r}(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(23\cdots k-1)}_{1r} - \varphi_{kr}S\psi_{1r}(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(23\cdots k-1)}_{1k}$$

und die entsprechenden aus dieser durch Vertauschung von 1 mit $2, 3, \ldots k-1$.

Setzt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für $[\mathsf{P}_r]$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}[\mathsf{P}_r] = \varphi_r(\psi\chi\ldots\vartheta)_k &+ \varphi_k S\psi_r(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1} - p\varphi_{kr}(\psi\chi\ldots\vartheta)_k \\ &-p\left\{\varphi_k\sum_1^{k-1}S\psi_{ir}(\chi\,\omega\ldots\vartheta)_{ir} + \varphi_{kr}\sum_1^{k-1}S\psi_{ir}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{ik}\right\} \\ &-p\varphi_{kr}S\psi_{kr}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1}.\end{aligned}$$

Hier ist der Coefficient von φ_k:

$$S\psi_r(\chi\omega\ldots\vartheta)_{k-1} - p\sum_1^{k-1}\psi_{ir}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{ir},$$

also nach der ersten der Formeln (2) des vorigen Abschnitts, angewandt auf den Fall $k-1$ statt k, gleich $(\psi\chi\ldots\vartheta)_r$, ferner der Coefficient von $p\varphi_{kr}$ gleich:

$$\begin{aligned}-(\psi\chi\ldots\vartheta)_{kr} - &\left\{S\psi_{kr}(\chi\omega\ldots\vartheta)^{(12\cdots k-2)}_{k-1} - \sum_1^{k-1}S\psi_{ir}(\chi\omega\ldots\vartheta)_{ik}\right\} \\ &= -2(\psi\chi\ldots\vartheta)_{kr}.\end{aligned}$$

Also stimmt die erhaltene Formel für $[\mathsf{P}_r]$ mit der oben auf directem Wege abgeleiteten für R_r überein. Ganz ebenso reducirt sich $[\mathsf{P}_{rs}]$ auf R_{rs}. Hiermit ist die Lücke in dem Beweis der Formeln (2) des vorigen Abschnitts ausgefüllt.

Die explicite Darstellung der Correspondenzformeln für die Fälle $k=2$, $k=3$ ist von mir sowie von Herrn Lindemann mit einem directen Beweis an den oben angegebenen Orten früher schon gegeben worden. — Für das Folgende genügt es, die Recursionsformel zu kennen. Ich wende dieselbe nunmehr auf einen besonderen Fall an.

V.

Symmetrisch gestaltete Correspondenzen.

Die am Schlusse des Abschnitts III aufgestellten Formeln lassen sich in eine wesentlich einfachere Gestalt bringen, wenn man die Annahme macht, dass die einzelnen Correspondenzen, deren gemeinsame Lösungen zu bestimmen sind, hinsichtlich der Variabeln (1) (2).. .. k, r, s je *symmetrisch gebildete Ausdrücke* sind. Alsdann kann man, unter Einführung kürzerer Bezeichnungen, setzen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_2 = \cdots = \varphi_k = \varphi_r = \varphi_s = \varphi, \\
\psi_1 &= \psi_2 = \cdots = \psi_k = \psi_r = \psi_s = \psi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{12} &= \varphi_{13} = \cdots = \varphi_{rs} = \varphi', \\
\psi_{12} &= \psi_{13} = \cdots = \psi_{rs} = \psi', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Schreibt man ferner:

$$(k+1)! = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k(k+1),$$

und setzt:

$$\frac{1}{(k+1)!}(\varphi\psi\ldots\vartheta)_r = \frac{1}{(k+1)!}(\varphi\psi\ldots\vartheta)_k = \cdots = (\varphi\psi\ldots\vartheta),$$

$$\frac{1}{k!}(\varphi\psi\ldots\vartheta)_{ir} = (\varphi\psi\ldots\vartheta)' \qquad (\text{für } i = 1, 2, \ldots, k, s)$$

und so weiter, so gehn die Formeln (2) (III) über in:

$$\text{(2a)} \quad \begin{aligned}
(k+1)(\varphi\psi\ldots\vartheta) &= S\varphi\,(\psi\chi\ldots\vartheta) - pS\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)', \\
(\varphi\psi\ldots\vartheta)' &= S\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta) - \quad S\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)'.
\end{aligned}$$

Die *eingeführten Ausdrücke* $(\varphi\psi\ldots\vartheta)$ und $(\varphi\psi\ldots\vartheta)'$ fahren fort, eine *geometrische Bedeutung* zu besitzen. Denn da in Folge der symmetrischen Gestalt aller Gleichungen die Elimination der Veränderlichen $1, 2, \ldots k$ auf dieselbe Endgleichung führt, wie die von irgend anderen k der $k+1$ Variablen $1, 2, \ldots, k, r$, so müssen sich alle Lösungen, die es überhaupt giebt, in Gruppen von je $(k+1)!$ zusammenfassen lassen, deren jede nur *einem* (auf die $k+1$ Variabeln in $(k+1)!$ verschiedene Arten vertheilbaren) Lösungssystem entspricht. Die *Anzahl der verschiedenen Lösungssysteme* ist somit der $(k+1)^{\text{te}}$ Theil der früheren, also gleich $(\varphi\psi\ldots\vartheta)$. Diese ist also z. B. für 2 Correspondenzen gleich $(\varphi\psi) = \varphi\psi - p\varphi'\psi'$. Die Correspondenz $\mathsf{P} = 0$ selbst wird zur $k!^{\text{ten}}$ Potenz, und die *Werthigkeit* demnach nur der $k!^{\text{te}}$ Theil der früheren, oder *gleich* $(\varphi\psi\ldots\vartheta)'$. Für 2 Correspondenzen z. B. wird:

$$(\varphi\psi)' = \varphi\psi' + \psi\varphi' - 2\varphi'\psi'.$$

Wir bedürfen für das Nächstfolgende noch einer Abkürzung. Unter:

$$\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}$$

möge der Werth des Ausdrucks $(\varphi\psi\ldots\vartheta)$, geschrieben in:

$$\varphi-\varphi',\ \psi-\psi',\ldots\vartheta-\vartheta',\ p-1$$

anstatt:

$$\varphi,\quad \psi,\quad \ldots\quad \vartheta,\quad p$$

verstanden werden, also:

$$\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}=(\varphi\psi\ldots\vartheta)_{\varphi-\varphi',\psi-\psi',\ldots\vartheta-\vartheta',p-1}.$$

Man überträgt diese Bezeichnungsweise auch auf den Ausdruck für die Werthigkeit, sowie auf eine beliebige Anzahl von Correspondenzen, so dass also z. B.:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}&=\varphi-\varphi',\\ \overline{\varphi'}&=\varphi',\\ \overline{(\varphi\psi)}&=(\varphi-\varphi')(\psi-\psi')-(p-1)\varphi'\psi',\\ \overline{(\varphi\psi)'}&=(\varphi-\varphi')\psi'+(\psi-\psi')\varphi'-2\varphi'\psi'\end{aligned}$$

u. s. w.

ist.

Zwischen den so definirten Ausdrücken bestehen nun die folgenden Beziehungen, die für die Anwendung fundamental sind:

$$(3)\qquad \begin{cases}(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)=\varphi(\psi\chi\ldots\vartheta)-p\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)',\\ (\varphi\psi\ldots\vartheta)'=\ (\varphi\psi\ldots\vartheta)-\ \overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}.\end{cases}$$

Diese Recursionsformeln für symmetrische Correspondenzen sind weit einfacherer Natur, als die früheren (2) III, und lassen fernere Transformationen zu, die dem Angriff auf alle Probleme, welche auf solche Correspondenzgleichungen führen, ein weites und vielseitiges Feld eröffnen.

Es handelt sich zunächst um den Beweis dieser Formeln. Für den Fall $k=1$ folgen sie sofort aus einer Zusammenstellung derjenigen für $(\varphi\psi)$, $(\varphi\psi)'$, $\overline{(\varphi\psi)}$. — Wir schliessen nun von k auf $k+1$.

Vermöge der (2a) hat man:

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned}(k+1)(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)&=\varphi(\psi\chi\ldots\vartheta)+\dot{S}\,\psi(\varphi\chi\ldots\vartheta)\\ &\quad-p\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)'-p\dot{S}\,\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta)',\end{aligned}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)'&=\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)+\dot{S}\,\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta)\\ &\quad-\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)'-\dot{S}\,\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta)',\end{aligned}$$

wo wieder unter $\dot{S}$ die Summe aller aus dem angeschriebenen Glied durch Vertauschung von ψ mit $\chi,\ldots\vartheta$ (φ bleibt an seiner Stelle) entstandenen Terme zu verstehen ist. Nimmt man die Formeln (3)

als bewiesen an für den Fall von irgend k Correspondenzen, wie $\varphi, \chi, \ldots \vartheta$, so hat man:

$$\dot{S}\psi(\varphi\chi\omega\ldots\vartheta) = \varphi S\psi(\chi\omega\ldots\vartheta) - p\varphi' S\psi(\chi\omega\ldots\vartheta)',$$
$$\dot{S}\psi'(\varphi\chi\omega\ldots\vartheta) = \varphi S\psi'(\chi\omega\ldots\vartheta) - p\varphi' S\psi'(\chi\omega\ldots\vartheta)';$$

Daher:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi'(\overline{\varphi\chi\ldots\vartheta}) &= (\varphi-\varphi')S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta}) - (p-1)\varphi' S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta})' \\ &= \varphi S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta}) \\ &\quad - \varphi'\cdot\left\{S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta}) + (p-1)\,S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta})'\right\}.\end{aligned}$$

Hiernach wird:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta)' &= \dot{S}\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta) - \dot{S}\psi'(\overline{\varphi\chi\ldots\vartheta}) \\ &= \varphi S\psi'\left\{(\chi\ldots\vartheta) - (\overline{\chi\ldots\vartheta})\right\} \\ &\quad + \varphi'\left\{S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta}) - pS\psi'(\chi\ldots\vartheta)'\right. \\ &\qquad\qquad \left. + (p-1)S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta})'\right\}.\end{aligned}$$

Daher endlich nach einer kleinen Reduction:

$$\begin{aligned}&\dot{S}\psi(\varphi\chi\ldots\vartheta) - p\dot{S}\psi'(\varphi\chi\ldots\vartheta)' \\ &\qquad = \varphi\,.\,k(\psi\chi\ldots\vartheta) - p\varphi' k\left\{(\psi\chi\ldots\vartheta) - (\overline{\psi\chi\ldots\vartheta})\right\} \\ &\qquad = k\left\{\varphi(\psi\chi\ldots\vartheta) - p\,\varphi'(\psi\chi\ldots\vartheta)'\right\}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Formel (A) ist somit das $(k+1)$-fache dieses letzten Klammerausdrucks und die *erste* der Formeln (3) hierdurch bewiesen, weil sie für $k=1$ gilt.

Dieselbe lässt sich nun beim Beweis der *zweiten* verwenden. Sieht man wiederum diese für k Correspondenzen als richtig an, so erhält man vermöge (B):

$$\text{(Ba)}\quad \begin{aligned}(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)' &= \varphi'(\overline{\psi\chi\ldots\vartheta}) \\ &\quad + \dot{S}\psi'\left\{(\varphi-\varphi')(\overline{\chi\ldots\vartheta}) - (p-1)\varphi'(\overline{\chi\ldots\vartheta})'\right\}.\end{aligned}$$

Aber weil (2a, V):

$$(\psi\chi\ldots\vartheta)' = S\psi'\left\{(\chi\ldots\vartheta) - (\chi\ldots\vartheta)'\right\}$$

ist, so wird:

$$S\psi'(\overline{\chi\ldots\vartheta})' = (\psi\chi\ldots\vartheta)' - (\overline{\psi\chi\ldots\vartheta})'.$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen erkennt man aber sogleich, dass die rechte Seite von (Ba) mit der von:

$$(\varphi\psi\ldots\vartheta)-\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}=\varphi(\psi\ldots\vartheta)-p\,\varphi'(\psi\ldots\vartheta)'$$
$$-\left\{(\varphi-\varphi')\,[(\psi\ldots\vartheta)-(\psi\ldots\vartheta)']\right.$$
$$\left.-(p-1)\varphi'[(\psi\ldots\vartheta)'-\overline{(\psi\ldots\vartheta)}']\right\}$$

übereinstimmt, womit die letzte der Formeln (3), nachdem der Fall $k=1$ oben erledigt worden, bewiesen ist.

VI.

Symmetrisch gebildete Correspondenzen. Andere Gestalt der Correspondenzformel.

Ich hebe noch eine andere Gattung von bemerkenswerthen Formeln hervor, die aus denen (3) durch Umformung sich ableiten. So z. B. ist für 4 Correspondenzen:

$$\begin{aligned}(\varphi\psi\chi\omega)&=(\varphi\psi\chi)\omega-p\,(\varphi\psi\chi)'\omega'\\&=\omega.[(\varphi\psi)\chi-p(\varphi\psi)'\chi']-p\,\omega'.[(\varphi\psi)\chi'+(\varphi\psi)'\chi-2(\varphi\psi)'\chi'\\&\qquad\qquad-2(p-1)\varphi'\psi'\chi']\\&=(\varphi\psi)(\chi\omega)-p(\varphi\psi)'(\chi\omega)'+\frac{p(p-1)}{1.2}(\varphi\psi)''(\chi\omega)''\end{aligned}$$

wenn man:

$$(\varphi\psi)''=(\varphi\psi)'-\overline{(\varphi\psi)}'=2\varphi'\psi'$$

u. s. w. einführt.

Diese Formel gestattet eine Anwendung auf solche Fälle, wo eine *Gruppirung* der vorhandenen vier Correspondenzen zu *je zweien erwünscht* erscheint. In ähnlicher Weise lässt sich die Formel für mehr Correspondenzen, beliebigen Gruppirungen entsprechend, in folgender Weise umgestalten.

Sind die gegebenen Correspondenzen (alle symmetrisch gebildet hinsichtlich der Variabeln):

$$\varphi=0;\ \psi=0;\ldots\vartheta=0;\ \varepsilon=0;\ \zeta=0\ldots\mu=0,$$

und bedeuten $(\varphi\psi\ldots\vartheta)$, $(\varepsilon\zeta\ldots\mu)$ die Ausdrücke für die Anzahl der den g Correspondenzen $\varphi,\psi\ldots\vartheta$ und den $h:\varepsilon,\zeta\ldots\mu$ zukommenden gemeinsamen Lösungen, wenn von den $g+h$ veränderlichen Punkten auf $f=0$ h bezw. g beliebige fest angenommen werden, $(\varphi\psi\ldots\vartheta)'$ die Werthigkeit der durch Elimination von $g-1$ Variabeln resultirenden Correspondenz, oder, wie wir unter Benutzung der Bezeichnung (s. vor. Abschnitt):

$$\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}=(\varphi\psi\ldots\vartheta)_{\varphi-\varphi',\psi-\psi',\ldots p-1}$$

kürzer definiren können:

$$(\varphi\psi\ldots\vartheta)'=(\varphi\psi\ldots\vartheta)-\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)};$$

setzt man analog:

$$(\varphi\psi\ldots\vartheta)'' = (\varphi\psi\ldots\vartheta)' - \overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}',$$

u. s. w., wo:

$$\overline{(\varphi\psi\ldots\vartheta)}' = [(\varphi\psi\ldots\vartheta)']_{\varphi-\varphi',\psi-\psi',\ldots p-1}$$

ist, also die Reihenfolge der Operationen $(\overline{\ })$ und $(\ )'$ vertauschbar, *so lässt sich der Ausdruck für die Anzahl* $(\varphi\psi\ldots\mu)$ *der gemeinsamen Lösungen aller Correspondenzen* $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots \mu = 0$ *als Summe von Producten aus den entsprechenden Zahlen für einerseits nur:*

$$\varphi,\ \psi,\ \ldots\vartheta,$$

und andererseits denen für den Rest:

$$\varepsilon,\ \xi,\ \ldots\mu,$$

durch folgende Formel) darstellen:*

$$(4)\quad\begin{cases}(\varphi\psi\ldots\mu) = (\varphi\psi\ldots\vartheta)(\varepsilon\xi\ldots\mu) - \binom{p}{1}(\varphi\psi\ldots\vartheta)'(\varepsilon\xi\ldots\mu)' \\ \qquad + \binom{p}{2}(\varphi\psi\ldots\vartheta)''(\varepsilon\xi\ldots\mu)'' \\ \qquad - \binom{p}{3}(\varphi\psi\ldots\vartheta)'''(\varepsilon\xi\ldots\mu)''' + \cdots\end{cases}$$

wo:

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2\ldots i},$$

p das Geschlecht der Curve f ist, und die Reihe an der Stelle abbricht, wo zuerst einer der mit oberen Indices versehenen Klammerausdrücke verschwindet.

Die Formeln (4) lassen sich als eine Eigenschaft gewisser durch (3) definirten *Functionen* auffassen und unabhängig von ihrer algebraischen oder geometrischen Bedeutung wie folgt beweisen. Wir verstehen unter: $(\ )'$ und: $(\overline{\ })$ gewisse auf die in der Klammer vorkommenden Ausdrücke angewandte Operationen, zwischen denen die Beziehung besteht:

$$(\ )' = (\ ) - (\overline{\ }),$$

so dass also:

$$a' = a - \bar{a};\quad b' = b - \bar{b};\ \text{u. s. w.}$$

Die Operation $\bar{a}$ möge auf ein *Product* wirken in der Weise, dass:

$$\overline{a\,.\,b} = \bar{a}\,.\,\bar{b} = \bar{b}\,.\,\bar{a}.$$

Dann ist:

*) Diese Formel, sowie einige andere der hier publicirten Ergebnisse habe ich bereits im Sommer 1885 Herrn Klein brieflich mitgetheilt.

$$(ab)' = ab - \overline{ab} = ab - (a-a')(b-b') = ab' + ba' - a'b'.$$

Ferner sei:

$$\bar{p} = p - 1;$$

und, unter $\binom{p}{i}$ einen Binomialcoefficienten verstanden:

$$\overline{\binom{p}{i}} = \binom{p-1}{i}.$$

Dann ist:

$$\binom{p}{i}' = \binom{p}{i} - \binom{p-1}{i} = \binom{p-1}{i-1}$$

ein Ausdruck, der gleich 1 ist für $i = 0$, und verschwindet, wenn an Stelle von $i-1$ eine negative Grösse tritt. Hiernach ist die Operation $(\ )'$, auf das Product angewandt:

$$\text{(C)} \qquad \left(\binom{p}{i} ab\right)' = \binom{p-1}{i-1} ab + \binom{p-1}{i} (ab' + ba' - a'b').$$

Wir setzen $(a')' = a'' = a^{(2)}$, u. s. w. und nehmen noch an:

$$\overline{a^{(g)}} = a^{(g)}; \qquad \overline{b^{(h)}} = b^{(h)},$$

also:

$$a^{(g+1)} = 0; \qquad b^{(h+1)} = 0;$$

ferner $g \geqq h$.

Definirt man endlich, unter der Voraussetzung:

$$c'' = 0$$

die weitere Operation:

$$\text{(D)} \qquad \{a, c\} = ac - pa'c',$$

so gelangt man durch wiederholte Anwendung derselben zu einer Formel, die unter den obigen Annahmen über a, b in die Gestalt gebracht werden kann:

$$\text{(5)} \quad \{a,b\} = ab - \binom{p}{1} a'b' + \binom{p}{2} a''b'' - \binom{p}{3} a'''b''' + \cdots (-1)^h \binom{p}{h} a^{(h)} b^{(h)}$$

$$= \sum_0^h (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} b^{(i)}.$$

Zunächst nämlich ist, wenn $c'' = 0$:

$$\{a, c\}^{(i)} = a^{(i)} c + ic' a^{(i-1)} - 2i a^{(i)} c' - (p-i) a^{(i+1)} c'.$$

Für $i = 0$ geht diese Formel in (D) über. Man beweist ihre Richtigkeit leicht mittelst eines Schlusses von i auf $i+1$ unter Anwendung von (C).

Wir nehmen nun weiter (5) als bewiesen an, und zeigen, dass der Ausdruck $\left\{\{a, b\}, c\right\}$ wieder auf die Form (5) gebracht werden

kann, jedoch in der Anordnung: $\left\{a, \{b, c\}\right\}$. Dann ist die Giltigkeit von (5) auch für $h+1$ nachgewiesen, weil erst:

$$\{b, c\}^{(h+2)}$$

verschwindet, und für $h=1$ (5) auf (D) zurückkommt.

Man kann den Ausdruck:

$$\{a, b\}' = \left[\sum_0^h (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} b^{(i)}\right]'$$

mit Hilfe von (C) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}\{a, b\}' &= \frac{1}{p}\sum_0^h (-1)^i a^{(i)} \binom{p}{i} [i b^{(i)} + (p-i) b^{(i+1)}] \\ &+ \frac{1}{p}\sum_1^{h+1} (-1)^{i-1} a^{(i)} \binom{p}{i} i[-b^{(i)} + b^{(i-1)}].\end{aligned}$$

Wegen:

$$b^{(h+1)} = b^{(h+2)} = 0$$

lässt sich die erste Summe zwischen den Grenzen 0 und $h+1$ nehmen, und man erhält durch Vereinigung beider Summen:

$$\{a, b\}' = \frac{1}{p}\sum_0^{h+1} (-1)^i a^{(i)} \binom{p}{i} [-i b^{(i-1)} + 2 i b^{(i)} + (p-i) b^{(i+1)}].$$

Daher wird:

$$\begin{aligned}\left\{\{a, b\}, c\right\} &= c . \{a, b\} - p c' . \{a, b\}' \\ &= \sum_0^{h+1} (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} [c b^{(i)} + i c' b^{(i-1)} - 2 i c' b^{(i)} - (p-i) c' b^{(i+1)}] \\ &= \sum_0^{h+1} (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} . \{b, c\}^{(i)} = \left\{a, \{b, c\}\right\}, \qquad \text{q. e. d.}\end{aligned}$$

Auf die hiermit bewiesene Formel (5) kommt aber die (4) zurück, wenn:

$$(\varphi\psi \ldots \vartheta) = a, \quad (\varepsilon\zeta \ldots \mu) = b$$

und:

$$\{a, b\} = (\varphi\psi \ldots \mu)$$

gesetzt wird. Diese letzte Vergleichung ist gestattet, nachdem gezeigt ist, dass die Operation $\{\ \}$ eine associative ist. In der That sind die Formel (D) und die früheren Annahmen hinsichtlich der Operationen $(\ )'$ und $\overline{(\ )}$ keine anderen, als die in (3) (Abschn. V) aufgestellten, und aus der Voraussetzung, dass die Zahl der Correspondenzen

$\varphi, \psi \ldots \vartheta$ ist, folgt, weil $a = (\varphi \psi \ldots \vartheta)$ eine homogene Function g^{ter} Ordnung der $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \ldots \vartheta'$ ist, dass deren $(g+1)^{\text{te}}$ Differenz $a^{(g+1)}$ verschwindet. Dasselbe gilt für die $(h+1)^{\text{te}}$ Differenz von b. Dies ist aber eben die Bedingung, die oben noch eingeführt wurde, und somit ist die Formel (4) gleichfalls bewiesen.

VII.

Lösung des Problems der Specialgruppen.

Das Vorstehende gewährt nun die Mittel, um das in I. formulirte Problem zu lösen. Algebraisch zu reden, handelt es sich um Bestimmung der Systeme von Werthepaaren $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots x_k y_k$, welche sämmtliche k-reihigen Determinanten des Rechtecks:

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \ldots & \varphi_{k+i}(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \ldots & \varphi_{k+i}(x_2 y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_k y_k) & \varphi_2(x_k y_k) & \ldots & \varphi_{k+i}(x_k y_k) \end{matrix} \right\|$$

zum Verschwinden bringen, während die Gleichungen bestehen:

$$f(x_1 y_1) = 0, \quad f(x_2 y_2) = 0 \ldots f(x_k y_k) = 0.$$

Wir schicken der allgemeinen Erledigung der Frage den Fall $i = 1$ einer Matrix mit einer Verticalreihe mehr, als Horizontalreihen auftreten, voraus. Das Problem stellt für die k Punkte der Curve zwei Bedingungen, also sind 2 durch die übrigen $k-2$ (beliebig wählbaren) bestimmt. Auf wieviel verschiedene Arten? erfährt man auf dem durch die Formeln des § 2 angegebenen Wege:

$$(k+1) = (k, k) - (k-1),$$

wonach zuerst die Anzahl (k, k) von Punktepaaren auf f, für welche irgend 2 Determinanten des Rechtecks (sie mögen ϑ, ψ heissen) verschwinden, zu bestimmen ist. Man hat hier den Fall von zwei Correspondenzen zwischen den Punkten (1), (2), $\ldots k$ von f. Eliminirt man aus $\vartheta = 0$, $\psi = 0$ etwa $x_k y_k$ mit Hilfe von $f = 0$, so besitzt die Resultante als Curvengleichung hinsichtlich irgend eines der nicht eliminirten Variablenpaare aufgefasst mit $f = 0$ noch:

$$(\vartheta \psi) = (\vartheta)(\psi) - p(\vartheta)'(\psi)'$$

„freie“ Schnittpunkte, wo (ϑ) die Anzahl der mit (1) beweglichen Schnittpunkte von $\vartheta = 0$ mit $f = 0$ ist, die nicht in die Ausnahmepunkte und nicht in die übrigen rational angebbaren Punkte fallen, also:

$$(\vartheta) = ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - (k-1) - \sigma,$$

$$(\psi) = ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - (k-1) - \sigma,$$

indem die in ϑ und ψ auftretenden Ausdrücke $\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k$, die wir hinsichtlich jeder der Variabeln vom Grad s annehmen, sich nach der früheren Annahme zu f adjungirt verhalten, d. h. in jedem α-fachen Punkte von f $\alpha-1$-fache Punkte haben und etwa durch σ *einfache* Ausnahmepunkte von f noch alle hindurchgehen. Ferner ist $(\vartheta)'$ die Werthigkeit von ϑ, d. h. die Vielfachheit des Verschwindens von ϑ, wenn eines der $x_i\,y_i$ gleich einem anderen wird, also hier:

$$(\vartheta)'=(\psi)'=1.$$

Setzt man:

$$ns-\sum\alpha(\alpha-1)-k-\sigma=M,$$

so wird:

$$(\vartheta)=(\psi)=M+1,$$

und man hat:

$$(k,k)=(\vartheta\psi)=(M+1)^2-p.$$

Um noch die in der obigen Formel vorkommende Zahl $(k-1)$ (sowie allgemein die für $(k-i)$ der Formel (12) von II) zu bestimmen, bedarf es nicht der Correspondenzformel. Denn die Werthsysteme, für die alle Determinanten des (auf der schmalen Seite stehenden) Rechtecks verschwinden:

$$\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x_1y_1) & \varphi_2(x_1y_1) & \ldots & \varphi_{k-1}(x_1y_1)\\ \varphi_1(x_2y_2) & \varphi_2(x_2y_2) & \ldots & \varphi_{k-1}(x_2y_2)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_1(x_ky_k) & \varphi_2(x_ky_k) & \ldots & \varphi_{k-1}(x_ky_k)\end{matrix}\right\|,$$

erhält man, wenn man irgend eine der k Determinanten, z. B. die durch Weglassen der letzten Horizontalreihe entstehende, gleich Null setzt. Sie liefert, sofern etwa die $k-2$ ersten Punkte als gegeben angesehen werden, für den $(k-1)^{\text{ten}}$ noch:

$$ns-\sum\alpha(\alpha-1)-(k-2)-\sigma=M+2$$

freie Punkte $x_{k-1}\,y_{k-1}$. Die gleichen Werthepaare würden sich aber für $x_k\,y_k$ ergeben, wenn man statt der letzten die vorletzte Zeile wegliesse. Diejenigen freien *Punktepaare* $k-1$, k, welche beide Determinanten zugleich zu Null machen, sind also, unter Weglassung der zusammenfallenden, die:

$$\frac{(M+2)(M+1)}{2}$$

Paare, die sich aus jenen $M+2$ bilden lassen. Für sie verschwinden ausserdem von selbst alle Determinanten der Matrix, welche die zwei letzten Reihen enthalten. Es ist also:

$$(k-1)=\frac{(M+2)(M+1)}{2}=\binom{M+2}{2}.$$

Unter Einsetzung dieses Werthes und des für (k, k) erhält man für die Anzahl der Lösungen des Problems im Falle $i = 1$:

$$(7) \qquad (k+1) = (k+1)_k = (M+1)^2 - p - \binom{M+2}{2}$$
$$(k+1)_k = \binom{M+1}{2} - p.$$

Wir wenden uns nun sogleich zu der allgemeinen Aufgabe, *die Anzahl $(k+i)$ der Systeme von $i+1$ Punkten der Curve f so zu bestimmen, dass sie zusammen mit $k-i-1$ gegebenen derselben Curve die Determinanten der Matrix* (6) *sämmtlich zum Verschwinden bringen.* Die Schlussformel (12) in II. führt diese Frage zurück auf die Berechnung der einzelnen Summanden des Ausdrucks:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} (k+i) &= \{k+i-1, k\} - \{k+i-2, k-1\} + \{k+i-3, k-2\} - \cdots \\ &\qquad + (-1)^{i-1}\{k, k-i+1\} + (-1)^i (k-i) \\ &= -\mathop{S}_{\varrho=1}^{\varrho=i} (-1)^\varrho \{k+i-\varrho, k-\varrho+1\} + (-1)^i (k-i). \end{aligned} \right.$$

Bezüglich der Berechnung von $(k-i)$ kann ich auf die oben vorgenommene von $(k-1)$ verweisen. Genau dieselben Ueberlegungen führen auf die Formel:

$$(9) \quad (k-i) = \frac{(M+i+1)(M+i)\ldots(M+1)}{1.2\ldots i+1} = \binom{M+i+1}{i+1},$$

die der Reihe nach auf die Fälle $i = 1, 2, \ldots i$ anzuwenden sein wird. Die Summanden in (8) sind einzeln mit Hilfe der Formel (5) des vorigen Paragraphen zu berechnen und zwar:

$$(9a) \quad \{k+i-\varrho, k-\varrho+1\} = \sum_{\tau=0}^{\tau=h} (-1)^\tau \binom{p}{\tau} (k+i-\varrho)^{(\tau)} (k-\varrho+1)^{(\tau)},$$

wo die obere Grenze h gleich der kleineren der Zahlen ϱ und $i-\varrho+1$ ist, weil $(k+i-\varrho)$, $(k-\varrho+1)$ Aggregate von $i-\varrho+1$, bezw. ϱ (symmetrisch gebildeten) Correspondenzen bedeuten, diese letzteren Zahlen also die Stelle von g und h in VI. vertreten. Die Werthigkeitszahlen dieser Correspondenzen sind alle gleich 1, und sämmtliche Zahlen (ϑ), (ψ), ... (der freien Punkte) sind gleich $M+1$. — Ist ι irgend eine der Zahlen $i, i-1, \ldots$, so hat man, in den Bezeichnungen von VI:

$$(k+\iota)' = (k+\iota) - (\overline{k+\iota}); \quad (k-\iota)' = (k-\iota) - (\overline{k-\iota}),$$

wo $(\overline{k+\iota})$ gleich $(k+\iota)$, geschrieben in $M-1$, $p-1$ statt in M, p ist, und ebenso:

$$(k-\iota)' = \binom{M+\iota+1}{\iota+1} - \binom{M+\iota}{\iota+1} = \binom{M+\iota}{\iota},$$

daher, nach τ-facher Wiederholung dieser Operation:

$$\text{(E)}\qquad (k-\iota)^{(\tau)} = \binom{M+\iota-\tau+1}{\iota-\tau+1}.$$

Ich habe nun an der Hand dieser Beziehungen *den folgenden Ausdruck für die allgemeine Zahl* $(k+\iota)$ (in ausführlicher Schreibweise) $(k+\iota)_k$) *gefunden:*

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} (k+\iota)_k &= \sum_0^{\Lambda} (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda}\binom{M-2\lambda+1}{\iota-2\lambda+1} = \\ &= \binom{M+1}{\iota+1} - \binom{p}{1}\binom{M-1}{\iota-1} + \binom{p}{2}\binom{M-3}{\iota-3} \\ &\qquad - \binom{p}{3}\binom{M-5}{\iota-5} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

wo die obere Grenze für λ:

$$\Lambda = \begin{cases} \dfrac{\iota+1}{2} & \text{für } \iota \text{ ungerade,} \\[2mm] \dfrac{\iota}{2} & \text{für } \iota \text{ gerade} \end{cases}$$

ist. Ich beweise deren Richtigkeit durch einen Schluss von $i-1$ auf i, indem ich sie für $\iota = 0, 1, 2, \ldots i-1$ als bewiesen ansehe.

Zunächst ist wieder $(k+\iota)'$, $(k+\iota)''$, . , . $(k+\iota)^{(\tau)}$ im Anschluss an die Formel (10) zu bilden. Vermöge der (C) des § VI wird:

$$\begin{aligned} (k+\iota)' &= \sum_0^{\Lambda} (-1)^\lambda \left[\binom{p}{\lambda}\binom{M-2\lambda+1}{\iota-2\lambda+1}\right]' = \\ &= \sum_0^{\Lambda} (-1)^\lambda \left[\binom{p}{\lambda}\binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda} + \binom{p-1}{\lambda-1}\binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda+1}\right], \end{aligned}$$

wo immer:

$$\text{(F)}\qquad \binom{a}{0} = 1;\quad \binom{a}{-1} = \binom{a}{-2} = \cdots = 0$$

vorausgesetzt ist. Man kann dem Ausdruck in der Klammer [ ] durch Anwendung der Formeln:

$$\binom{p}{\lambda} = \binom{p-1}{\lambda-1} + \binom{p-1}{\lambda},$$

$$\binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda} + \binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda+1} = \binom{M-2\lambda+1}{\iota-2\lambda+1}$$

die Gestalt geben:

$$\left[\binom{p-1}{\lambda-1}\binom{M-2\lambda+1}{\iota-2\lambda+1} + \binom{p-1}{\lambda}\binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda}\right],$$

oder, unter Beiziehung ohnedies verschwindender Glieder und Aenderung des Summationsbuchstabens der ersten Summe:

$$(k+\iota)' = \sum_0^{\Lambda_1} (-1)^{\lambda-1} \binom{p-1}{\lambda} \left[\binom{M-2\lambda-1}{\iota-2\lambda-1} - \binom{M-2\lambda}{\iota-2\lambda} \right] =$$

$$= \sum_0^{\Lambda_1} (-1)^{\lambda} \binom{p-1}{\lambda} \binom{M-2\lambda-1}{\iota-2\lambda},$$

wo nun:

$$\Lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{\iota}{2} \\[1ex] \dfrac{\iota-1}{2} \end{cases}$$

ist. Dieser Ausdruck hat dieselbe Form, wie (10), und nach τ-maliger Wiederholung des Processes folgt:

$$\text{(G)} \qquad (k+\iota)^{(\tau)} = \sum_0 (-1)^{\lambda} \binom{p-\tau}{\lambda} \binom{M-2\lambda-2\tau+1}{\iota-2\lambda-\tau+1},$$

wo wegen der Gleichungen (F) die Formel von selbst an der richtigen Stelle abbricht, so dass die obere Grenze weggelassen werden konnte.

Geht man nun mit den Ausdrücken (E), (G) in die Formel (9a) ein, mit dieser und (9) in (8), so kommt eine dreifache Summe, die sich so schreiben lässt:

$$(k+i)_k = -\mathop{S}_{\varrho=1}^{\varrho=i} (-1)^{\varrho} \sum_{\tau=0} (-1)^{\tau} \binom{p}{\tau} \binom{M+\varrho-\tau}{\varrho-\tau}$$

$$\sum_{\lambda=0} (-1)^{\lambda} \binom{p-\tau}{\lambda} \binom{M-2\tau-2\lambda+1}{i-\varrho-\tau-2\lambda+1} +$$

$$+ (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1}.$$

Da diese Summe da abbricht, wo einer der Factoren Null ist, so ist die Summationsfolge vertauschbar, die Summenzeichen können vorausgesetzt werden, und die Factoren vereinigt. Nun ist:

$$\binom{p}{\tau}\binom{p-\tau}{\lambda} = \binom{p}{\lambda+\tau}\binom{\lambda+\tau}{\tau}.$$

Setzt man daher:

$$\lambda + \tau = \sigma,$$

so wird:

$$(k+i)_k = (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1} -$$

$$- \mathop{S}_{\varrho=1}^{\varrho=i} \sum_{\sigma=0} \sum_{\tau=0} (-1)^{\varrho+\sigma} \binom{p}{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} \binom{M+\varrho-\tau}{\varrho-\tau} \binom{M-2\sigma+1}{i-\varrho+\tau-2\sigma+1}.$$

Zieht man aus der Summe das Glied heraus, für welches $\tau = 0$, $\sigma = 0$, und folglich

$$\binom{p}{\sigma}\binom{\sigma}{\tau} = \binom{p}{\tau}\binom{p-\tau}{\lambda} = 1$$

ist, so lässt sich dies mit dem vor dem Summenzeichen stehenden zu:

$$A = (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1} - \mathop{S}_{\varrho=1}^{\varrho=i} (-1)^\varrho \binom{M+\varrho}{\varrho}\binom{M+1}{i-\varrho+1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=i} (-1)^\nu \binom{M+\nu+1}{\nu+1}\binom{M+1}{i-\nu}$$

vereinigen, und in: $(k+i)_k = A - B$ ist der Rest: B die dreifache Summe, nur dass σ von der unteren Grenze 1 ab geht. Wir verwandeln in B die untere Grenze für ϱ in 0, indem wir ein Glied addiren und subtrahiren, das diesem Werth entspricht, und für welches denn auch $\tau = 0$ sein muss, wenn das Glied nicht von selbst verschwinden soll. Nach Einführung eines neuen Summationsbuchstabens:

$$\nu = \varrho - \tau$$

erhält man so:

$$B = -\sum_{\sigma=1} (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma}\binom{M-2\sigma+1}{\iota-2\sigma+1} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1} \mathop{S}_{\nu=0}^{\nu=i-\tau} (-1)^{\nu+\sigma} \binom{p}{\sigma}\binom{M+\nu}{\nu}\binom{M-2\sigma+1}{i-\nu-2\sigma+1} \sum_{\tau=0} (-1)^\tau \binom{\sigma}{\tau},$$

wo die untere Grenze für ν aus: $(-\tau)$ in: 0 verwandelt wurde, weil

$$\binom{M+\nu}{\nu}$$

für negative ν verschwindet. Die Grösse $\tau = \sigma - \lambda$ ist aus ähnlichem Grunde immer $\leqq \sigma$ zu nehmen. Aber der Werth des zweiten Gliedes in B ist Null, weil für $\sigma \geqq \tau \geqq 0$:

$$\sum_{\tau=0} (-1)^\tau \binom{\sigma}{\tau} = 0.$$

B reducirt sich also auf das erste Glied rechts. Was A angeht, so beweist man mit Hilfe bekannter Relationen zwischen Binomialcoefficienten, wie wir in IX. zeigen werden, dass die Summe A ausführbar ist, nämlich:

$$A = \binom{M+1}{i+1}.$$

Demnach wird:

$$(k+i)_k = A - B = \sum_{\sigma=0} (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma}\binom{M-2\sigma+1}{i-2\sigma+1}$$

in Uebereinstimmung mit der Formel (10), w. z. b. w.

VIII.

Algebraische Functionen, die in einer Maximalzahl von Punkten der Curve Null und unendlich werden.

Diese Functionen sind Quotienten von ganzen Functionen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die sich adjungirt verhalten und in den Punkten *einer der Specialgruppen* $G_Q^{(1)}$, für die Q ein Minimum ist, verschwinden. Man hat, um die Anzahl dieser Gruppen zu finden, die Formel (10) des vorigen Abschnitts auf den Fall anzuwenden, dass:

$$s = n-3; \quad \sigma = 0; \quad k+i = p,$$

also:

$$M = n(n-3) - \sum \alpha(\alpha-1) - k = 2p-2-k$$

ist, und, in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen des I. Abschnitts:

$$k = Q; \quad M = 2p-2-k = R; \quad i = r,$$

zu setzen, während $q = 1$ ist. Dann ist *die Anzahl der Gruppen* $G_Q^{(1)}$ *von* Q *Punkten einer Curve vom Geschlecht* p, *welche zu einem willkürlich angenommenen dieser Punkte so bestimmbar sind, dass durch* $G_Q^{(1)}$ *eine* r*-fach unendliche Schaar von adjungirten Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung geht, gleich:*

$$[p]_Q = [Q+r]_Q = \sum_{\sigma=0} (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma}\binom{R+1-2\sigma}{r+1-2\sigma}.$$

Diese Formel wurde zuerst in der Abhandlung von Herrn Nöther und mir im VII. Bd. dieser Ann. S. 296 ohne Beweis veröffentlicht. Ein Vergleich derselben mit der des Herrn Castelnuovo lehrt, dass die Summation ausführbar sein muss. In der That bestehen (je nachdem p gerade oder ungerade, also $Q = \frac{p}{2}+1$ oder $= \frac{p+3}{2}$ ist) die folgenden merkwürdigen Beziehungen:

$$[p]_{\frac{p}{2}+1} = \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \binom{p}{\nu}\binom{\frac{3p}{2}-2-2\nu}{\frac{p}{2}-2\nu} = \frac{1}{\frac{p}{2}}\binom{p}{\frac{p}{2}-1},$$

$$[p]_{\frac{p+3}{2}} = \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \binom{p}{\nu}\binom{\frac{3p-5}{2}-2\nu}{\frac{p-1}{2}-2\nu} = \frac{2}{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{\frac{p-3}{2}}.$$

Den Nachweis derselben erbringe ich in der nachstehenden Note. — Mit weniger Aufwand an Rechnung beweist man im Folgenden eine andere Beziehung zwischen Binomialcoefficienten.

IX.

Eine Relation zwischen Binomialcoefficienten.

Es handelt sich um den nachträglichen Beweis der in VII. a. E. benutzten Identität:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=i}(-1)^\nu\binom{M+\nu+1}{\nu+1}\binom{M+1}{i-\nu}=\binom{M+1}{i+1}.$$

Man kann dem Ausdruck unter dem Summenzeichen die Form geben:

$$\binom{M+\nu+1}{\nu+1}\binom{M+1}{i-\nu}=\binom{M+\nu+1}{M}\left\{\binom{M}{M+1-i+\nu}+\binom{M}{M+\nu-i}\right\}$$
$$=\binom{M+\mu}{i}\binom{i}{\mu}+\binom{M+\mu}{i+1}\binom{i+1}{\mu},$$

wo:

$$\nu+1=\mu$$

gesetzt wurde. Man hat also, wenn S die zu bestimmende Summe ist:

$$S=-\sum_{\mu=1}^{\mu=i+1}(-1)^\mu\binom{M+\mu}{i}\binom{i}{\mu}-\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu\binom{M+\mu}{k}\binom{k}{\mu}$$

für:

$$k=i+1.$$

Weil ferner:

$$\binom{i}{i+1}=0$$

ist, so braucht die erste Summe bloss bis $\mu=i$ ausgedehnt zu werden. Fügt man noch je ein Glied zu, das dem Werth $\mu=0$ entspricht, so wird, indem man es wieder abzieht:

$$S=-f(i)-f(k)+\binom{M}{i}+\binom{M}{k}$$
$$=-f(i)-f(k)+\binom{M+1}{i+1},$$

wenn:

$$\sum_0^i(-1)^\mu\binom{M+\mu}{i}\binom{i}{\mu}=f(i)$$

gesetzt wird. Diese Summe lässt sich nun auswerthen, indem man das allgemeine Glied als den i^{ten} Differentialquotienten einer passend bestimmten Potenz von x, genommen für $x=1$, auffasst, und die

Summe auf die Berechnung des i^{ten} Differentialquotienten einer Potenz des Binoms $1 - x$ zurückführt. In der That ist:

$$f(i) = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dx^i}\sum_0^i (-1)^\mu \binom{i}{\mu} x^{M+\mu}\right]_{x=1}$$

$$= \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dx^i} x^M (1-x)^i\right]_{x=1} = (-1)^i.$$

Entsprechend wird $f(k) = (-1)^{i+1}$, also:

$$f(i) + f(k) = 0,$$

hiernach:

$$S = \binom{M+1}{i+1}, \text{ w. z. b. w.}$$

Summation einer gewissen endlichen Reihe.

Von

A. Brill in Tübingen.

In der Nummer VII des vorstehenden Aufsatzes wird eine Anzahlbestimmung vorgenommen, die auf eine endliche Reihe führt von der Form:

$$(1)\quad \binom{m}{n} - \binom{m-2}{n}\binom{q}{1} + \binom{m-4}{n}\binom{q}{2} - \cdots = \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \binom{m-2\nu}{n}\binom{q}{\nu},$$

wo:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

ist; und m, $n(< m)$, $q(> n)$ ganze positive Zahlen sind. In Nr. VIII wird erwähnt, dass für:

$$m = \frac{3q}{2} - 2, \quad n = q - 2,$$

wo q eine gerade Zahl ist, diese Reihe einen einfachen Summenausdruck zulässt. Ich werde die Summation vornehmen und zeigen, dass ein solcher Ausdruck immer angebbar ist, wenn $m = q + \frac{n}{2} - 1$ ist.

Man könnte die Auswerthung der Reihe an bekannte Untersuchungen über die hypergeometrischen Reihen anzuknüpfen wünschen. Wenn nämlich:

$$-q = \alpha; \quad -m + n = \beta; \quad -m = \gamma$$

gesetzt wird, so gewinnt, mit Rücksicht auf die Relation:

$$\binom{m-2\nu}{n}\binom{m}{2\nu} = \binom{m}{n}\binom{m-n}{2\nu},$$

die Reihe (1) die Form:

$$\binom{m}{n}\sum_0 (-1)^\nu \frac{\binom{m-n}{2\nu}\binom{q}{\nu}}{\binom{m}{2\nu}}$$

$$= \binom{m}{n}\left[1 + \frac{\alpha\beta(\beta+1)}{1.\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \cdots\right]$$

einer hypergeometrischen Reihe höherer Ordnung, wie sie Herr Thomae untersucht hat. Aber die hiernach bekannten Relationen zwischen Functionen dieser Art, denen die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass γ eine negative ganze Zahl nicht ist, würden sich für einen blossen Bestandtheil*) einer solchen Reihe, wie er hier vorliegt, nicht sämmtlich, und die gebräuchlichen nur mit Vorsicht verwenden lassen. Um für unseren Zweck dienliche Gleichungen zwischen „Nachbarfunctionen“ (f. contiguae) zu bilden, wird man den Weg directer Rechnung betreten müssen. Das Verfahren**), welches Gauss in der Einleitung zu seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe einhält, führt im vorliegenden Fall zu ermüdenden Rechnungen. Man sieht sich genöthigt, die Allgemeinheit fallen zu lassen, um die Uebersicht zu erhalten.

Ich führe deshalb gleich von Anbeginn *die Voraussetzung ganzzahliger positiver Werthe von m, n, q in die Rechnung ein, und nehme noch:*

$$n < q$$

an. Gelten von den solchergestalt erhaltenen Beziehungen die meisten nur unter dieser Beschränkung, so zeichnen sie sich dafür vor den allgemein giltigen durch Einfachheit aus.

Wir bezeichnen im Folgenden mit:

$$(m, n, q) = \sum_{0}^{\varrho} (-1)^{\nu} \binom{m-2\nu}{n} \binom{q}{\nu}$$

die endliche Reihe derjenigen Glieder, die vor dem ersten verschwindenden abbricht.

Da im Falle $m < n$ die Reihe mit einem verschwindenden Glied beginnt, so schliessen wir auch diesen aus der Betrachtung aus, *nehmen also noch:*

---

*) Im Falle negativer ganzer Zahlen α, β, γ, für welche, absolut genommen:

$$|\beta| + 1 < |\gamma| < |2\alpha|;$$

ist, zerfallen die nicht verschwindenden Glieder obiger Reihe in zwei Gruppen, die durch eine Gruppe verschwindender getrennt sind, und von denen hier nur die eine in Betracht kommt.

**) Die Form der hier einschlägigen Relationen lässt sich übrigens auch auf diesem Wege erkennen, so beispielsweise die Existenz einer homogenen linearen Gleichung zwischen den Functionen:

$$(abcx),\ x(abcx),\ (x+1)(a, b, c+1, x),\ x(a, b, c-1, x),\ x(a, b, c-2, x)$$

(welche der Gauss'schen Nr. 15 analog ist), wenn:

$$(abcx) = \sum \frac{\binom{a}{\nu}\binom{b}{2\nu}}{\binom{c}{2\nu}} x^{\nu}$$

ist, und in welcher $x = -1$ zu setzen ist.

$$m \geqq n$$

an. — Die gegebene Reihe bricht vor dem Gliede ab, in welchem zuerst einer der beiden Factoren:

$$\binom{m-2\nu}{n}, \quad \binom{q}{\nu}$$

verschwindet. Der letzte wird vor dem ersten oder zugleich mit ihm Null, wenn:

$$q \leqq \frac{m-n}{2}$$

ist. Alsdann ist die obere Grenze ϱ der Summe Σ also der Stellenzeiger des letzten Gliedes der Reihe:

$$\varrho = q$$

anzunehmen, und man zeigt leicht, dass in diesem Fall:

$$(m, n, q) = 0$$

ist.

Denn die Reihe:

$$\sum_0^q (-1)^\nu \binom{m-2\nu}{n} \binom{q}{\nu}$$

lässt sich immer, wenn n und q ganze Zahlen sind, als n^{ter} Differentialquotient nach x der Potenz eines Binoms $1-x^2$, multiplicirt in eine Potenz von x, nachdem $x=1$ gesetzt ist, auffassen. Unter diesen Annahmen ist nämlich:

$$\binom{m-2\nu}{n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n} x^{m-2\nu}\right]_{x=1},$$

wo $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots, n$ ist.

Weil aber:

$$\sum_0^q (-1)^\nu \binom{q}{\nu} x^{m-2\nu} = x^{m-2q}(x^2-1)^q = x^{m-2q}(x+1)^q (x-1)^q$$

ist, so wird der n^{te} Differentialquotient dieser Summe, gebildet für $x=1$, die $(2q-n)^{\text{te}}$ Potenz von 2 zum Factor haben, wenn q zwischen n und $\frac{n}{2}$ liegt, und ganz verschwinden, wenn zwischen den positiven Zahlen q, n die Ungleichung $q > n$ besteht.

In dem letzteren Fall ist also immer:

$$(2) \quad \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n} \sum_0^q (-1)^\nu \binom{q}{\nu} x^{m-2\nu}\right]_{x=1} = \sum_0^q (-1)^\nu \binom{m-2\nu}{n}\binom{q}{\nu} = 0.$$

2. Mehr Umstände bereitet der Fall:

$$q > \frac{m-n}{2}.$$

Jenachdem $m-n$ gerade oder ungerade ist, wird die Summe abbrechen mit dem Glied, dessen Stellenzeiger:

$$\varrho = \begin{cases} \frac{m-n}{2}, \\ \frac{m-n-1}{2} \end{cases}$$

ist. Zunächst für $m \geqq 2q$ ist wieder:

$$(m, n, q) = 0.$$

Denn theilt man die Glieder der Summe:

$$\sum_0^q (-1)^\nu \binom{m-2\nu}{n} \binom{q}{\nu} = \sum_0^q$$

in zwei Theile:

$$\sum_0^q = \sum_0^\varrho + \sum_{\varrho+1}^q = (m, n, q) + \sum_{\varrho+1}^q,$$

so verschwindet für $m \geqq 2q$ jedes Glied der zweiten Summe rechts, weil für $\varrho < \nu \leqq q$ wegen $m - 2q \geqq 0$ auch $m - 2\nu \geqq 0$ ist, und zugleich wegen $2\nu \geqq 2\varrho + 2 \geqq m - n + 1$, $m - 2\nu < n$ ist. Weil nun die ganze Summe Null ist, so verschwindet mit dem zweiten Theil auch der erste, w. z. b. w.

3. Bleibt der Fall zu erledigen:

$$q > \frac{m-n}{2}, \quad m < 2q.$$

Dies erfordert einige Vorbereitung.

Wegen der bekannten für jedes positive ganze n giltigen Formel:

$$\binom{m-2\nu}{n} = \binom{m-2\nu-1}{n} + \binom{m-2\nu-1}{n-1}$$

besteht die Beziehung:

(3) $$(m, n, q) = (m-1, n, q) + (m-1, n-1, q).$$

Ersetzt man ferner in:

$$(m, n, q) = (m, n, q-1) + \sum_0^\varrho (-1)^\nu \binom{m-2\nu}{n} \binom{q-1}{\nu-1}$$

den Summationsbuchstaben ν der letzten Summe durch:

$$\mu = \nu - 1,$$

so geht dieselbe, weil:

$$\binom{q-1}{-1} = 0$$

ist, in:

$$\sum_0^{\sigma}(-1)^{\mu+1}\binom{m-2-2\mu}{n}\binom{q-1}{\mu} = -(m-2, n, q-1)$$

über, wo nun $\sigma = \varrho - 1$ das letzte nicht verschwindende Glied ergiebt, und man hat die weitere Relation:

$$(4) \qquad (m, n, q) = (m, n, q-1) - (m-2, n, q-1).$$

Man betrachte ferner die Summe:

$$\sum_0^{q}(-1)^{\nu}\binom{m-2\nu}{n}\binom{q}{\nu} = \sum_0^{q},$$

die wegen (2) verschwindet, und zerlege dieselbe in die drei Theile:

$$\sum_0^{q} = \sum_0^{\varrho} + \sum_{\varrho+1}^{q-\tau-1} + \sum_{q-\tau}^{q} = 0,$$

wo die Grenze $\tau (q > \tau > \varrho)$ sogleich bestimmt werden wird. Führt man in der letzten Summe rechts statt ν den Summationsbuchstaben:

$$\mu = q - \nu$$

ein, so wird, vermöge der Beziehung:

$$\binom{m-2q+2\mu}{n} = (-1)^n\binom{m'-2\mu}{n},$$

wo:

$$n - m + 2q - 1 = m'$$

nach der Annahme eine positive ganze Zahl oder Null ist:

$$\sum_{q-\tau}^{q}(-1)^{\nu}\binom{q}{\nu}\binom{m-2\nu}{n} = (-1)^{n+q}\sum_0^{\tau}(-1)^{\mu}\binom{q}{\mu}\binom{m'-2\mu}{n}$$
$$= (-1)^{n+q}(m', n, q).$$

Wegen der Ungleichung $m < 2q$ ist $m' \geqq n$, und wegen

$$q > \frac{m'-n}{2}$$

ist als obere Grenze τ die positive ganze Zahl:

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{m'-n}{2}, \\[2mm] \dfrac{m'-n-1}{2} \end{cases}$$

anzunehmen. — Ferner wird in den einzelnen Gliedern der Summe:

$$\sum_{\varrho+1}^{q-\tau-1}(-1)^{\nu}\binom{q}{\nu}\binom{m-2\nu}{n},$$

der Factor:

$$\binom{m-2\nu}{n}$$

immer dann Null sein, wenn zugleich:

$$m-n-2\nu<0;\quad m-2\nu\geqq 0$$

ist. Also verschwinden sämmtliche Glieder dieser Summe, wenn zugleich:

$$\varrho+1>\frac{m-n}{2};\quad m-2(q-\tau-1)\geqq 0$$

ist, d. h. für:

$$\tau+1>\frac{m'-n}{2}.$$

Diese Bedingungen für ϱ und τ sind aber nach Annahme erfüllt. Daher wird (wegen (3)) in dem Fall:

$$q>\frac{m-n}{2};\quad m\leqq 2q-1$$

von den drei Theilen der vorliegenden Summe der mittlere Null, und man erhält:

(5) $$(m,n,q)+(-1)^{n+q}(2q+n-1-m,n,q)=0.$$

4. Aus dieser Formel fliessen weitere bemerkenswerthe Beziehungen:

Ist insbesondere:

$$m=q+\frac{n-1}{2},$$

wo q und n $(<q)$ ungerade Zahlen sind, so geht (5) über in:

(6) $$\left(q+\frac{n-1}{2},n,q\right)=0.$$

Setzt man aber in (5):

$$m=q+\frac{n+1}{2},$$

so erhält man, wenn man wieder n und q ungerade annimmt, wegen (4) die Relation:

(7) $$\left(q+\frac{n+1}{2},n,q\right)=-\left(q+\frac{n-3}{2},n,q\right)=\frac{1}{2}\left(q+\frac{n+1}{2},n,q+1\right).$$

Macht man endlich in (5):

$$q=q'+1;\quad n=n'+1;\quad m=q'+\frac{n'+3}{2}$$

und nimmt n', q' als ungerade Zahlen an, so kommt:

$$\left(q'+\frac{n'+3}{2},n'+1,q'+1\right)+\left(q'+\frac{n'+1}{2},n'+1,q'+1\right)=0.$$

Lässt man die oberen Accente weg und combinirt mit (3), so erhält man:

$$(8)\qquad \left(q+\frac{n+3}{2},\ n+1,\ q+1\right)=-\left(q+\frac{n+1}{2},\ n+1,\ q+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(q+\frac{n+1}{2},\ n,\ q+1\right).$$

Die rechten Seiten der Formel (7) und (8) stimmen überein, also ist:

$$(9)\qquad \left(q+\frac{n+1}{2},\ n+1,\ q+1\right)=\left(q+\frac{n-3}{2},\ n,\ q\right).$$

5. Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe einer Recursionsformel auswerthen, die wir aus (6) ableiten. (6) in Verbindung mit (3) ergiebt:

$$(10)\qquad \left(q+\frac{n+1}{2},\ n,\ q\right)=\left(q+\frac{n-1}{2},\ n-1,\ q\right),$$

oder auch, wegen (7), (9):

$$\left(q+\frac{n+1}{2},\ n+1,\ q+1\right)=-\left(q+\frac{n-1}{2},\ n-1,\ q\right).$$

Man betrachte nun die folgenden beiden Reihen, deren eine aus der anderen durch Verminderung von n und q um je 2 hervorgeht, was wir durch Indices an dem Buchstaben S andeuten (vgl. auch (5)):

$$(11)\begin{cases} S_{n,q} \quad\ = S = -\left(q+\frac{n+1}{2}, n+1, q+1\right)=\left(q+\frac{n-1}{2}, n-1, q\right),\\ S_{n-2,q-2}=S'=-\left(q+\frac{n-5}{2}, n-1, q-1\right)=\left(q+\frac{n-3}{2}, n-1, q-1\right).\end{cases}$$

Durch Einführung des Summationsbuchstabens $\mu=\nu+1$ in dem ersten Ausdruck für S' erhält diese Reihe die Form:

$$S'=-\sum(-1)^{\mu+1}\binom{q-1}{\mu-1}\binom{q+\frac{n-1}{2}-2\mu}{n-1}.$$

Schreibt man hier wieder ν statt μ und bildet die Differenz:

$$D=-\left(q-\frac{n-1}{2}\right)S+2qS'=\sum(-1)^{\nu}\binom{q+\frac{n-1}{2}-2\nu}{n-1}N,$$

wo:

$$N=\binom{q}{\nu}\left(q-\frac{n-1}{2}\right)-\binom{q-1}{\nu-1}2q=\binom{q}{\nu}\left(q-\frac{n-1}{2}-2\nu\right),$$

also:

$$\binom{q+\frac{n-1}{2}-2\nu}{q-\frac{n-1}{2}-2\nu}N=n\binom{q}{\nu}\binom{q+\frac{n-1}{2}-2\nu}{q-\frac{n+1}{2}-2\nu}$$

ist, so erhält man:

$$D=n\sum(-1)^{\nu}\binom{q}{\nu}\binom{q+\frac{n-1}{2}-2\nu}{q-\frac{n+1}{2}-2\nu}=n\left(q+\frac{n-1}{2},\ n,\ q\right),$$

einen Ausdruck, der wegen (6) gleich Null ist. Wir haben somit die Beziehung:

(12) $$\left(q - \frac{n-1}{2}\right) S - 2qS' = 0,$$

oder ausgeführt:

(12a) $$\left(q - \frac{n-1}{2}\right)\left(q + \frac{n+1}{2}, n+1, q+1\right) - 2q\left(q + \frac{n-5}{2}, n-1, q-1\right) = 0.$$

6. Dieser Relation stellen wir eine andere an die Seite, in der:

$$S_{n-4,q-2} = -\left(q + \frac{n-7}{2}, n-3, q-1\right)$$

auftritt. Wendet man nämlich auf:

$$S = (m, n-1, q)$$

die Formel (4) an, auf das erste der so erhaltenen Glieder die (3), auf das erhaltene zweite nochmals (3), so kommt:

$$\begin{aligned}(m, n-1, q) = (m-1, n-1, q-1) &+ (m-2, n-2, q-1) \\ &+ (m-2, n-3, q-1) - (m-2, n-1, q-1).\end{aligned}$$

Für $m = q + \frac{n-1}{2}$ wird mit Hilfe von (3) das Glied:

$$(m-2, n-2, q-1) = (m-1, n-1, q-1) - (m-2, n-1, q-1) = 2S',$$

daher erhält die vorstehende Gleichung die Form:

$$S = (m-2, n-3, q-1) + 4S'$$

oder, anders geschrieben:

(13) $$S_{n,q} = S_{n-4,q-2} + 4S_{n-2,q-2}.$$

Durch Combination von (12) und (13) erhält man leicht:

$$2(q-n+1)S_{n-2,q-2} = -\left(q - \frac{n-1}{2}\right) S_{n-4,q-2}$$

oder:

(14) $$\begin{aligned} S_{n,q} &= -\frac{1}{2} \frac{q - \frac{n-3}{2}}{q-n+1} S_{n-2,q} \\ &= -\frac{\left(q - \frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2} - \frac{n-3}{2}\right)}{(q-n+1)(q-n+2)} S_{n-2,q}, \end{aligned}$$

und folglich auch:

(15) $$S_{n-2,q-2} = -\frac{1}{4} \frac{\left(q - \frac{n-3}{2}\right)\left(q - \frac{n-1}{2}\right)}{(q-n+1)\,q} S_{n-2,q}.$$

Dies sind die gesuchten Recursionsformeln.

7. Setzt man in (15) $n = 3$, so kommt bei folgeweiser Anwendung auf die Fälle $q = 3, 5, 7 \ldots q$, mit Rücksicht darauf, dass $S_{11} = (1, 0, 1) = 1$ ist:

$$S_{1,q} = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\, 2^{q-1}\, \frac{1.3.5\ldots(q-2)}{2.4.6\ldots(q-1)} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \binom{q-1}{\frac{q-1}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{(q-1)!}{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2!}$$

wo:

$$q! = 1.2.3\ldots q$$

ist. Durch Anwendung von (14) auf die Fälle $n=3,5,7,\ldots n$ erhält man die allgemeinere Summenformel:

$$S_{n,q} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{q!\,(q-n)!\left(\frac{q-1}{2}\right)!}{\left(q-\frac{n-1}{2}\right)!\,(q-1)!\left(\frac{q-1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)!}\, S_{1,q},$$

welche nach Einführung von $S_{1,q}$ die endgiltige Form annimmt:

$$(16) \qquad S_{n,q} = \left(q+\frac{n-1}{2}, n-1, q\right)$$

$$= (-1)^{\frac{q-n}{2}} \frac{q!\,(q-n)!}{\left(q-\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{q-1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{q-1}{2}\right)},$$

wo n, $q\ (> n)$ ungerade positive Zahlen sind.

8. Für den Nachweis der Beziehungen, die in Nr. VIII der vorstehenden Arbeit enthalten sind, bedarf es der allgemeinen Formel (16) nicht. Es genügt vielmehr, an (12a) anzuknüpfen. Setzt man dort:

$$q = p - 1; \qquad n = p - 3,$$

wo nun p *eine gerade Zahl* ist, so kommt, wenn man (5):

$$\left(\frac{3p}{2} - 2,\ p-2,\ p\right) = -\left(\frac{3p}{2} - 1,\ p-2,\ p\right) = T_p$$

setzt:

$$\left(\frac{p}{2}+1\right) T_p - 2(p-1)\, T_{p-2} = 0.$$

Wendet man diese Formel folgeweise auf die Fälle $p = 2, 4, 6 \ldots p$ an, so erhält man, wegen $T_2 = (1, 0, 2) = 1$:

$$(17) \quad T_p = \left(\frac{3p}{2} - 2,\ p-2,\ p\right) = 2^{p+1}\, \frac{1.3.5\ldots p-1}{2.4.6\ldots p} \cdot \frac{1}{p+2}$$

$$= \frac{1}{\frac{p}{2}+1}\binom{p}{\frac{p}{2}} = \frac{2}{\frac{p}{2}-1}\binom{p-1}{\frac{p}{2}-2} = \frac{1}{\frac{p}{2}}\binom{p}{\frac{p}{2}-1}.$$

Aber wegen (9) ist auch:

$$T_p = \left(\frac{3p}{2} - 4, p-3, p-1\right).$$

Führt man hier und in (17) statt $p \ldots p+1$ ein, wo dann p *ungerade* ist, so geht (17) über in:

$$(18) \qquad \left(\frac{3p-5}{2}, p-2, p\right) = \frac{2}{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{\frac{p-3}{2}}.$$

(17), (18) sind die zu beweisenden Relationen. Selbstverständlich sind dieselben auch in der allgemeinen Formel (16) enthalten.

In dem Falle, dass m eine von n und q unabhängige Zahl ist, scheint ein Summenausdruck von der einfachen Form (16) nicht zu existiren.

Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen.

Erster Theil.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

In den vom Verfasser der vorliegenden Arbeit unter dem Titel: *Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung* veröffentlichten Vorlesungen des Herrn F. Klein*) sind eine Reihe von neuen Gesichtspunkten aufgestellt worden. Sollte die Fruchtbarkeit derselben nach allen Seiten hin klargelegt werden, so war es nicht ausreichend zu entwickeln, welche Uebersichtlichkeit die allgemeine Theorie von ihnen aus gewinnt; es musste vielmehr auch gezeigt werden, wie man geleitet von diesen Gesichtspunkten bequemen Zugang zu Hilfsmitteln erreichen kann, welche die Durchführung specieller Probleme weiter zu fördern im Stande sind, als es die verbreitete — wesentlich mit dem Aufgebot einer möglichst grossen Anzahl von Thetarelationen arbeitende — Methode bisher vermocht hat. Das erstere darzuthun war das Ziel jener Vorlesungen; das letztere ist dort ausdrücklich anderen Arbeiten überlassen und soll in den Untersuchungen, deren erster Theil hier vorliegt, versucht werden. Dieselben haben ihren Ausgangspunkt ursprünglich von dem speciellen bereits mehrfach behandelten Problem der *Multiplicatorgleichung* genommen, das aus verschiedenen Rücksichten ein passendes Beispiel zu sein schien. Indessen trat bald zu Tage, dass eine Reihe anderer Fragen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen mit in den Bereich der Untersuchung gezogen werden mussten, wenn jenes Problem mit Erfolg in Angriff genommen werden sollte. Dass dann mit der Behandlung solcher Nebenfragen nicht gerade da abgebrochen wurde, wo die für die Multiplicatorgleichung erforderlichen Ergebnisse gewonnen waren, sondern dass dabei ein gewisser wenn auch nur vorläufiger Abschluss der Untersuchung erstrebt wurde, wird keiner Rechtfertigung bedürfen.

---

*) Diese Ann. Bd. 35, p. 198ff. — im Folgenden kurz mit: „Grundz." citirt.

Die Auswahl der — an und für sich betrachtet ziemlich heterogenen — Dinge aber, welche zur Sprache kommen, bleibt dabei zunächst durch die Rücksicht auf die Multiplicatorgleichung bedingt. In der wirklichen Berechnung einer Reihe von Coefficienten einer Multiplicatorgleichung 40. Grades für Transformation dritter Ordnung findet dieser Theil der Untersuchungen seinen Abschluss; nicht als ob den Werthen dieser Coefficienten an und für sich ein besonderes Interesse zugeschrieben werden könnte, sondern weil es wünschenswerth schien zu prüfen, ob die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften dieser Coefficienten tief genug eingedrungen sei, um ihre wirkliche Berechnung mit verhältnissmässig geringem Rechnungsaufwand zu ermöglichen.

Die abweichende Methode der Behandlung brachte es mit sich, dass die vorhandene Literatur über hyperelliptische Modulfunctionen, nur an vereinzelten Stellen direct benutzt und citirt werden konnte. Dagegen verdankt der Verfasser, wie an dieser Stelle hervorgehoben sei, den einschlägigen Arbeiten namentlich der Herren Krause (s. dessen zusammenfassendes Werk: Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, Leipzig 1885) und Wiltheiss (s. bes. Crelle's J. Bd. 96, 1884) vielfache indirecte Belehrung. Für zahlreiche Einzelheiten der Behandlung hatten naturgemäss die Untersuchungen über analoge Fragen aus der Theorie der *elliptischen* Modulfunctionen als Vorbild zu dienen, wie sie in den Arbeiten der Herren F. Klein (Rendic. Istit. Lomb. v. Jan. 1879*); Sitzber. d. Münch. Ak. v. Dec. 1879**)), Hurwitz (dieser Ann. Bd. 18, 1881) und Biedermann (Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen, Diss., Leipzig 1887) niedergelegt sind. Doch besitzt die Theorie der elliptischen Modulfunctionen in den „*Fundamentalbereichen der τ-Ebene*" ein Hilfsmittel anschaulicher Behandlungsweise, dem die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen bei dem gegenwärtigen Stande ihrer Ausbildung kein analoges an die Seite zu stellen hat; und auch sonst bietet die letztere Theorie manche ihr eigenthümliche Schwierigkeiten, zu deren Beseitigung besondere Hilfsmittel in den Dienst der Untersuchung gestellt werden mussten.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 21 der Göttinger Nachrichten v. J. 1889 u. d. T. „Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung" erschienen.

---

*) Abgedruckt in Bd. 15 dieser Ann.

**) Bd. 17 dieser Ann. [Auch mit der inzwischen in Heft 1 dieses Bandes veröffentlichten Abhandlung des Herrn Klein „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" besitzt vorliegende Arbeit Berührungspunkte, auf die an den betr. Stellen hinzuweisen sein wird].

I.

Beziehungen der Thetafunctionen zur Stufen-Eintheilung.

§ 1.

Uebergang von den Sigma zu den Theta.

Wenn für die Behandlung specieller Probleme im Sinne der in den „Grundzügen" niedergelegten allgemeinen Theorie das mächtige Hilfsmittel der Thetafunctionen herangezogen werden soll, so tritt die dort zur Seite geschobene Frage in den Vordergrund, wie sich diese Functionen zu der dort gegebenen Systematik stellen. Eine vollständig genügende Beantwortung dieser Frage scheint allerdings zur Zeit noch nicht möglich zu sein; für die hier zunächst verfolgten Zwecke müssen einige wenige Bemerkungen genügen.

Ist man einmal, durch welche Ueberlegungen es auch immer sein mag, von den hyperelliptischen Formen zweiter Stufe (Grundz. § 24) zu den Sigmafunctionen gelangt, so kommt man durch folgende dem Verfasser von Herrn F. Klein mitgetheilte Ueberlegungen von ihnen zu den Theta:

Die Sigmafunctionen verhalten sich linearen Periodentransformationen gegenüber sehr einfach, indem sie sich bei denselben nur unter sich permutiren. Auch bei Vermehrung der Argumente um ganze Perioden erleiden sie nur leicht angebbare Veränderungen, indem bestimmte bis auf das Vorzeichen für alle gleiche Exponentialfactoren zu ihnen treten. Werden die Argumente um *halbe* Perioden vermehrt, so tritt beides zugleich ein: jede Sigmafunction wird übergeführt in eine andere, zu der noch ein Exponentialfactor tritt; ausserdem aber erscheint noch als Factor eine Modulfunction. Den letztgenannten Factor nun kann man beseitigen, indem man jede Sigmafunction mit einer geeigneten Modulform multiplicirt und das so entstehende Product als neue Function in die Formeln einführt: die Formeln der beiden ersten Kategorien ändern sich dabei gar nicht, aus denjenigen der dritten Kategorie aber fällt die multiplicirende Modulfunction weg. Wählt man unter allen Factoren, welche dies leisten, die einfachsten,

so gelangt man dazu, die namentlich von Herrn Wiltheiss*) schon mehrfach benutzten Functionen:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Th}_{\varphi,\psi} = \sqrt[8]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}\, \sigma_{\varphi,\psi}$$

als wesentliche Elemente in die Theorie einzuführen; unter Δ_φ, Δ_ψ sind dabei die Discriminanten der Formen φ, ψ verstanden. Diese Functionen oder besser gesagt Formen Th sind (im Unterschied von den σ), auch wenn der Grad von φ von dem von ψ verschieden ist, „reine" Covarianten (Grundz. § 11) nicht nur von φ und ψ, sondern auch von f selbst. — Um nun aus den Th- die ϑ-Functionen zu gewinnen, hat man dieselben zunächst durch Multiplication mit der Quadratwurzel aus der Periodendeterminante p_{12} in *Functionen* (*Formen nullter Dimension*) auch der Coefficienten von f zu verwandeln. Hierauf sind sie mit gewissen Exponentialfactoren zu multipliciren, deren Zufügung bewirkt, dass die Periodicitätsfactoren an den beiden ersten Querschnitten eines kanonischen Querschnittsystems sich auf ± 1 reduciren. Wird dann noch mit einer geeigneten numerischen Constante multiplicirt, so sind die so entstehenden Functionen keine anderen als die Jacobi'schen Thetafunctionen, wie sie durch die unendlichen Reihen definirt sind:

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\, e^{\pi i \left\{ \left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)^2 \tau_{11} + 2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\tau_{12} + \left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)^2 \tau_{22} + 2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{h_1}{2}\right) + 2\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{h_2}{2}\right) \right\}}$$

Die Charakteristik $\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{matrix}\right|$, welche der zu einer bestimmten Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$ gehörenden Thetafunction für ein bestimmtes Querschnittsystem zukommt, bestimmt sich nach der von Herrn Klein (Math. Annalen Bd. 32, p. 358, 1888) mitgetheilten Regel; nach derselben Regel kann man in unserem Falle $p = 2$ auch leicht die Zerlegung finden, zu welcher ein Theta mit gegebener Charakteristik für ein gegebenes Querschnittsystem gehört, wenn man nur beachtet, dass φ und ψ stets Formen von ungeradem Grade sind. Die Herren Königsberger**) und Henoch***) haben eine Tabelle mitgetheilt, welche diese Zuordnung der Charakteristiken zu den Zerspaltungen für die von Herrn Weierstrass seinen Untersuchungen zu Grunde gelegte Wahl eines kanonischen Periodensystems

*) Math. Ann. Bd. 31, 33, (1888/89).

**) Cr. J. Bd. 64, p. 22. (1865).

***) De Abelianarum functionum periodis (Diss. Berol. 1867) p. 14.

giebt. Dieses Periodensystem wird durch das in nachstehender Figur enthaltene Querschnittsystem geliefert:

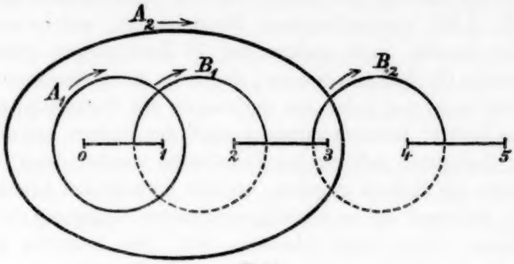


Fig. 1.

oder, was dasselbe ist:

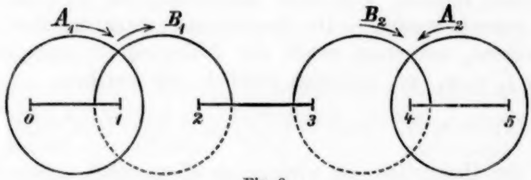


Fig. 2.

Wo in diesen Untersuchungen eine Beziehung auf ein specielles Querschnittsystem erforderlich ist, soll stets das vorstehende gewählt werden; von demselben weicht das Grundz. § 8 benutzte in der dort angegebenen Weise ab.

Die Bezeichnungen der σ, Th, ϑ durch Angabe sei es der Charakteristiken, welche ihnen in Bezug auf ein bestimmtes Querschnittsystem zukommen, sei es der Zerlegungen $f = \varphi \cdot \psi$ zu welchen sie gehören, sind für den gewöhnlichen Gebrauch zu schleppend; man hat daher mehrfach abgekürzte Bezeichnungen in Vorschlag gebracht. Die Abkürzung kann natürlich nur auf Kosten der Symmetrie erreicht werden; für die Behandlung specieller Probleme scheint es daher zweckmässig zu sein, bei der Auswahl unter den verschiedenen Bezeichnungsarten sich von dem Gesichtspunkt leiten zu lassen, dass die Bezeichnung *dieselbe* Art von Asymmetrie bekommen soll, wie das Problem, bei dessen Behandlung sie zu dienen bestimmt ist. Da nun im folgenden verschiedene Aufgaben behandelt werden sollen, in welchen eine von den zehn Zerlegungen:

(2) $$f_6 = \varphi_3 \cdot \psi_3$$

— wir wollen stets annehmen, diejenige, für welche:

(3) $$\varphi(x) = (\alpha_0 x)(\alpha_2 x)(\alpha_4 x), \quad \psi(x) = (\alpha_1 x)(\alpha_3 x)(\alpha_5 x) \text{ —}$$

bevorzugt ist, so werden wir zweckmässiger Weise eine Bezeichnung wählen, in welcher ebenfalls diese Zerlegung ausgezeichnet erscheint. Das ist der Fall mit der von Herrn Staude (Math. Ann. Bd. 24, 1884; vgl. Grundz. § 26) vorgeschlagenen Bezeichnung, welche auf folgendem Princip beruht: Jede andere der 16 Zerlegungen geht aus der ausgezeichneten (3) dadurch hervor, dass von einem bestimmten Paare der Linearfactoren $(\alpha_i x)$ jeder aus derjenigen der Formen φ, ψ, welcher er in (3) angehört, herausgenommen und der andern zugefügt wird; den zu der Zerlegung gehörenden Functionen werden dann diejenigen beiden Zahlen als Indices gegeben, welche jene beiden Linearfactoren bezeichnen, während die zu der ausgezeichneten Zerlegung (3) gehörenden Functionen ohne Index bleiben. Von den letzteren abgesehen erhält dabei, wie leicht zu sehen, jede gerade Function einen geraden und einen ungeraden Index, jede ungerade entweder zwei gerade oder zwei ungerade Indices. *Von dieser Bezeichnung soll auch im folgenden Gebrauch gemacht werden.* — Die Bezeichnung, deren sich Herr Weierstrass bedient, bevorzugt neben der Zerlegung (3) auch noch eine Zerlegung $f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5$, diejenige nämlich, für welche:

$$(4) \qquad \varphi(x) = (\alpha_5 x), \quad \psi(x) = (\alpha_0 x)(\alpha_1 x)(\alpha_2 x)(\alpha_3 x)(\alpha_4 x)$$

ist. Die des Herrn Staude wird in sie übergeführt, indem man den Index 5 überall weglässt, wo er bei jener auftritt, dagegen den zu der Zerlegung (3) gehörenden Functionen diesen Index giebt*).

§ 2.

Einordnung bestimmter Verbindungen der Thetafunctionen in die Stufen-Eintheilung.

Die Thetafunctionen selbst gehören so wenig als die Sigmafunctionen (Grundz. § 27) in die Stufeneintheilung, indem sie zu Untergruppen nicht von endlichem, sondern von unendlich hohem Index gehören; sie sind gar keine hyperelliptischen Functionen im Sinne der Grundz. § 16 gegebenen Definition.

Anders verhält es sich mit den *Quotienten* je zweier Thetafunctionen: die Exponentialfactoren, welche bei den Operationen der Hauptgruppe (Grundz. § 15) zutreten, sind für alle Thetafunctionen dieselben und fallen daher bei der Quotientenbildung heraus, sodass die Thetaquotienten bei jenen Operationen nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werthe anzunehmen im Stande sind. In der That ist bekannt, dass die Thetaquotienten, wenn die v um Perioden vermehrt werden,

*) Vgl. Staude a. a. O. p. 300.

höchstens ihr Zeichen wechseln, wenn aber die Perioden linear transformirt werden, sich unter einander unter Zutritt *achter* Einheitswurzeln permutiren. Ferner folgt aus bekannten Formeln*) (wenn gleich noch nicht ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht worden zu sein scheint), dass die Operationen der Principaluntergruppe II. Stufe die Thetaquotienten nur um *vierte* Einheitswurzeln ändern, und eine Reihe ähnlicher Resultate, die wir in der Terminologie der §§ 17, 18 der Grundzüge folgendermassen aussprechen:

Die Thetaquotienten sind Functionen achter Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf vierte, bestimmten umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe aber in Bezug auf achte Einheitswurzeln adjungirt.

Ihre Quadrate sind Functionen vierter Stufe.

Ihre vierten Potenzen und ihre achten Potenzen sind Functionen zweiter Stufe; die ersteren ändern aber noch ihr Zeichen bei gewissen modulo 2 charakterisirten Operationen, bei welchen die letzteren ungeändert bleiben.

Werden die Argumente v_1, v_2 der geraden Thetafunctionen gleich Null gesetzt, so werden Modulfunctionen erhalten, welche man als *Thetanullwerthe* zu bezeichnen pflegt. Nach Abtrennung von $\sqrt{p_{12}}$ gehen dieselben über in Modulformen, die Nullwerthe der Th-Functionen; von diesen gelten folgende Sätze:

Die Th-Nullwerthe selbst gehören nur insofern in die Stufeneintheilung, als sie in dem weiteren Sinn des § 18 *der Grundzüge der zweiten Stufe in Bezug auf achte Einheitswurzeln adjungirt sind.*

*Die Quadrate der Th-Nullwerthe sind Modulformen vierter Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf zweite, bestimmten umfassenderen Untergruppe zweiter Stufe aber in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt.***)

Die vierten Potenzen der Th-Nullwerthe sind Modulformen zweiter Stufe, dabei aber noch bestimmten umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe in Bezug auf zweite Einheitswurzeln adjungirt.

Die achten Potenzen der Th-Nullwerthe gehören zu diesen umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe.

Ausserdem existiren noch zahlreiche Combinationen verschiedener Th-Nullwerthe, welche der vierten, der zweiten, der ersten Stufe angehören. Es möge hier nur auf zwei Wege hingewiesen werden, auf welchen man solche Verbindungen in grosser Zahl erhalten kann.

Einmal nämlich kann man ausgehen von denjenigen Systemen von Thetafunctionen, welche als Göpel'sche, Rosenhain'sche u. s. w.

---

*) Krause, § 24, Gl. (8).

**) Vergl. Krause, § 24, insbes. Glchg. 15.

Quadrupel, Sextupel, Octupel bekannt sind, und aus den auf diese Systeme sich beziehenden Formeln Combinationen der verlangten Art herauszulesen versuchen.

Andererseits kann man von den algebraischen Ausdrücken der Modulformen I. und II. Stufe (Grundz. § 20, 22) ausgehen und fragen in welcher Weise sich dieselben durch Th-Nullwerthe ausdrücken. Für die Modulformen I. Stufe hat das Herr Bolza*) durchgeführt; für gewisse Klassen von Modulformen II. Stufe soll es in Abschnitt IV dieser Untersuchungen geschehen.

Aehnliche Bemerkungen gelten auch für die Nullwerthe der ersten Differentialquotienten der ungeraden Th-Functionen; nur ist zu beachten, dass diese nicht „reine" Modulformen sind.

II.

Grenzfälle der hyperelliptischen Functionen**).

§ 3.

Einleitende Bemerkungen.

Die hyperelliptischen Functionen, mögen sie nun als Functionen der „algebraischen" oder der „transcendenten" Argumente aufgefasst werden, besitzen (vgl. Grundz. § 12) den Charakter rationaler, bezw. algebraischer Functionen ihrer Argumente an allen Stellen des a. a. O. definirten natürlichen Bereiches derselben. Was aus ihnen wird, wenn die Argumente an die Grenze dieses Bereiches heranrücken, ist eine Frage, die dort bei Seite gelassen ist. Da es jedoch für viele Untersuchungen nothwendig ist, wenigstens einige Kenntniss hievon zu besitzen, so sollen zwei solche Grenzfälle in diesem Abschnitt eine ausführlichere Behandlung finden.

Was die Methode dieser Behandlung betrifft, so bietet sich ein doppelter Weg für dieselbe dar, indem man entweder von den algebraischen oder von den transcendenten Argumenten ausgehen kann. Wenn hier auch hauptsächlich der erstere Weg eingeschlagen werden soll, so sei doch nicht verschwiegen, dass eine abschliessende Behandlung der Frage beide Methoden verbinden müsste.

Will man sich auf die Betrachtung von *Functionen* im engeren Sinne beschränken, so kann man einen grossen Theil der Resultate in sehr anschaulicher Weise erhalten, indem man die Riemann'sche Fläche sich stetig deformiren lässt und die Functionen durch die verschiedenen Stadien dieses Deformationsprocesses hindurch verfolgt.

*) Dieser Ann. Bd. 30. (1887).

**) Man vergleiche die entsprechenden Betrachtungen des Herrn Klein, p. 59 ff. dieses Bandes.

Dagegen bietet die Behandlung der *Formen* auf diesem Wege gewisse Schwierigkeiten dar, sodass man für diese doch auf die Vollziehung der Grenzübergänge an den analytischen Ausdrücken angewiesen ist.

Die Grenzfälle, um welche es sich hier handelt, sind im Gebiet der algebraischen Argumente dadurch definirt, dass die *Nullpunkte der Grundform f_6 nicht mehr alle von einander verschieden sind.* Von diesen Fällen sollen im folgenden zwei discutirt werden: der Fall, dass zwei Nullpunkte zusammenrücken, und der Fall, dass drei in der Weise zusammenrücken, dass ihr Doppelverhältniss mit einem festen vierten Punkt constant bleibt. Zur Vermeidung von Wiederholungen sei dabei ein für alle mal hervorgehoben: *alle Nullpunkte von f_6, von welchen wir nicht ausdrücklich angeben, dass sie zusammenrücken, sollen stets von einander und von der Grenzlage der zusammenrückenden verschieden bleiben.*

Der Ausführung sind noch zwei Bemerkungen allgemeinerer Natur voranzuschicken.

Erstens ist zu beachten, dass die Sätze über die Aenderung des Querschnittsystems durch Monodromie der Verzweigungspunkte (Grundz. § 8) eine Vereinfachung der Untersuchung insofern ermöglichen, als wir die kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche und die zusammenrückenden Verzweigungspunkte in für den Grenzübergang möglichst geeigneter Weise auswählen können; der Uebergang zu andern Querschnittsystemen oder zu einer andern Wahl der zusammenrückenden Verzweigungspunkte geschieht dann einfach durch die Formeln der linearen Transformation.

Eine *zweite* Bemerkung bezieht sich darauf, dass es keineswegs gleichgiltig ist, in welcher Weise die zusammenrückenden Verzweigungspunkte sich einander nähern. Doch wird es stets ausreichen, einen der zusammenrückenden Punkte als fest zu behandeln: denn der allgemeine Fall lässt sich auf diesen durch eine lineare Transformation (mit veränderlichen Coefficienten) zurückführen, die auf unsere Functionen von bekanntem einfachen Einfluss ist. Dagegen ist wesentlich die Natur der Curve, auf welche ein Verzweigungspunkt — sagen wir etwa α' — sich gegen den andern — sagen wir α — hinbewegt. Umkreist nämlich α' den Punkt α ein- oder mehreremale, so werden unsere Functionen in bekannter Weise geändert; es wird also einen wesentlichen Unterschied bewirken, ob der Weg, welchen α' beschreibt, den Punkt α ein- oder mehreremale umwindet ehe er nach α hinführt, oder ob dieser Weg direct — sagen wir geradezu geradlinig — in den Punkt α hineinmündet. Diese zunächst etwas unbestimmte Vorstellung präcisiren wir, indem wir sagen: es wird zu unterscheiden sein, ob der Richtungswinkel der Verbindungslinie $\alpha\alpha'$, also der reelle Theil von $\frac{1}{i}\log(\alpha'-\alpha)$ immer zwischen zwei festen um 2π auseinanderliegenden

Grenzen bleibt — wenigstens von einer angebbaren Lage von α' an, mit der wir dann erst den Grenzprocess beginnen — oder ob er diese Grenzen immer wieder überschreitet. Das letztere tritt übrigens nie ein, wenn die Curve, auf welcher sich α' dem Punkte α nähert, in diesem Punkte den Charakter einer algebraischen Curve besitzt. Wir werden unsere Untersuchung auf den ersteren Fall beschränken; in allen Fällen übrigens, in welchen wir unter dieser Beschränkung einen von der Art des Grenzübergangs unabhängigen bestimmten Grenzwerth erhalten, wird derselbe allgemeine Gültigkeit besitzen müssen.

§ 4.

Verhalten der Integrale erster Gattung und ihrer Perioden beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Frage, was aus den hyperelliptischen Functionen wird, wenn zwei Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche zusammenrücken. Bekanntlich geht die Fläche dadurch in eine elliptische über; zwei linear unabhängige Integrale I. Gattung können so ausgewählt werden, dass im Grenzfall das eine in das elliptische Integral I. Gattung auf dieser Grenzform der Fläche übergeht, das andere in ein elliptisches Integral III. Gattung, dessen beide logarithmischen Unstetigkeitspunkte die Grenzlage der zusammenrückenden Verzweigungspunkte in beiden Blättern repräsentiren. Von den Perioden des ersteren müssen also zwei, von denjenigen des letzteren eine durch den Grenzübergang beseitigt werden, und wir wollen an den analytischen Ausdrücken der Perioden durch bestimmte Integrale zwischen den Verzweigungspunkten prüfen, wie diese Beseitigung zu Stande kommt.

Um später die Ueberlegung nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir zunächst die Bestimmung der Grenzwerthe von drei bestimmten Integralen voraus, nämlich von:

$$S_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)}}; \tag{1}$$

$$S_2(\varepsilon) = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)}}; \tag{2}$$

$$S_3(\varepsilon) = \int_a^0 \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}}\, dx \tag{3}$$

für

$$\lim \varepsilon = 0,$$

wobei unter a eine von 0 verschiedene Constante zu verstehen ist.

Welche Werthe dabei den Quadratwurzeln und den weiterhin auftretenden Logarithmen beizulegen sind, ist theils für die hier von uns verfolgten Zwecke gleichgültig, theils wird sich die Bestimmung an den Schlussresultaten durch einfache Ueberlegung ermöglichen. Die Integrationswege sind so gewählt gedacht, dass sie den Weg nicht kreuzen, auf welchem der Punkt ε dem Nullpunkt sich nähert.

Für das Integral (1) liefert elementare Rechnung den von ε unabhängigen Werth:

$$S_1(\varepsilon) = \pm \pi i. \tag{4}$$

Das Integral (2) wird für verschwindende ε unendlich gross; wir bedürfen eines asymptotischen Werthes desselben. Einen solchen finden wir auf folgende Weise. Durch Ausführung der unbestimmten Integration erhalten wir zunächst:

$$S_2(\varepsilon) = -\log \varepsilon + 2 \log \left(\sqrt{-a} + \sqrt{-a+\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Der zweite Summand verhält sich für $\varepsilon = 0$ regulär und kann nach Potenzen von ε entwickelt werden; führt man das aus und bricht mit dem ersten Gliede ab, so erhält man den gesuchten asymptotischen Ausdruck in der Form:

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{S_2(\varepsilon) + \log \varepsilon\right\} = \log(-a) + \log 4. \tag{6}$$

Für das dritte jener Integrale endlich erhält man zunächst:

$$S_3(\varepsilon) = \varepsilon \left\{\frac{b}{-1+b^2} - \log \frac{b-1}{-b-1}\right\}, \tag{7}$$

wo zur Abkürzung:

$$b = \sqrt{\frac{a}{a-\varepsilon}}$$

gesetzt ist. Für $\lim \varepsilon = 0$ folgt:

$$b = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{a} + (\varepsilon)^2,$$

$$\log(b-1) = \left(\log \frac{\varepsilon}{2a}\right) \cdot \left(1 + (\varepsilon)\right)$$

also:

$$S_3(\varepsilon) = \pm\left(a + \varepsilon \log \frac{\varepsilon}{-4a} + (\varepsilon)\right), \tag{8}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} S_3(\varepsilon) = \pm a. \tag{9}$$

Wir kehren jetzt zur Untersuchung der Grenzwerthe der Perioden unserer Integrale I. Gattung zurück. Wir nehmen das in § 1 angegebene Querschnittsystem und kommen dahin überein, dass α_1 und α_2 die zusammenrückenden Verzweigungspunkte seien in der Weise, dass $\alpha_1 = 0$ an seinem Platze bleibt, $\alpha_2 = \varepsilon$ sich ihm nähert; in diesen Festsetzungen liegt den Erläuterungen des vorigen Paragraphen zufolge keine Beschränkung. Zur Abkürzung werde gesetzt:

(10) $$\chi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{f(x)}{x(x-\varepsilon)};$$

dann handelt es sich, wenn wir die Periodenwege auf doppelt durchlaufene Linien zwischen je zwei Verzweigungspunkten zusammenziehen, um die Bestimmung der Grenzwerthe der Integrale:

$$w_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)\,\chi(x)}}, \qquad w_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)\,\chi(x)}},$$

genommen bezw. zwischen den Grenzen:

$$0 \text{ und } \varepsilon, \quad \alpha_3 \text{ und } \alpha_4, \quad \alpha_0 \text{ und } 0, \quad \alpha_4 \text{ und } \alpha_5.$$

Was das *erste* Integrationsintervall betrifft, so kann man bei hinreichend kleinen Werthen von ε für alle Punkte desselben:

$$\frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\chi(0)}} + (\delta)$$

setzen, wo (δ) mit ε zugleich unendlich klein wird. In Folge dessen erhält man die Grenzwerthe:

(11) $$\lim_{\varepsilon=0} \omega_{11} = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \omega_{21} = -\frac{2\pi i}{\sqrt{\chi(0)}}.$$

Im *zweiten* und *vierten* Integrationsintervall bleiben die zu integrirenden Functionen auch für $\varepsilon = 0$ stetig, wenn man von den Endpunkten der Intervalle absieht; das Verhalten in diesen wird aber ebenfalls durch den Grenzübergang gar nicht beeinflusst. Daher darf derselbe unter dem Integralzeichen vollzogen werden, und man erhält einfach:

(12) $$\lim \omega_{12} = \omega, \quad \lim \omega_{22} = 2\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dx}{x\sqrt{\chi(x)}} = \Omega,$$

(13) $$\lim \omega_{14} = \omega', \quad \lim \omega_{24} = 2\int_{\alpha_4}^{\alpha_5} \frac{dx}{x\sqrt{\chi(x)}} = \Omega';$$

dabei sind ω, ω' zwei primitive Perioden des elliptischen Integrals I. Gattung $\overline{w}_1$, auf welches sich w_1 reducirt, Ω und Ω' die entsprechenden Perioden des elliptischen Integrals III. Gattung $\overline{w}_2$, in welches w_2 übergeht.

Für das *dritte* Integrationsintervall endlich müssen wir die beiden Integrale getrennt behandeln. Den Integranden des ersten schreiben wir in zwei Factoren zerlegt:

(14) $$\frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}};$$

der erste dieser Factoren ist von ε unabhängig. Zerlegen wir nun das Integrationsintervall in zwei Theile; von α_0 bis δ und von δ bis 0, wo δ beliebig klein angenommen werden kann, so bleibt im ersten dieser Theile (von der ersteren Grenze abgesehen) die Function unter

dem Integralzeichen stetig; im zweiten Theil des Integrationsintervalls darf man für den ersten der beiden Factoren (14) einen Mittelwerth setzen und erhält dann unter Benutzung der vorhin abgeleiteten Formel (9) dasselbe Resultat, wie wenn man unter dem Integralzeichen zur Grenze übergegangen wäre, nämlich:

$$\text{(15)} \qquad \lim \omega_{13} = 2\left(\overline{w}_1(0) - \overline{w}_1(\alpha_0)\right).$$

Das zweite Integral wird durch dieses Intervall erstreckt in der Grenze unendlich gross; um einen asymptotischen Werth für dasselbe zu erhalten, bilde man die Differenz:

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{2}\,\omega_{23} - \frac{S_2(\varepsilon)}{\sqrt{\chi(0)}} = \int\limits_{\alpha_0}^{0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\chi(0)}} \right\} \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)}}.$$

Indem wir die zu integrirende Function in die beiden Factoren:

$$\frac{1}{x}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\chi(0)}} \right\} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}}$$

zerlegen und wie oben verfahren, erhalten wir mit Rücksicht auf (6) und (9) das Resultat

$$\text{(17)} \qquad \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \omega_{23} + \frac{2\log\varepsilon}{\sqrt{\chi(0)}} \right\} = \frac{2\log(-4\alpha_0)}{\sqrt{\chi(0)}} + 2\left\{ J(0) - J(\alpha_0) \right\};$$

darin bedeutet J das elliptische Integral:

$$\int \left\{ \frac{1}{\sqrt{\chi(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\chi(0)}} \right\} \frac{dx}{x},$$

das in $(0, -\sqrt{\chi(0)})$*), aber nicht in $(0, \sqrt{\chi(0)})$ unendlich wird.

Die Resultate der Untersuchungen dieses Paragraphen fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Von unsern beiden hyperelliptischen Integralen I. Gattung reducirt sich in dem hier betrachteten Grenzfall das eine auf das elliptische Integral I. Gattung auf der Grenzfläche, indem seine Periode an A_1 verschwindet, die Periode an B_1 hingegen zwar einem endlichen Grenzwerth sich nähert, aber aufhört Periode zu sein; das andere reducirt sich auf ein elliptisches Integral III. Gattung, indem seine Periode an A_1 in die logarithmische Periode des letzteren übergeht, seine Periode an B_1 aber unendlich gross wird.

§ 5.

Grenzwerthe der Thetamoduln beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Wir setzen die Untersuchung unseres Grenzfalles fort, indem wir zur Bildung der zweigliedrigen Periodendeterminanten übergehen. Berücksichtigen wir, dass die in den Formeln des vorigen Paragraphen weg-

*) und ausserdem im Unendlichen auf beiden Blättern.

gelassenen Glieder mit verschwindendem ε mindestens wie $\varepsilon \log \varepsilon$ unendlich klein werden, so erhalten wir zunächst für die *Periodendeterminanten* die folgenden Grenzwerthe*):

$$(1)\quad\begin{cases}
\lim\limits_{\varepsilon=0} p_{12} = \dfrac{2\pi i \,.\, \omega}{\sqrt{\chi(0)}}; \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} p_{13} = \dfrac{4\pi i}{\sqrt{\chi(0)}}\left(\overline{w}_1(0) - \overline{w}_1(\alpha_0)\right); \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} p_{14} = \dfrac{2\pi i \,.\, \omega'}{\sqrt{\chi(0)}}; \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} \left\{p_{23} + \dfrac{2\omega \log \varepsilon}{\sqrt{\chi(0)}}\right\} = \omega\left\{\dfrac{2\log(-4\alpha_0)}{\sqrt{\chi(0)}} + 2\left(J(0) - J(\alpha_0)\right)\right\} \\
\qquad\qquad - \Omega\left\{2\overline{w}_1(0) - 2\overline{w}_1(\alpha_0)\right\}; \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} p_{24} = \omega\Omega' - \omega'\Omega; \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} \left\{p_{34} - \dfrac{2\omega' \log \varepsilon}{\sqrt{\chi(0)}}\right\} = -\,\omega'\left\{\dfrac{2\log(-4\alpha_0)}{\sqrt{\chi(0)}} + 2\left(J(0) - J(\alpha_0)\right)\right\} \\
\qquad\qquad + \Omega'\left\{2\overline{w}_1(0) - 2\overline{w}_1(\alpha_0)\right\}.
\end{cases}$$

Aus diesen ergeben sich folgende Grenzwerthe der *Thetamoduln:*

$$(2)\quad\begin{cases}
\lim\limits_{\varepsilon=0}\left\{\tau_{11} - \dfrac{1}{\pi i}\log \varepsilon\right\} = -\dfrac{1}{\pi i}\log(-4\alpha_0) - \dfrac{J(0) - J(\alpha_0)}{\pi i}\cdot\sqrt{\chi(0)} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{\pi i}\cdot\dfrac{\Omega}{\omega}\sqrt{\chi(0)}\cdot\left(\overline{w}_1(0) - \overline{w}_1(\alpha_0)\right); \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} \tau_{12} = \dfrac{2\overline{w}_1(0) - 2\overline{w}_1(\alpha_0)}{\omega} = \dfrac{\omega\Omega' - \omega'\Omega}{2\pi i\omega}\sqrt{\chi(0)}; \\
\lim\limits_{\varepsilon=0} \tau_{22} = \dfrac{\omega'}{\omega} = \tau.
\end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, wenn, wie üblich:

$$e^{\tau_{11}\pi i} = p$$

gesetzt wird, noch folgende Grenzbestimmung:

$$(3)\qquad \lim_{\varepsilon=0} p = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0}\frac{p}{\varepsilon} = C;$$

darin bedeutet C eine sicher von Null verschiedene Constante.

Wir fassen wieder zusammen:

In unserem Grenzfalle erleiden die Thetamoduln folgende Veränderungen:

τ_{11} *wird unendlich gross wie* $\log \varepsilon$, *und zwar so, dass* $e^{\pi i \tau_{11}}$ *Null wird;*

τ_{12} *geht über in einen Werth des auf der Fläche* $(x, \sqrt{\chi(x)})$ *zwischen den Stellen* $(0, -\sqrt{\chi(0)})$ *und* $(0, \sqrt{\chi(0)})$ *erstreckten elliptischen Normalintegrals erster Gattung;*

---

*) Wegen der Vorzeichen achte man auf die Festsetzungen betr. den Sinn der Ueberkreuzung der Periodenwege (vgl. dieser Ann. Bd. 32, p. 392).

τ_{22} *geht über in die Periode* τ *dieses elliptischen Normalintegrals.*

Dabei verdienen zwei Umstände noch besondere Hervorhebung (der Beweis derselben ergiebt sich aus der Theorie der elliptischen Functionen):

Einmal ist zu beachten, dass τ_{22} dabei *nur* Werthe erhält, deren imaginärer Theil positiv ist, sodass die Bedingungen für die Convergenz der Thetareihen erfüllt bleiben.

Dann aber ist auch zu beachten, dass τ_{22} noch *jeden* Werth annehmen kann, der dieser Bedingung genügt, und τ_{12} überhaupt jeden endlichen Werth.

§ 6.

Die Grenzwerthe der Thetafunctionen und ihrer Nullwerthe beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen stellen wir noch die Grenzwerthe der Thetafunctionen zusammen, welche sich aus den bisher gewonnenen Resultaten sofort ergeben. Man findet nämlich für $\lim \varepsilon = 0$:

$$(1)\quad \begin{aligned}
&\lim \vartheta(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \lim \vartheta_{12}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_3(v_2, \tau_{22});\\
&\lim \vartheta_{05}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \lim \vartheta_{34}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_0(v_2, \tau_{22});\\
&\lim \vartheta_{03}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \lim \vartheta_{45}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_2(v_2, \tau_{22});\\
&\lim \vartheta_{04}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \lim \vartheta_{35}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_1(v_2, \tau_{22});
\end{aligned}$$

die 8 übrigen Thetafunctionen werden in der Grenze identisch Null. Wir können dies folgendermassen formuliren:

Von den 16 *Thetafunctionen werden bei unserem Grenzübergang diejenigen* 8 *identisch Null, welche zu Zerlegungen* $f = \varphi \cdot \psi$ *gehören, bei welchen die Punkte* α_1, α_2 *vereinigt bleiben; die* 8 *übrigen werden paarweise identisch, indem sie sich auf elliptische Thetafunctionen reduciren, welche nur von dem einen Argument* v_2 (*und dem Modul* τ_{22}) *abhängen.*

Gehen wir von den Thetafunctionen weiter zu den *Th*-Functionen, so ist die erste Formel (18) zu beachten; man findet mit ihrer Hilfe, dass die den letztgenannten 8 Thetafunctionen entsprechenden *Th*-Functionen nicht in die zugehörigen elliptischen *Th*-Functionen selbst übergehen, sondern (von einer rein numerischen Constanten abgesehen) in die Producte derselben mit:

$$\sqrt{\chi(0)} = c \cdot \sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)}.$$

Die Grenzwerthe der Thetanullwerthe sind, soweit sie nicht verschwinden, durch die Formeln (21) mit gegeben; für die 4 Nullwerthe

von geraden Functionen, welche verschwinden, beachte man, dass sie wie $p^{\frac{1}{4}}$ oder, was dasselbe heisst, wie $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ unendlich klein werden (wie man auch aus den bekannten algebraischen Ausdrücken dieser Nullwerthe würde entnehmen können). *Die Quotienten der Th-Functionen durch ihre Nullwerthe*, d. h. also die *Sigmafunctionen* bleiben bekanntlich (vgl. Wiltheiss, dieser Ann. Bd. 31) auch im Grenzfalle endlich und von Null verschieden; in der That erhält man aus der Reihenentwicklung:

$$\lim p^{-\frac{1}{4}}\,\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}1 & g_2\\ h_1 & h_2\end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \tag{2}$$

$$= e^{\pi i\left(v_1+\frac{1}{2}h_1\right)}\,\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g_2\\ h_2\end{smallmatrix}\right|}(v_2;\ \tau_{22}) + e^{-\pi i\left(v_1+\frac{1}{2}h_1\right)}\,\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g_2\\ h_2\end{smallmatrix}\right|}(v_2;\ \tau_{22}).$$

Analoge Bemerkungen gelten natürlich auch für die 4 ungeraden verschwindenden Thetafunctionen.

§ 7.

Verhalten der Integrale erster Gattung und ihrer Perioden beim Zusammenrücken von drei Verzweigungspunkten.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung des zweiten der Grenzfälle, deren Behandlung wir in Aussicht nahmen: wir lassen drei Verzweigungspunkte in der Weise zusammenrücken, dass *ihr Doppelverhältniss mit einem festen vierten Punkt einer bestimmten, endlichen, von Null und Eins verschiedenen Grenze sich nähert.* Wenn das in Bezug auf *irgend* einen vierten Punkt eintritt, so tritt es auch ein in Bezug auf *jeden* vierten Punkt, der der gemeinschaftlichen Grenzlage der drei ersten Punkte nicht unendlich nahe liegt; und zwar ist *der Grenzwerth von der Wahl dieses vierten Punktes unabhängig.* Denn wenn sich $\frac{x}{y}$ (das Doppelverhältniss von $x, y, 0, \infty$) mit gegen Null convergirenden Werthen von x und y einer bestimmten Grenze nähert, so nähert sich $\frac{x}{y} : \frac{a-x}{a-y}$ (das Doppelverhältniss von $x, y, 0, a$) derselben Grenze. Wir werden übrigens im Folgenden stets annehmen, *die Annäherung des Doppelverhältnisses an seinen Grenzwerth geschehe so, dass wir diesen Grenzwerth vor Beginn des Grenzübergangs statt des variabeln Werthes in die Formeln einführen dürfen;* in wie weit diese Voraussetzung wirklich eine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Untersuchung enthält, lassen wir hier unerörtert.

Dagegen enthält es den Entwickelungen von § 3 zufolge sicher keine Beschränkung, wenn wir folgende Annahmen machen: das

Querschnittsystem sei wieder das von § 1; der Punkt α_4 sei fest und zum Nullpunkt des Coordinatensystems gewählt; $\alpha_3 = \varepsilon$, $\alpha_5 = \lambda^2 \varepsilon$ sollen sich ihm nähern; λ^2 sei übrigens nicht positiv reell, sodass wir nachher in der Integration auf geradem Wege nicht behindert sind. Es ist dann eben λ^2 das Doppelverhältniss der vier Punkte $(3, 4, 5, \infty)$; der getroffenen Vereinbarung zufolge behandeln wir dasselbe als von ε unabhängig.

Wir beginnen wieder mit der Untersuchung der Integrale I. Gattung; setzen wir zur Abkürzung:

$$\psi(x) = (\alpha_0 x)(\alpha_1 x)(\alpha_2 x),$$

so haben wir:

$$(1)\quad w_1 = \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\,\psi(x)}}, \quad w_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\,\psi(x)}}.$$

Bleibt der Integrationsweg dem Nullpunkt hinlänglich ferne, so können wir unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen und finden:

$$(2)\qquad \lim_{\varepsilon=0} u_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x\psi(x)}}, \quad \lim_{\varepsilon=0} u_2 = \frac{dx}{x\sqrt{x\psi(x)}};$$

wir formuliren dieses Resultat folgendermassen:

Von unseren beiden Integralen wird in der Grenze das eine ein elliptisches Integral I. Gattung, das andere ein solches II. Gattung mit Unstetigkeit in dem dreifachen Verzweigungspunkte. Die elliptische Riemann'sche Fläche, auf welche diese Integrale sich beziehen, hat die drei getrennt bleibenden Punkte α_0, α_1, α_2 und die Grenzlage der drei zusammenrückenden Punkte α_3, α_4, α_5 zu Verzweigungspunkten.

Die Perioden dieser Integrale an den Querschnitten A_1, B_1, welche vom Nullpunkt entfernt verlaufen, können wir ebenfalls durch directen Grenzübergang bestimmen; indem wir mit $\varkappa^2$ das Doppelverhältniss $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, mit K, K' die Perioden des elliptischen Integrals I. Art, mit E, E' die des Integrals II. Art (2) bezeichnen, erhalten wir:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \omega_{11} &= K(\varkappa^2), & \lim_{\varepsilon=0} \omega_{21} &= E(\varkappa^2), \\ \lim_{\varepsilon=0} \omega_{13} &= K'(\varkappa^2), & \lim_{\varepsilon=0} \omega_{23} &= E'(\varkappa^2). \end{aligned}$$

Die Grenzwerthe der Perioden an den Querschnitten A_2, B_2 bedürfen einer eingehenderen Untersuchung, die übrigens keine Schwierigkeiten bietet. In die Integrale, durch welche die Perioden an A_2 dargestellt werden, führen wir eine neue Integrationsvariable $y = \varepsilon x$ ein; dadurch erhalten wir:

$$\omega_{14} = 2\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\,\psi(x)}} = 2\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\lambda^2)\,\psi(\varepsilon y)}};$$

$$\omega_{24} = 2\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\,\psi(x)}} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\lambda^2)\,\psi(\varepsilon y)}}.$$

Damit sind die Integrationsgrenzen constant geworden; wir dürfen unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen und erhalten unter Benutzung einer ähnlichen Bezeichnung wie oben:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=0} \frac{\omega_{14}}{\sqrt{\varepsilon}} = \mathsf{E}'(\lambda^2), \quad \lim_{\varepsilon=0}(\omega_{24}\sqrt{\varepsilon}) = \mathsf{K}'(\lambda^2); \text{ und ganz ebenso:}\\ &\lim_{\varepsilon=0} \frac{\omega_{12}}{\sqrt{\varepsilon}} = \mathsf{E}(\lambda^2), \quad \lim_{\varepsilon=0}(\omega_{22}\sqrt{\varepsilon}) = \mathsf{K}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Wir begleiten diese Formeln mit den Worten:

Die Perioden von w_1 am zweiten und vierten Querschnitt werden in der Grenze unendlich klein wie die Producte von $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ in elliptische Perioden II. Gattung des Moduls λ^2, die Perioden von w_2 an denselben Querschnitten unendlich gross wie die Producte von $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ in elliptische Perioden I. Gattung desselben Moduls.

§ 8.

Grenzwerthe der Thetamoduln und Thetafunctionen beim Zusammenrücken von drei Verzweigungspunkten.

Um nun die Grenzwerthe der Thetamoduln zu erhalten, bilden wir zuerst die der Periodendeterminanten. Wir erhalten ohne Weiteres:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\lim(p_{12}\sqrt{\varepsilon}) = K(\varkappa^2)\,\mathsf{K}(\lambda^2);\\ &\lim p_{13} \quad = K(\varkappa^2)\,E'(\varkappa^2) - E(\varkappa^2)\,K'(\varkappa^2) = \frac{4\pi i}{\psi(0)};\\ &\lim(p_{14}\sqrt{\varepsilon}) = K(\varkappa^2)\,\mathsf{K}'(\lambda^2);\\ &\lim(p_{23}\sqrt{\varepsilon}) = -K(\varkappa^2)\,\mathsf{K}'(\lambda^2);\\ &\lim p_{24} \quad = -\mathsf{K}(\lambda^2)\,\mathsf{E}'(\lambda^2) + \mathsf{E}(\lambda^2)\,\mathsf{K}'(\lambda^2) = \frac{-4\pi i}{\psi(0)};\\ &\lim(p_{34}\sqrt{\varepsilon}) = K'(\varkappa^2)\,\mathsf{K}'(\lambda^2) \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\lim \tau_{11} = \tau(\varkappa^2), &&\lim \tau_{22} = \tau(\lambda^2),\\ &\lim \frac{\tau_{12}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{4\pi i}{\psi(0)\,K(\varkappa^2)\,\mathsf{K}(\lambda^2)}, &&\lim \tau_{12} = 0. \end{aligned}$$

Von den Thetamoduln verschwindet also in unserem Falle τ_{12} *und zwar wie* $\sqrt{\varepsilon}$; τ_{11} *und* τ_{22} *gehen über in die zu den Moduln* $\varkappa^2$, *bezw.* λ^2 *gehörigen elliptischen Periodenverhältnisse* $\tau(\varkappa^2)$, $\tau(\lambda^2)$, *können also noch beliebige Werthe mit positiv imaginären Bestandtheilen annehmen.*

Nun ist längst bekannt, was unter dieser Voraussetzung $\tau_{12}=0$ aus den Thetafunctionen wird: neun von den geraden gehen über in Producte aus je zwei geraden elliptischen Thetafunctionen $\vartheta(v_1, \tau_{11})$ und $\vartheta(v_2, \tau_{22})$, die sechs ungeraden gehen über in die drei Producte aus dem ungeraden $\vartheta(v_1, \tau_{11})$ und je einem der drei geraden $\vartheta(v_2, \tau_{22})$ und in die drei Producte aus dem ungeraden $\vartheta(v_2, \tau_{22})$ und je einem der drei geraden $\vartheta(v_1, \tau_{11})$; das zehnte gerade Theta (wie leicht zu sehen, dasjenige, welches zur Zerlegung 012, 345) gehört) geht über in das Product der beiden ungeraden elliptischen Thetafunctionen $\vartheta_1(v_1, \tau_{11})$ und $\vartheta_1(v_2, \tau_{22})$. Der Nullwerth des letzteren verschwindet also, und zwar wie τ_{12} oder $\sqrt{\varepsilon}$.*)

Die *Th*-Functionen verschwinden bei diesem Grenzübergang sämmtlich identisch, die Sigmafunctionen bleiben endlich und von Null verschieden.

Insbesondere sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass von den 10 *Th*-Nullwerthen, wie die directe Betrachtung ihrer algebraischen Ausdrücke übereinstimmend mit der Verfolgung des Grenzübergangs durch die Thetafunctionen hindurch ergiebt, neun je wie $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$, der zehnte wie $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$ unendlich klein werden.

§ 9.

Ein Hilfssatz.

Da für $\tau_{12}=0$ nur ein Thetanullwerth verschwindet, die übrigen neun von Null verschieden bleiben, so könnte man vermuthen wollen, jede ganze Function der Thetanullwerthe, welche für $\tau_{12}=0$ verschwindet, müsse durch jenen einen Thetanullwerth theilbar sein. Indessen zeigen einfache Beispiele**), dass diese Vermuthung irrig sein würde. Dagegen gilt der folgende Satz, von welchem im III. Abschnitt Gebrauch zu machen sein wird:

Eine ganze Function der Quadrate der zehn Thetanullwerthe, welche für $\tau_{12}=0$ *verschwindet, lässt sich umformen in das Product*

*) Uebrigens zeigen die bekannten Formeln für die Richelot'schen Moduln (vergl. etwa Krause p. 36), dass auch umgekehrt stets 3 Wurzeln von f_6 in der hier betrachteten Weise einander gleich werden müssen, wenn ein und nur ein Thetanullwerth verschwinden, die übrigen neun endlich bleiben sollen.

**) Wie $\vartheta_{12}^3\vartheta_{05}+\vartheta_{01}^3\vartheta_{25}-\vartheta^3\vartheta_{34}$.

aus ϑ_{14}^2 und einer andern g a n z e n *Function der Quadrate der Thetanullwerthe — erforderlichen Falls unter Benutzung der zwischen den Thetanullwerthen bestehenden Relationen.*

Zum Beweis dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass ϑ_{14} in der vorgelegten Function überhaupt nicht auftritt. Die neun übrigen gehen über in die neun Producte:

(1) $$x_i y_k, \quad i, k = 0, 2, 3$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

(2) $$x_i = \Theta_i^2(\tau_{11}), \qquad y_i = \Theta_i^2(\tau_{22})$$

unter Θ_0, Θ_2, Θ_3 die Nullwerthe der 3 geraden elliptischen Thetafunctionen verstanden. Wir führen den Beweis dann so, dass wir zunächst alle diejenigen Functionen der 9 Producte (29) aufzählen, welche verschwinden, wenn die x, y die in (30) angegebene Bedeutung haben; dann ersetzen wir in diesen Functionen die $x_i x_k$ durch die entsprechenden Thetanullwerthquadrate und zeigen, dass die so entstehenden Functionen der letzteren vermöge der Thetarelationen theils verschwinden, auch wenn τ_{12} nicht Null ist, theils durch ϑ_{14}^4 theilbar sind.

Die Ausführung gestaltet sich nun folgendermassen. Zwischen den elliptischen Thetanullwerthen besteht nur die *eine* Relation:

(3) $$\Theta_0^4 + \Theta_2^4 = \Theta_3^4,$$

wir haben also, wenn wir uns geometrischer Redeweise bedienen, zunächst die Aufgabe vor uns:

Man soll die allgemeinste ganze Function zweier Punkte x, y der Ebene angeben, welche verschwindet, sobald beide auf die Curve:

(4) $$F(x) \equiv x_0^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

rücken.

Da diese Curve vom Geschlechte Null ist, so erhält man leicht durch quadratische Transformation die Antwort:

Die allgemeinste solche Function hat die Form:

(5) $$g\left(\overset{n-2}{x}, \overset{n}{y}\right) \cdot F(x) + h\left(\overset{n}{x}, \overset{n-2}{y}\right) F(y),$$

unter g, h ganze homogene Functionen der angegebenen Grade in den x, bezw. y verstanden.

Speciell folgt hieraus:

Jede ganze Function n^{ten} Grades der 9 *Producte* (1), *welche verschwindet, sobald man die x, y durch die unter* (2) *angegebenen Werthe ersetzt, lässt sich durch identische Umformung in die Gestalt setzen:*

$$(6)\qquad \sum_i \sum_k g_{ik} x_i x_k\, F(y) + \sum_i \sum_k h_{ik} y_i y_k\, F(x), \quad \binom{i = 0, 2, 3}{k = 0, 2, 3},$$

in welcher g_{ik}, h_{ik} *ganze Functionen* $(n-2)^{ten}$ *Grades jener* 9 *Producte bedeuten.*

Bezeichnen wir für den Augenblick mit $\vartheta_{(ik)}$ denjenigen Thetanullwerth, der sich für $\tau_{12} = 0$ auf $\sqrt{x_i y_k}$ reducirt, so besagt der eben ausgesprochene Satz nichts Anderes als:

Jede ganze Function unserer 9 *Thetanullwerthquadrate, welche für* $\tau_{12} = 0$ *verschwindet, lässt sich ohne Benutzung der Thetarelationen durch identische Umformung in die Gestalt setzen:*

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\sum_i \sum_k g_{ik} \left(\vartheta^2_{(i0)} \vartheta^2_{(k0)} + \vartheta^2_{(i2)} \vartheta^2_{(k2)} - \vartheta^2_{(i3)} \vartheta^2_{(k3)}\right) \\ &+ \sum_i \sum_k h_{ik} \left(\vartheta^2_{(0i)} \vartheta^2_{(0k)} + \vartheta^2_{(2i)} \vartheta^2_{(2k)} - \vartheta^2_{(3i)} \vartheta^2_{(3k)}\right), \end{aligned}$$

unter g_{ik}, h_{ik} ganze Functionen der 9 Thetanullwerthquadrate verstanden.

Nun sind aber zufolge bekannten Thetarelationen (vgl. z. B. Krause, p. 37, 38) diejenigen Klammergrössen in (7), in welchen $i = k$ ist, vom Vorzeichen abgesehen $= \vartheta^4_{14}$, die übrigen sind Null. Damit ist der zu Anfang des Paragraphen aufgestellte Satz bewiesen.

III.

Transformation von Functionen höherer Stufe.*)

§ 10.

Modification der Repräsentanten.

In § 54 der Grundz. ist bereits erwähnt, dass bei Untersuchung der Transformation von Functionen höherer Stufe die Repräsentanten durch andere zu ersetzen sind; es soll dies hier des Weiteren ausgeführt werden. Die Voraussetzung, dass *der Transformationsgrad* n *eine ungerade Primzahl* sei, soll dabei beibehalten und ihr die weitere beigefügt werden, dass *die Stufenzahl* s *der zu transformirenden Functionen zu* n *relativ prim* sei.

Wir bezeichnen eine lineare Periodentransformation:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha_1^{(i)} \omega_1 + \cdots + \alpha_4^{(i)} \omega_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_4' &= \delta_1^{(i)} \omega_1 + \cdots + \delta_4^{(i)} \omega_4 \end{aligned}$$

*) Man vgl. die in der Einleitung erwähnten Arbeiten von Hurwitz und Biedermann.

abkürzungsweise durch:

$$\omega' = R_i(\omega);$$

Zusammensetzung solcher Substitutionen sei so bezeichnet, dass aus:

$$\omega'' = R(\omega'), \quad \omega' = S(\omega)$$

folgt:

$$\omega'' = R[S(\omega)]$$

oder einfacher geschrieben:

$$\omega'' = RS(\omega). \tag{2}$$

Die specielle Transformation n^{ten} Grades:

$$\bar{\omega}_1 = n\,\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = n\,\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3, \quad \bar{\omega}_4 = \omega_4$$

sei durch:

$$\bar{\omega}_1 = N(\omega_1),$$

die allgemeinere:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &= n(\alpha_1^{(i)}\omega_1 + \alpha_2^{(i)}\omega_2 + \alpha_3^{(i)}\omega_3 + \alpha_4^{(i)}\omega_4),\\
\bar{\omega}_2 &= n(\beta_1^{(i)}\omega_1 + \beta_2^{(i)}\omega_2 + \beta_3^{(i)}\omega_3 + \beta_4^{(i)}\omega_4),\\
\bar{\omega}_3 &= \gamma_1^{(i)}\omega_1 + \gamma_2^{(i)}\omega_2 + \gamma_3^{(i)}\omega_3 + \gamma_4^{(i)}\omega_4,\\
\bar{\omega}_4 &= \delta_1^{(i)}\omega_1 + \delta_2^{(i)}\omega_2 + \delta_3^{(i)}\omega_3 + \delta_4^{(i)}\omega_4
\end{aligned} \tag{3}$$

sei dem entsprechend durch:

$$\bar{\omega} = NR_i(\omega)$$

oder kürzer durch:

$$\bar{\omega} = R_i^{(n)}(\omega)$$

bezeichnet. Die erwähnte Modification der Repräsentanten besteht dann in folgendem:

Die Repräsentanten $R_i^{(n)}$ sind so zu wählen, dass die ihnen zugeordneten linearen Transformationen R_i nach dem Modul s zur Identität congruent werden.

Die Coefficientenschemata der so modificirten „neuen" Repräsentanten (Grundz. § 50) nehmen dabei folgende Gestalt an:

I. Typus:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0\\ 0 & n & 0 & 0\\ k's & l's & 1 & 0\\ l's & m's & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

II. Typus:

$$\begin{pmatrix} n\alpha & -n\alpha l's & n\beta & 0\\ 0 & n & 0 & 0\\ \gamma & -\gamma l's & n\delta & 0\\ 0 & k's & l's & 1 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

III. Typus:

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\alpha & 0 & n\beta \\ k's & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & n\delta \end{pmatrix};$$

IV. Typus:

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} n\alpha & 0 & n\beta & 0 \\ 0 & n\alpha & 0 & n\beta \\ \gamma & 0 & n\delta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & n\delta \end{pmatrix}.$$

Die verschiedenen Repräsentanten der drei ersten Typen werden erhalten, indem man die ganzen Zahlen k', l', m' unabhängig von einander je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n durchlaufen lässt. Die Coefficienten α, β, γ, δ haben den Bedingungen zu genügen:

$$(8)\qquad \begin{gathered} \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad n\delta \equiv 1; \quad (\text{mod. } s), \\ n\alpha\delta - \beta\gamma = 1; \end{gathered}$$

welches der diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme man wählt, ist ganz gleichgültig.

Die Ueberführung der nicht modificirten neuen Repräsentanten in die modificirten neuen Repräsentanten möge beispielsweise am II. Typus erläutert werden; für die übrigen Typen gestaltet sie sich ganz analog. Seien mit $\bar{\omega}'$ die zu ersteren, mit ϖ' die zu letzteren gehörenden Perioden bezeichnet, so liefert die Vergleichung der Formeln:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varpi_1' &= n(\alpha\omega_1 - \alpha l's\omega_2 + \beta\omega_3), \\ \varpi_2' &= n\omega_2, \\ \varpi_3' &= \gamma\omega_1 - \gamma l's\omega_2 + n\delta\omega_3, \\ \varpi_4' &= k's\omega_2 + l's\omega_3 + \omega_4 \end{aligned}$$

mit dem auf die $\bar{\omega}'$ bezüglichen*) die nachstehenden Relationen zwischen den ϖ' und den $\bar{\omega}'$:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \varpi_1' &= -\beta\bar{\omega}_1' + \alpha(l-l's)\bar{\omega}_2' + n\alpha\bar{\omega}_3', \\ \varpi_2' &= \bar{\omega}_2', \\ \varpi_3' &= -\delta\bar{\omega}_1' + \gamma\frac{l-l's}{n}\bar{\omega}_2' + \gamma\bar{\omega}_3', \\ \varpi_4' &= \frac{l-l's}{n}\bar{\omega}_1' + \frac{-k+k's}{n}\bar{\omega}_2' + \bar{\omega}_4'. \end{aligned}$$

Der durch die Zahlen k', l' charakterisirte modificirte neue Repräsentant des II. Typus ist also zu dem durch die Zahlen k, l charakte-

---

*) Grundz. Glchgen (167) und (183).

risirten nicht modificirten neuen Repräsentanten desselben Typus äquivalent, wenn k, l mit k', l' durch die Congruenzen verknüpft sind:

$$k \equiv k's, \quad l \equiv l's. \quad (\text{mod. } n). \tag{11}$$

Denn dann und nur dann stellen die Gleichungen (10) eine lineare Periodentransformation vor.

Die *modificirten Hermite'schen Repräsentanten**) werden folgende Coëfficientenschemata besitzen:

I. Typus: wie oben;

II. Typus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -l's & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & k's & l's & 1 \end{pmatrix}; \tag{12}$$

III. Typus:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k's & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}; \tag{13}$$

IV. Typus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Der *Uebergang von den modificirten neuen Repräsentanten* (ϖ') *zu den modificirten Hermite'schen* (ϖ) geschieht durch die Substitutionen:

I. Typus:

$$\varpi_1' = \varpi_1, \quad \varpi_2' = \varpi_2, \quad \varpi_3' = \varpi_3, \quad \varpi_4' = \varpi_4; \tag{15}$$

II. Typus:

$$\begin{aligned} \varpi_1' &= n\alpha\varpi_1 + \beta\varpi_3, \quad \varpi_2' = \varpi_2, \\ \varpi_3' &= \gamma\varpi_1 + \delta\varpi_3, \quad \varpi_4' = \varpi_4; \end{aligned} \tag{16}$$

III. Typus:

$$\begin{aligned} \varpi_1' &= \varpi_1, \quad \varpi_2' = n\alpha\varpi_2 + \beta\varpi_4, \\ \varpi_3' &= \varpi_3, \quad \varpi_4' = \gamma\varpi_2 + \delta\varpi_4; \end{aligned} \tag{17}$$

IV. Typus:

$$\begin{aligned} \varpi_1' &= n\alpha\varpi_1 + \beta\varpi_3, \quad \varpi_2' = n\alpha\varpi_2 + \beta\varpi_4, \\ \varpi_3' &= \gamma\varpi_1 + \delta\varpi_3, \quad \varpi_4' = \gamma\varpi_2 + \delta\varpi_4. \end{aligned} \tag{18}$$

---

*) Vgl. für den Fall $s = 8$ Königsberger, Cr. J. Bd. 67, (1867), p. 99.

Ausdrücklich sei dabei hervorgehoben, dass, wie aus den Congruenzen (8) hervorgeht, *die Substitutionen* (16), (17), (18) *nur im Falle*

$$n \equiv 1 \pmod{s}$$

modulo s zur Identität congruent sind.

§ 11.

Anwendung dieser modificirten Repräsentanten.

Es sei $t(\omega)$ der „ursprüngliche" Werth einer zu transformirenden Modulform s^{ter} Stufe; irgend einer der „transformirten" Werthe derselben wird dann mit:

$$t(NR_i\omega)$$

zu bezeichnen sein (vgl. pag. 392). Werden nun die *ursprünglichen* Perioden ω irgend einer linearen Transformation:

$$\omega' = P(\omega) \tag{1}$$

unterworfen, so geht jener Werth über in:

$$t(NR_iP\omega).$$

Nun bilden aber nach Voraussetzung die NR_i ein vollständiges Repräsentantensystem; das mit $NR_iP(\omega)$ bezeichnete Periodensystem wird daher äquivalent sein mit dem eines andern Repräsentanten NR_j, sodass eine Identität der Form besteht:

$$NR_iP = V_jNR_j, \tag{2}$$

in welcher V_j eine lineare Periodentransformation der transformirten Perioden bedeutet.

Nun behaupten wir:

Sind die Repräsentanten so normirt, wie es im vorigen Paragraphen geschehen ist, so werden für jedes bestimmte P alle diese V_j zu einander congruent (mod. s).

In der That: V_jNR_j wird nur dann wieder auf die Form (3) des § 10 gebracht werden können, wie doch die Identität (20) verlangt, wenn V_j die Form hat:

$$V_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & na_{j3} & na_{j4} \\ b_{j1} & b_{j2} & nb_{j3} & nb_{j4} \\ c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} & c_{j4} \\ d_{j1} & d_{j2} & d_{j3} & d_{j4} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dann aber wird es gleichgültig sein, ob man das Periodensystem $R_j(\omega)$ zuerst der Operation N unterwirft und hierauf die lineare Transformation V_j anwendet, oder ob man jene Operation an zweiter Stelle ausführt, nachdem man vorher eine lineare Transformation

U_j vorgenommen hat, deren Coefficientenschema aus dem von V_j hervorgeht, indem man a_3, a_4, b_3, b_4 von dem Factor n befreit und dafür c_1, c_2, d_1, d_2 mit demselben versieht, indem man also:

$$U_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & a_{j4} \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & b_{j4} \\ n c_{j1} & n c_{j2} & c_{j3} & c_{j4} \\ n d_{j1} & n d_{j2} & d_{j3} & d_{j4} \end{pmatrix} \tag{4}$$

setzt. In eine Gleichung zwischen Substitutionen gefasst lautet dieser Satz:

$$V_j N R_j = N U_j R_j; \tag{5}$$

auf Grund desselben geht die Identität (2) über in:

$$N R_i P = N U_j R_j$$

und indem man beiderseits die Operation N rückgängig macht, in:

$$R_i P = U_j R_j. \tag{6}$$

An dieser Stelle greift nun die Voraussetzung ein, dass die Repräsentanten in der angegebenen Weise normirt seien. Alsdann folgt nämlich aus der Gleichung (6) die Congruenz:

$$P \equiv U_j \pmod{s}, \tag{7}$$

aus der sich dann weiter ergiebt, dass für ein bestimmtes P alle U_j unter sich und also*) auch alle V_j unter sich congruent sind, wie oben behauptet wurde.

Es seien nun:

$$t_1(\omega),\ t_2(\omega) \ldots t_S(\omega)$$

die S verschiedenen Werthe, welche die Modulform $t(\omega)$ annimmt, wenn man die Perioden ω den S modulo s verschiedenen linearen Transformationen unterwirft. Ihnen entsprechen die SN' transformirten Werthe:

$$\begin{array}{l} t_1(R_1^{(n)}\omega),\ t_2(R_1^{(n)}\omega), \ldots, t_S(R_1^{(n)}\omega), \\ t_1(R_2^{(n)}\omega),\ t_2(R_2^{(n)}\omega), \ldots, t_S(R_2^{(n)}\omega), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1(R_{N'}^{(n)}\omega),\ t_2(R_{N'}^{(n)}\omega), \ldots, t_S(R_{N'}^{(n)}\omega), \end{array} \tag{8}$$

(Zur Abkürzung ist N' für $n^3 + n^2 + n + 1$ geschrieben). Der zuletzt abgeleitete Satz sagt dann aus, dass *lineare Transformation der ursprünglichen Perioden die sämmtlichen Formen einer Colonne dieser Tabelle in die sämmtlichen Formen derselben oder einer andern Colonne* (*im allgemeinen unter Veränderung der Reihenfolge*) *überführt.*

Beschränkt man sich speciell auf solche Substitutionen P, welche

*) Da wir s und n als relativ prim voraussetzten.

modulo s zur Identität congruent sind, so werden nach (7) auch alle U_j und in Folge dessen auch alle V_j modulo s zur Identität congruent. Daraus ergiebt sich der weitere Satz:

Bei den Operationen der Principaluntergruppe s^{ter} Stufe vertauschen sich die Formen jeder Colonne der Tabelle (8) *nur unter sich; die Art der Vertauschung ist für alle Colonnen dieselbe.*

Die erste Hälfte dieses Satzes besagt aber*) nichts anderes als:

Die Formen jeder Colonne der Tabelle (8) *genügen einer algebraischen Gleichung — Multiplicatorgleichung — des Grades*

$$n^3 + n^2 + n + 1,$$

deren Coefficienten Formen s^{ter} Stufe sind.

Ein bemerkenswerther Umstand tritt noch ein, wenn die Form t der Stufe δ (unter δ einen Theiler von s verstanden) in Bezug auf Einheitswurzeln adjungirt und:

$$(9) \qquad n \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{s}{\delta}\right)$$

ist. Alsdann ist nämlich stets:

$$(10) \qquad V_j \equiv U_j \ (\text{mod. } s)$$

wenn U_j mod. δ zur Identität congruent ist; denn z. B. aus $n \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{s}{\delta}\right)$ und $a_{j3} \equiv 0$ (mod. δ) folgt $n a_{j3} \equiv a_{j3}$ (mod. s). Werden nun die ursprünglichen Perioden einer Transformation P unterworfen, welche mod. δ zur Identität congruent ist, also den Zutritt einer bestimmten Einheitswurzel ε zu $t(\omega)$ bewirkt, so wird (immer unter der Voraussetzung, dass die Repräsentanten mod. s wie oben modificirt sind) in Folge von (7) und (10):

$$V_j \equiv P \ (\text{mod. } s);$$

es geht also jedes $t(R_i^{(n)}\omega)$ über in $\varepsilon t(R_j^{(n)}\omega)$, wo ε *dieselbe* Einheitswurzel ist, welche vermöge P zu $t(\omega)$ trat. Daraus folgt, dass die Werthe von:

$$(10) \qquad \frac{t(\overline{\omega})}{t(\omega)}$$

bei diesen Operationen ohne Zutritt von Einheitswurzeln sich nur unter einander permutiren, m. a. W. es folgt der Satz:

Auch wenn $t(\omega)$ nicht selbst zur Stufe δ gehört, sondern zur Stufe s (unter s ein Vielfaches von δ verstanden), der Stufe δ aber in Bezug auf Einheitswurzeln adjungirt ist, genügt $t(\overline{\omega}) : t(\omega)$ im Rationalitätsbereich der Stufe δ einer Gleichung des Grades $n^3 + n^2 + n + 1$, vorausgesetzt, dass der Transformationsgrad $n \equiv 1 \left(mod.\ \frac{s}{\delta}\right)$ ist.

---

*) Vgl. Grundz. § 51.

IV.

Darstellung der rationalen symmetrischen Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen durch die zugehörigen hyperelliptischen Thetanullwerthe.

§ 12.

Die rationalen symmetrischen Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen.

Unter den verschiedenen Rationalitätsbereichen II. Stufe ist Grundz. § 26, II derjenige erwähnt worden, welcher sich auf die Zerlegung der Grundform f_6 in zwei cubische Factoren φ_3, ψ_3 stützt, in dem Sinne, dass nicht diese Factoren selbst, sondern nur solche Functionen ihrer Coefficienten, welche bei Vertauschung der beiden Factoren sich nicht ändern, als rational bekannt gelten sollen. Wir knüpfen an diesen Rationalitätsbereich an, indem wir uns die Aufgabe stellen, das *volle System seiner „reinen" Modulformen* zu finden. Dieselben sind nichts anderes als diejenigen rationalen ganzen Simultaninvarianten von φ und ψ, welche bei Vertauschung von φ mit ψ ihren Werth nicht ändern. Eine solche Invariante soll im folgenden kurz als *symmetrisch* bezeichnet und unter ihrem *Grad* ohne nähere Bezeichnung ihr Grad in den Coefficienten jeder einzelnen der beiden Formen φ, ψ verstanden werden.

Die Aufstellung des vollen Systems dieser symmetrischen Invarianten kann damit begonnen werden, dass man aus den Formen des bekannten vollen Systems der rationalen ganzen Simultaninvarianten solche Formen bildet, welche die verlangte Symmetrieeigenschaft besitzen. Jenes System nun besteht nach den Untersuchungen von Clebsch*) aus folgenden sieben Formen:

a) den beiden Discriminanten**):

$$R = \frac{1}{2} (\varphi\varphi')^2 (\varphi''\varphi''')^2 (\varphi\varphi'') (\varphi'\varphi'''), \tag{1}$$

$$P = \frac{1}{2} (\psi\psi')^2 (\psi''\psi''')^2 (\psi\psi'') (\psi'\psi'''), \tag{2}$$

---

*) Binäre Formen p. 221 ff. — Die Zahlencoefficienten der einzelnen Formen sind im Texte (zum Theil abweichend von Clebsch) so normirt, dass die Invarianten und die Coefficienten der mit Binomialcoefficienten geschriebenen Covarianten ganze *ganzzahlige* Functionen der Coefficienten der mit Binomialcoefficienten geschriebenen Formen selbst werden.

**) Bei Cl. heissen diese Formen $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}P$.

b) der bilinearen Invariante:

(3) $$J = (\varphi\psi)^3;$$

c) vier Formen, welche aus den zweiten Ueberschiebungen:

(4) $$\Delta = (\varphi\varphi')^2\varphi_x\varphi'_x, \quad \Theta = 2(\varphi\psi)^2\varphi_x\psi_x{}^{*}), \quad \nabla = (\psi\psi')^2\psi_x\psi'_x$$

erhalten werden, nämlich:

(5) $$S = (\Theta\Delta)^2, \quad \Sigma = (\Theta\nabla)^2, \quad T = \frac{1}{2}(\Delta\nabla)^2 = \frac{1}{8}(\Theta\Theta)^2 + \frac{1}{4}J^2.$$

(6) $$\Omega = \frac{1}{4}(\Theta\Delta)(\Theta\nabla)(\Delta\nabla)^{**}).$$

Diese sieben Formen sind durch zwei Syzygien verbunden, welche Ω^2 und ΩJ durch die übrigen Formen des Systems ausdrücken.

Für die hier zu machenden Anwendungen des Formensystems scheint übrigens die Form Ω zweckmässigerweise durch die *Resultante* $\mathfrak{R}$ von φ und ψ ersetzt zu werden, welche mit ihr durch die Relation verbunden ist***):

(7) $$\mathfrak{R} = J^3 - 27\Omega.$$

Von diesen Formen ist nun allein T eine symmetrische Invariante; sie wird daher zunächst beizubehalten sein. Die Formen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ sind *alternirend*, d. h. sie ändern ihr Vorzeichen bei Vertauschung von φ mit ψ; es werden also:

$$J^2, \quad J\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}^2$$

symmetrisch sein. R und P, S und Σ gehen bei Vertauschung von φ und ψ in einander über, also sind auch:

$$RP, \quad S\Sigma, \quad PS^2 + R\Sigma^2$$

symmetrisch und $PS^2 - R\Sigma^2$ alternirend, also:

$$J(PS^2 - R\Sigma^2), \quad \mathfrak{R}(PS^2 - R\Sigma^2)$$

symmetrisch.

Nun kann gezeigt werden, dass sich jede rationale ganze symmetrische Invariante von φ und ψ durch die neun gefundenen Invarianten rational und ganz ausdrücken lässt. Denn nach dem, was über das allgemeine Formensystem von φ und ψ bekannt ist, ist jede Simultaninvariante dieser Formen eine Summe von Gliedern folgender Gestalt

(8) $$J^\alpha T^\beta \mathfrak{R}^\gamma R^\delta P^\epsilon S^\zeta \Sigma^\eta.$$

Soll die Invariante symmetrisch sein, so muss vor allem ihr Grad in den Coefficienten von φ ebenso gross sein als der in den Coefficienten von ψ; es muss also:

---

*) Bei Cl. 2Θ.

**) Bei Cl. $2S$, 2Σ, $2T$, $\frac{1}{2}\Omega$.

***) Cl. p. 403.

$$\eta - \zeta = 2(\delta - \varepsilon)$$

sein. Sei jetzt z. B. $\varepsilon \leqq \delta$ (der Fall $\varepsilon \geqq \delta$ erledigt sich ganz ebenso), so trenne man von (8) die Factoren:

$$J^\alpha,\ T^\beta,\ \mathfrak{R}^\gamma,\ (S\Sigma)^\zeta,\ (RP)^\varepsilon$$

ab; dann bleibt:

$$R^{\delta-\varepsilon}\Sigma^{\eta-\zeta} = (R\Sigma^2)^{\delta-\varepsilon}$$

zurück. Da nun alle abgetrennten Factoren symmetrisch oder alternirend sind, so muss, wenn die Invariante symmetrisch sein soll, das Product dieser andern Factoren auch mit

$$\pm (PS^2)^{\delta-\varepsilon}$$

multiplicirt in ihr als Summand vorkommen. Aber

$$(PS^2)^{\delta-\varepsilon} \pm (R\Sigma^2)^{\delta-\varepsilon},$$

ist ganze Function von:

$$RP\,.\,S\Sigma \quad \text{und} \quad PS^2 \pm R\Sigma^2.$$

Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Uebrigens lassen sich von den neun eingeführten Formen noch zwei ausscheiden, wie die oben erwähnten Syzygien lehren. Es scheint jedoch bequemer zu sein, $\mathfrak{R}J$ und $\mathfrak{R}^2$ beizubehalten und dafür etwa $S\Sigma$ und $R\Sigma^2 + PS^2$ fortzulassen. Thun wir das, so können wir das Resultat dieser Ueberlegungen folgendermassen aussprechen, indem wir zugleich eigene Zeichen für unsere Formen einführen:

Das volle System der symmetrischen rationalen ganzen Invarianten von zwei binären cubischen Formen besteht aus folgenden sieben Bildungen:

zwei Formen zweiten Grades:

(9) $$A = J^2;\quad T;$$

zwei Formen vierten Grades:

(10) $$D = RP;\quad E = \mathfrak{R}J;$$

einer Form sechsten Grades:

(11) $$Z = \mathfrak{R}^2;$$

einer Form siebenten Grades:

(12) $$K = J\,.\,(PS^2 - R\Sigma^2);$$

und einer Form neunten Grades:

(13) $$\Lambda = \mathfrak{R}\,.\,(PS^2 - R\Sigma^2).$$

Diese sieben Formen sind durch *vier Syzygien* verbunden nämlich:

(14) $$\begin{aligned} AZ &= E^2, \\ K^2 &= A(G_6{}^2 - 4DG_4{}^2), \\ K\Lambda &= E(G_6{}^2 - 4DG_4{}^2), \\ \Lambda^2 &= Z(G_6{}^2 - 4DG_4{}^2); \end{aligned}$$

dabei bedeutet G_4 eine ganze Function von A, T, D, E, G_6 eine solche

von A, T, D, E, Z; die Indices 4, 6 bezeichnen den Grad dieser Functionen in den Coefficienten jeder der beiden Grundformen.

Von diesen vier Relationen ist eine und nur eine eine Folge der andern, sodass, wie es sein muss, vier von einander algebraisch unabhängige Invarianten bleiben und weitere Relationen zwischen den Formen unseres Systems nicht existiren können.

§ 13.

Ausdrücke der Invarianten durch die Thetanullwerthe.

Für manche Zwecke ist es wünschenswerth, die Ausdrücke dieser Invarianten durch die Theta- oder die Th-Nullwerthe des zugehörigen hyperelliptischen Gebildes zu besitzen. Dieselben können nach der von Herrn Bolza*) zunächst für die Invarianten I. Stufe entwickelten Methode auf folgendem Wege erhalten werden:

Sei etwa, um an eine bestimmte Zerlegung anzuknüpfen:

$$(1) \qquad \varphi_x^3 = (\alpha^{(0)}x)(\alpha^{(2)}x)(\alpha^{(4)}x), \quad \psi_x^3 = (\alpha^{(1)}x)(\alpha^{(3)}x)(\alpha^{(5)}x).$$

Man bringe zunächst durch eine lineare Substitution die beiden Formen auf die Normalformen:

$$(2) \qquad \varphi_x^3 = C\prod_{i=0,2,4}(\vartheta_i^{(1)}y_1 + \vartheta_i^{(2)}y_2), \quad \psi_x^3 = C^{-1}\prod_{i=1,3,5}(\vartheta_i^{(1)}y_1 + \vartheta_i^{(2)}y_2),$$

in welchen y_1, y_2 die neuen Variabeln, $\vartheta_i^{(1)}$, $\vartheta_i^{(2)}$ die Nullwerthe der nach v_1, v_2 genommenen ersten Differentialquotienten der sechs ungeraden Thetafunctionen**), C eine Constante bedeutet, die aus allen Functionen herausfällt, welche die Coefficienten von φ und von ψ in gleichem Grade enthalten. Alsdann drücke man in bekannter Weise die Simultaninvarianten dieser Normalformen aus durch die Determinanten ihrer Linearfactoren, also durch die Determinanten:

$$(3) \qquad \vartheta_i^{(1)}\vartheta_k^{(2)} - \vartheta_k^{(1)}\vartheta_i^{(2)}.$$

Die *Rosenhain'schen Differentialformeln* gestatten dann, diese Determinanten durch Nullwerthe gerader Thetafunctionen auszudrücken; damit ist für die Invarianten der Normalformen (2) die verlangte Darstellung in der That gewonnen, abgesehen von einer Potenz von C, die nur bei solchen Invarianten nicht auftritt, welche in den Coefficienten von φ und ψ von gleichem Grade sind. Um diese Darstellung auch für die allgemeinen Formen (1) zu erreichen, hat man

*) Math. Ann. Bd. 30, p. 478, (1887).

**) Die hier für den Augenblick benutzte abkürzende Bezeichnung der ungeraden Thetafunctionen wird in die des Herrn Staude dadurch übergeführt, dass man jeden geraden Index durch die beiden andern geraden, jeden ungeraden durch die beiden andern ungeraden ersetzt.

nur noch mit einer geeigneten Potenz der Determinante derjenigen Substitution zu multipliciren, welche die allgemeinen Formen (1) in die Normalformen (2) überführt. Diese Determinante ist aber:

$$\sqrt[3]{\frac{\pi^4}{4}\, p_{12} \prod_{\alpha=1}^{10} \vartheta_\alpha}\,, \tag{3}$$

das Product erstreckt über alle 10 geraden Thetafunctionen.

Führt man hier statt der ϑ die Th ein, so fallen die Periodendeterminante und π weg und man kann das Resultat folgendermassen aussprechen:

Jede ganze Invariante g^{ten} Grades von f, welche in den Coefficienten der Linearfactoren von f rational ist, lässt sich durch die Nullwerthe der 10 *geraden Th-Functionen in Gestalt eines Bruches darstellen. Der Zähler dieses Bruches ist eine ganze rationale Function* $(12g)^{ten}$ *Grades dieser Th-Nullwerthe, der Nenner die g^{te} Potenz ihres Productes.*

Wir knüpfen hieran sogleich die umgekehrte Frage: *welche ganze Functionen der Th-Nullwerthe lassen sich rational durch die Determinanten* $(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})$ *ausdrücken?* Das wird nur dann der Fall sein können, wenn jedes der einzelnen Producte, aus welchen eine solche Function sich additiv zusammensetzt, dieselbe Eigenschaft hat. Soll aber*):

$$\Delta^{\alpha}\Delta_{45}^{\beta}\Delta_{41}^{\gamma}\Delta_{43}^{\delta}\Delta_{05}^{\varepsilon}\Delta_{01}^{\zeta}\Delta_{03}^{\eta}\Delta_{25}^{\varkappa}\Delta_{21}^{\lambda}\Delta_{23}^{\mu} \tag{4}$$

die Determinante (02) (d. i. $\alpha^{(0)}\alpha^{(2)}$) nur rational enthalten, so muss $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ durch 4 theilbar sein; und machen wir denselben Schluss für die übrigen Determinanten, so erhalten wir 15 Congruenzen, von welchen die folgenden 6 hier angegeben seien:

$$\left.\begin{array}{l} (02)\ldots \alpha+\beta+\gamma+\delta\equiv 0,\\ (24)\ldots \alpha+\varepsilon+\zeta+\eta\equiv 0,\\ (13)\ldots \alpha+\beta+\varepsilon+\varkappa\equiv 0,\\ (35)\ldots \alpha+\gamma+\zeta+\lambda\equiv 0,\\ (51)\ldots \alpha+\delta+\eta+\mu\equiv 0,\\ (45)\ldots \gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa\equiv 0 \end{array}\right\}\ (\text{mod. } 4). \tag{5}$$

Aus den mit (02), (13) und (45) bezeichneten Congruenzen folgt zunächst:

$$\alpha+\beta\equiv 0,\quad \gamma+\delta\equiv 0,\quad \varepsilon+\varkappa\equiv 0\quad (\text{mod. } 2)$$

und in gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Summe *je* zweier unserer Exponenten gerade sein muss. Wir haben demnach als erstes Resultat:

Ein Product der Form (4) *kann nur dann eine rationale Function*

*) Δ sei der Kürze halber als Bezeichnung des Th-Nullwerths gebraucht.

der $(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})$ *sein, wenn die Exponenten entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind.*

In der That ist das Product aller 10 Th-Nullwerthe rational in den $(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})$, nämlich gleich dem Product von ihnen allen; heben wir es, wo es vorkommt, heraus, so haben wir nur noch mit solchen Producten der Form (4) zu thun, in welchen alle Exponenten gerade sind. Da ferner die vierten Potenzen der einzelnen Th-Nullwerthe rational in den $(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})$ sind, so brauchen wir nur noch die Frage zu beantworten, wie unsere Congruenzen durch Werthe befriedigt werden können, welche theils 0, theils 2 sind. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

I. In *keiner* der Congruenzen seien alle 4 Exponenten gleich zwei. Da die Paare von Th-Functionen alle gleichberechtigt sind, können wir uns auf die Untersuchung des Falls:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \varkappa = 0$$

beschränken. Dann ist wegen (24):

entweder $\zeta = 2$, $\eta = 0$ und dann wegen (51) auch $\mu = 2$;
oder $\zeta = 0$, $\eta = 2$ und dann wegen (35) auch $\lambda = 2$.

Sowohl

$$\Delta, \Delta_{01}, \Delta_{23}, \Delta_{45}, \quad \text{als} \quad \Delta, \Delta_{03}, \Delta_{21}, \Delta_{45}$$

bilden je ein Göpel'sches Quadrupel.

II. In *einer* der Congruenzen, etwa der ersten, sei jeder der vier Exponenten gleich zwei. Dann muss wegen (24):

entweder $\varepsilon = 2$ und dann wegen (13) auch $\varkappa = 2$,
oder $\zeta = 2$ und dann wegen (35) auch $\lambda = 2$,
oder $\eta = 2$ und dann wegen (51) auch $\mu = 2$

sein. Jedes der drei Sextupel:

$$\Delta\Delta_{45}\Delta_{43}\Delta_{41}\Delta_{05}\Delta_{25},$$
$$\Delta\Delta_{45}\Delta_{43}\Delta_{41}\Delta_{03}\Delta_{23},$$
$$\Delta\Delta_{45}\Delta_{43}\Delta_{41}\Delta_{01}\Delta_{21}$$

wird durch ein Göpel'sches Quadrupel zu der Gesammtheit aller zehn Δ ergänzt.

III. Sobald ausser den sechs Exponenten des vorigen Falles noch ein siebenter gleich zwei ist, müssen alle zehn den Werth zwei haben.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und wir können das Resultat folgendermassen aussprechen:

Alle rationalen ganzen Functionen der Th-Nullwerthe Δ, *welche zugleich rationale Functionen der Verzweigungspunkte sind, lassen sich rational und ganz zusammensetzen aus folgenden* 41 *Formen:*

dem Product aller zehn Δ;

den 15 *Producten aus den vier* Δ-*Quadraten je eines Göpel'schen Quadrupels;*

den 15 *Producten von je sechs solchen* Δ-*Quadraten, die nach Weglassung eines Göpel'schen Quadrupels übrig bleiben;*

den 10 *vierten Potenzen der einzelnen* Δ.

Auf die zwischen diesen Formen bestehenden Relationen brauchen wir hier nicht einzugehen.

§ 14.

Eigenschaften derjenigen Invarianten, welche sich als ganze Functionen der Th-Nullwerthe darstellen lassen.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, wie sich die Invarianten von f durch die Th Nullwerthe in Gestalt von Brüchen darstellen lassen. Von einem gewissen Interesse ist nun die Frage, wann es gelingen mag, den Nenner eines solchen Bruches wegzuheben, sei es sofort, sei es nach geeigneter Umformung des Zählers mit Hilfe der Thetarelationen; m. a. W. die Frage, welche (in den Verzweigungswerthen rationalen) Invarianten von f als *ganze* Functionen der Th-Nullwerthe dargestellt werden können. Im Falle der elliptischen Functionen kann dies bekanntlich mit *jeder* solchen Invariante geschehen. Für den hyperelliptischen Fall hat Herr Bolza (a. a. O.) Beispiele des Gegentheils gegeben und auch bereits darauf aufmerksam gemacht, dass gerade diejenigen beiden rationalen Invarianten 4. und 6. Grades der f_6 eine solche Darstellung zulassen, welche verschwinden, wenn f_6 einen dreifachen Linearfactor besitzt.

In der That ist sofort die Richtigkeit des allgemeinen Satzes einzusehen:

Für die Darstellbarkeit einer Invariante von f als ganze Function der Th-Nullwerthe ist eine nothwendige Bedingung, dass sie verschwindet, sobald $f = 0$ eine dreifache Wurzel bekommt.

Denn in diesem Fall verschwinden sämmtliche Th-Nullwerthe.

Zu einer noch engeren Bedingung gelangen wir, wenn wir wieder (wie in den §§ 7, 8) die Differenzen der zusammenrückenden Wurzeln als unendlich kleine Grössen derselben und zwar der ersten Ordnung betrachten. Beachten wir dabei, dass die Th-Nullwerthe vom Grade $\frac{1}{2}$ in den Coefficienten von f sind und unter der gemachten Voraussetzung mindestens von der Ordnung $\frac{1}{4}$ unendlich klein werden, so erhalten wir folgende Formulirung:

Soll eine Invariante g^{ten} Grades von f sich als ganze Function der Th-Nullwerthe darstellen lassen, so muss sie mindestens von der Ordnung

$\frac{1}{2}g$ *unendlich klein werden, wenn drei Nullstellen von f in der angegebenen Weise zusammenrücken.*

Zum Beweise nun, dass *für in den Nullstellen rationale**) *Invarianten von f* diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist, verhilft uns der in § 9 abgeleitete Hilfssatz im Verein mit den Resultaten des vorigen Paragraphen.

Sei nämlich J_g eine in den Nullstellen rationale ganze Invariante von f vom Grade g, so kann dieselbe auf die Form gebracht werden:

$$(1) \qquad J_g = \frac{G_{12g}(\mathrm{Th})}{(\Pi\,\mathrm{Th})^g} = \frac{G_{12g}(\vartheta)}{p_{12}^g\,(\Pi\,\vartheta)^g}$$

(in leicht verständlicher abkürzender Schreibweise). Angenommen nun J_g werde mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}g$ unendlich klein, wenn die 3 Verzweigungspunkte $\alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}, \alpha^{(5)}$ in der angegebenen Weise zusammenrücken; dann wird dort

$$(2) \qquad G_{12g}(\vartheta) = J_g \,.\, (\Pi\,\vartheta)^g \,.\, p_{12}^g$$

unendlich klein von der Ordnung:

$$\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}g.$$

Nun sind zwei Fälle möglich: entweder $G_{12g}(\vartheta)$ enthält einen Thetanullwerth zu einer ungeraden Potenz erhoben, dann muss es nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen durch das Product von ihnen allen theilbar sein; oder es enthält alle Thetanullwerthe nur in geraden Potenzen, dann sind die Bedingungen des Hilfssatzes von § 9 erfüllt. In beiden Fällen schliesst man, dass $G_{12g}(\vartheta)$ auf die Form gebracht werden kann:

$$(3) \qquad G_{12g}(\vartheta) = \vartheta_{14} \,.\, G_{12g-1}(\vartheta)$$

unter G_{12g-1} eine ganze Function $(12g-1)^{\text{ten}}$ Grades der Thetanullwerthe verstanden, welche für $\tau_{12} = 0$ noch mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}(g-1)$ unendlich klein wird. Wiederholte Anwendung desselben Schlusses führt zu dem Resultat:

$$G_{12g}(\vartheta) = (\Pi\,\vartheta)^g\, G_{2g}(\vartheta),$$

aus welchem sich sofort ergiebt:

$$(4) \qquad J_g = p_{12}^{-g}\, G_{2g}(\vartheta) = G_{2g}(\mathrm{Th}).$$

Damit ist die Umkehrung des Hauptsatzes bewiesen; wir sprechen sie noch einmal in ausdrücklicher Formulirung aus:

Jede in den Nullstellen von f rationale ganze Invariante g^{ten} Grades von f, welche mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}g$ unendlich klein wird,

*) Vgl. Grundz. § 23.

wenn drei Wurzeln von f in der angegebenen Weise zusammenrücken, lässt sich als ganze Function $(2g)^{ten}$ Grades der Th-Nullwerthe darstellen.

Wir fügen noch zwei analoge Sätze für die rationalen ganzen Invarianten von φ und ψ zu:

Eine rationale ganze Invariante g^{ten} Grades von φ und ψ, welche mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}g$ unendlich klein wird, wenn die drei Wurzeln von φ oder die drei von ψ in der angegebenen Weise zusammenrücken, ist gleich einer gebrochenen rationalen Function der Thetanullwerthe, deren Nenner eine Potenz des Products der neun von $\mathrm{Th}_{\varphi\psi}$ verschiedenen Thetanullwerthe ist.

Eine rationale ganze Invariante von φ und ψ, welche in den Coefficienten jeder von beiden Formen vom Grade g ist und mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}g$ unendlich klein wird, wenn irgend zwei Wurzeln von φ mit einer von ψ oder zwei von ψ mit einer von φ in der angegebenen Weise zusammenrücken, ist gleich einer gebrochenen rationalen Function der Thetanullwerthe, deren Nenner eine Potenz von $\mathrm{Th}_{\varphi\psi}$ ist.

§ 15.

Ganze Functionen der Thetanullwerthe, welche zugleich rationale symmetrische Invarianten von φ und ψ sind.

Wir gehen nun dazu über aus den Formen von § 2 solche Combinationen zusammenzustellen, welche dem engeren Rationalitätsbereiche II. Stufe angehören, der durch eine bestimmte Zerlegung $f=\varphi\psi$ gegeben ist. Die Aufstellung eines „vollen Systems“ solcher Formen würde zwar nicht ohne Interesse sein, ist aber für unsere Zwecke keineswegs erforderlich. Wir begnügen uns daher mit der Aufzählung der Formen der niedrigsten Grade; an solchen haben wir:

*zwei**) *Formen vom Grade* 8 *in den* Δ:

(1) $$\Delta^8$$

und:

*) Eine dritte, $\Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{21}^2 \Delta_{23}^2$, ist durch die beiden im Text genannten homogen und linear ausdrückbar, nämlich gleich:

$$\frac{3}{4}\Delta^8 - \frac{1}{4}\Sigma\Delta_{01}^8. -$$

Von den Formen 16^{ten} Grades sei:

$$\Delta^4 \Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{25}^2 \Delta_{45}^2 \Delta_{41}^2$$

angeführt.

(2) $$\Gamma = \sum_{(9)} \Delta_{01}^8;$$

eine Form vom Grade 12 in den Δ:

(3) $$3BD = \Delta^6 \sum_{(6)} \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{45}^2.$$

Die Summationen sind dabei jedesmal zu erstrecken über alle Permutationen einerseits der Indices 0, 2, 4 unter sich, andrerseits der Indices 1, 3, 5 unter sich, welche den betreffenden Summanden ändern; die hiernach sich ergebende Gliederanzahl ist jedesmal unter dem Summenzeichen in Klammern beigesetzt.

Was die den einzelnen Gliedern beigesetzten Vorzeichen betrifft, so ist darüber folgendes zu bemerken. Die hier mit Δ bezeichneten Grössen sind als Functionen der Wurzeln von φ und ψ zunächst nur bis auf vierte Einheitswurzeln definirt; man wird daher diese Einheitswurzeln so fixiren können, dass in allen Gliedern dasselbe Zeichen zu setzen ist. Das wird jedoch nicht diejenige Fixirung der Einheitswurzeln ergeben, welche aus der Definition der Δ durch die Thetanullwerthe folgt. Wie man im letzteren Fall die Zeichen der einzelnen Glieder zu wählen hat, davon wird in § 18 noch die Rede sein.

§ 16.

Beziehungen zwischen den in § 12 und den in § 15 erhaltenen Invarianten.

Um die durch Th-Nullwerthe ausgedrückten Invarianten des vorigen Paragraphen auf die Fundamentalinvarianten des § 12 zurückzuführen, wird man wohl am besten beide Arten durch die Wurzeln von φ und ψ ausdrücken. Man erhält zunächst, wenn man als Symbole der Linearfactoren ihre Ordnungszahlen benutzt:

$$6\,\varphi_x \varphi_y \varphi_z = \sum_{0,2,4} 0_x 2_y 4_z,$$

$$(\varphi\psi)^3 = (\varphi 1)(\varphi 3)(\varphi 5)$$

also:

(1) $$6(\varphi\psi)^3 = \sum_{0,2,4} (01)(23)(45);$$

ferner:

$$3(\varphi\varphi')^2 \varphi_x \varphi'_x = \sum_{0,2,4} (0\varphi')(2\varphi')\, 4_x \varphi'_x$$

und wenn man auch für das Symbol φ' Symbole der Wurzeln einführt:

$$18\,\Delta_x^2 = -\sum (02)^2 4_x^2 + 2\sum (02)(24) 0_x 4_x$$

oder (wegen:

$$(02)\,(24)\,0_x 4_x + (24)\,(40)\,2_x 0_x = -(24)^2\, 0_x^2):$$

(2) $$9\Delta_x^2 = -\sum_{0,2,4}(02)^2 4_x^2.$$

Ganz ebenso wird erhalten:

(3) $$9\nabla_x^2 = -\sum_{1,3,5}(13)^2 5_x^2.$$

und aus (2) und (3) folgt:

(4) $$162\,T = \sum_{(9)}(02)^2\,(13)^2\,(45)^2.$$

Endlich ist (vergl. Gordan-Kerschensteiner, Invariantentheorie, Bd. II, p. 101):

(5) $$R = \frac{1}{27}\,(02)^2\,(24)^2\,(40)^2;$$

(6) $$P = \frac{1}{27}\,(13)^2\,(35)^2\,(51)^2.$$

Andererseits werden die Invarianten von § 14:

(7) $$\Delta^8 = (02)^2(24)^2(40)^2(13)^2(35)^2(51)^2;$$

(8) $$\Gamma = \Sigma\Delta_{01}^8 = \Sigma(01)^2(12)^2(20)^2(34)^2(45)^2(51)^2;$$

(9) $$3BD = \Delta^6\,\Sigma \pm \Delta_{03}^2\Delta_{14}^2\Delta_{25}^2$$
$$= (02)^2(24)^2(40)^2.(13)^2(35)^2(51)^2.\Sigma(03)(05)(21)(25)(41)(43);$$

(10) $$\Delta^4\,\Sigma \pm \Delta_{01}^2\Delta_{03}^2\Delta_{23}^2\Delta_{25}^2\Delta_{45}^2\Delta_{41}^2$$
$$= (02)^2(24)^2(40)^2.(13)^2(35)^2(51)^2.(01)(03)(05)(21)(23)(25).(41)(43)(45)$$
$$.\Sigma(01)(23)(45).$$

Die Vergleichung beider Reihen von Formeln giebt dann die gesuchten Beziehungen in folgender Gestalt:

aus (5), (6) und (7):

(11) $$\Delta^8 = 729\,D;$$

aus (10) und (1):

(12) $$\Delta^4\,\Sigma \pm \Delta_{01}^2\Delta_{03}^2\Delta_{23}^2\Delta_{25}^2\Delta_{45}^2\Delta_{41}^2 = 6D\,.\,\mathfrak{R}\,.\,J = 6DE;$$

ferner müssen, unter $\alpha, \beta \ldots$ Zahlencoefficienten verstanden, Beziehungen folgender Gestalt bestehen:

(13) $$B = \alpha A + \beta T;$$

(14) $$\Gamma = \gamma A^2 + \delta AT + \zeta T^2 + \eta D + \varkappa E.$$

Die Coefficienten α, β in (13) bestimmt man leicht, indem man φ und ψ einmal als vollständige Cuben, das andere mal als identisch annimmt; man erhält:

(15) $$B = 2A - 9T.$$

Die Coefficienten von (14) werden wir im nächsten Paragraphen auf bequemere Weise finden, als es hier möglich wäre; doch sei der Vollständigkeit halber das Resultat beigefügt:

$$(15) \qquad \Gamma = 9B^2 + 1458\,D - 36\,E.$$

§ 17.

Reihenentwicklungen der Invarianten.

Die in den letzten Paragraphen abgeleiteten Formeln benutzen wir nun, um für unsere Invarianten Reihenentwicklungen nach Potenzen von:

$$p = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad r = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad s = q + q^{-1} = e^{\pi i \tau_{12}} + e^{-\pi i \tau_{12}}$$

zu erhalten. Zu diesem Zwecke müssen wir sie zunächst mit den nun schon mehrfach erwähnten transscendenten Zusatzfactoren multipliciren, welche erforderlich sind, damit wir auf der andern Seite statt der Th- die ϑ-Nullwerthe schreiben können; wir wollen der Kürze halber diese Factoren überall weglassen, was zu Verwechslungen keinen Anlass geben wird. Wir haben nur noch anzugeben (vgl. § 15 a. E.), wie die Vorzeichen der einzelnen Glieder zu bestimmen sind, wenn man die Thetanullwerthe einführt. Es geschieht diese Bestimmung wohl am bequemsten dadurch, dass man in den Ausdrücken der Invarianten durch die Wurzeln rückwärts die einzelnen Wurzeldeterminanten vermöge der Rosenhain'schen Differentialformeln (vgl. p. 401), in welchen das Vorzeichen sich aus den Anfangstermen der Entwicklungen ergiebt, durch Nullwerthe gerader Thetafunctionen ersetzt. Man erhält so z. B.

$$(1) \qquad B = \vartheta^{-2}\left\{\vartheta_{01}^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{45}^2 - \vartheta_{03}^2\vartheta_{25}^2\vartheta_{41}^2 - \vartheta_{05}^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{41}^2 - \vartheta_{01}^2\vartheta_{25}^2\vartheta_{43}^2 - \vartheta_{03}^2\vartheta_{21}^2\vartheta_{45}^2 + \vartheta_{05}^2\vartheta_{21}^2\vartheta_{43}^2\right\}.$$

Die Entwicklungen der einzelnen Glieder des Aggregats sind bis zu Gliedern 4. O. incl.:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{05}^2\vartheta_{21}^2\vartheta_{43}^2 &= 1 - 4(p+r) - 4(p^2+r^2) + 32pr + 32(p^3+r^3)\\
&\quad - 80(p^2r+pr^2) - 4(p^4+r^4) + 272p^2r^2\\
&\quad - 4prs^2 + \cdots;\\
-\vartheta_{01}^2\vartheta_{25}^2\vartheta_{43}^2 - \vartheta_{03}^2\vartheta_{21}^2\vartheta_{45}^2 &= -16(p+r) - 64(p^2+r^2) + 128pr - 128(p^3+r^3)\\
&\quad - 64(p^2r+pr^2) - 256(p^4+r^4) + 512p^2r^2 + \cdots;\\
-\vartheta_{05}^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{41}^2 &= 64pr - 256(p^2r+pr^2) - 16prs^2 + \cdots;\\
-\vartheta_{03}^2\vartheta_{25}^2\vartheta_{41}^2 &= 128pr - 64prs - 256(p^2rs+pr^2s) + \cdots;\\
+\vartheta_{01}^2\vartheta_{23}^2\vartheta_{45}^2 &= 128pr + 64prs + 256(p^2rs+pr^2s) + \cdots.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man für B folgende Entwicklung:

$$(2)\quad \begin{aligned} 3B = 1 &- 24(p+r) + 24(p^2+r^2) + 672pr - 96(p^3+r^3) \\ &- 3072(p^2r+pr^2) + 24(p^4+r^4) + 9600(p^3r+pr^3) \\ &+ 24384p^2r^2 - 24prs^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Ganz ebenso wird erhalten:

$$(3)\quad \begin{aligned} 729D = 1 &+ 16(p+r) + 112(p^2+r^2) + 192pr + 448(p^3+r^3) \\ &+ 896(p^2r+pr^2) + 1136(p^4+r^4) + 1792(p^3r+pr^3) \\ &+ 1792p^2r^2 + 16prs^2 + \cdots; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} \Gamma = 3 &- 16(p+r) + 848(p^2+r^2) - 192pr - 448(p^3+r^3) \\ &- 896(p^2r+pr^2) + 7504(p^4+r^4) - 1792(p^3r+pr^3) \\ &+ 13568p^2r^2 - 16prs^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Solche Reihenentwicklungen können übrigens auch für solche Invarianten erhalten werden, deren Ausdruck durch die Thetanullwerthe eine Potenz von Δ (ohne Index) im Nenner hat; dieselben werden aber nicht für alle Werthe convergiren, für welche die bekannten Bedingungen (Grundz. (11)) erfüllt sind, sondern nur innerhalb eines engeren Bereichs. Als Beispiel führen wir neben B an:

$$(5)\quad 6E = 512pr\{1 - 12(p+r) + 68(p^2+r^2) + 256pr + \cdots\};$$

die Vergleichung der Reihenentwicklungen giebt die Identität (15) des § 16.

V.

Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische durch Transformation dritten Grades.

§ 18.

Die Entwickelungen von Goursat.

In diesem Abschnitt soll *die Bedingung* discutirt werden, *welche die Moduln eines hyperelliptischen Gebildes* ($p=2$) *erfüllen müssen, wenn eines der zu demselben gehörigen Integrale I. Gattung durch Transformation dritten Grades auf ein elliptisches soll zurückgeführt werden können.* In transscendenter Form lautet diese Bedingung nach den Herren Weierstrass*) und Picard**) folgendermassen:

*) Man vergl. die Mittheilungen von Herrn Königsberger, Cr. J. Bd. 67, p. 72, (1867) und von Frau v. Kowalevski Acta math. Bd. 4, p. 394, (1884).

**) Bull. de la soc. math. de France Bd. 11, p. 25 (1883).

Es muss zu dem hyperelliptischen Gebilde ein System von Thetamoduln gehören, in welchem:

$$\tau_{12} = \frac{1}{3}$$

ist.

Alsdann führt nämlich Transformation dritter Ordnung auf $\tau_{12} = 1$ und hierauf lineare Transformation auf $\tau_{12} = 0$, also auf den §§ 7, 8 behandelten Fall.

In *algebraischer* Form hat Herr Goursat*) das Problem behandelt; es sei gestattet seinen Gedankengang hier in einer solchen Form zu reproduciren, dass die invariante Natur der Ueberlegungen hervortritt.

Herr Goursat kehrt die Fragestellung um, indem er von dem elliptischen Integral:

(1) $$\int \frac{(x\,dx)}{\sqrt{(\lambda' x)(\lambda'' x)(\lambda''' x)(\lambda^{IV} x)}}$$

ausgeht, das durch die Transformation:

(2) $$x_1 : x_2 = \varphi_t^3 : \chi_t^3$$

in ein hyperelliptisches Integral I. Ordnung verwandelt werden soll. Er untersucht, wie zu einer gegebenen Transformation (2) die Werthe der λ in (1) so bestimmt werden können, dass das eintritt, und in welcher Weise das entstehende hyperelliptische Integral specialisirt ist.

Wird die Substitution (2) an der Wurzelgrösse in (1) vorgenommen, so wird dieselbe zunächst übergeführt in die Quadratwurzel aus einer Form 12ten Grades in t_1, t_2:

(3) $$(\lambda_1'\chi - \lambda_2'\varphi)(\lambda_1''\chi - \lambda_2''\varphi)(\lambda_1'''\chi - \lambda_2'''\varphi)(\lambda_1^{IV}\chi - \lambda_2^{IV}\varphi).$$

Soll von dieser nur ein Factor sechsten Grades unter dem Wurzelzeichen stehen bleiben; so kann — unter Voraussetzung allgemeiner φ, χ — ganz wie in art. 4. der Fundamenta Nova geschlossen werden, dass drei von den vier Klammerfactoren in (3) Doppelwurzeln besitzen müssen. In dem Büschel von cubischen Formen $\lambda_1\chi - \lambda_2\varphi$ sind aber überhaupt nur 4 Formen mit Doppelwurzeln enthalten; man findet ihre Parameter, indem man die Discriminante des Büschels $R_{\lambda_1\chi - \lambda_2\varphi}$ gleich Null setzt. Die Doppelwurzeln selbst sind dann zugleich einfache Wurzeln der Functionaldeterminante

(4) $$\Theta_x^4 = (\varphi\chi)\varphi_x^2\chi_x^2;$$

die ausserdem noch vorhandenen einfachen Wurzeln derselben vier Formen sind Wurzeln einer andern Combinante des Büschels, die wir mit K_x^4 bezeichnen wollen. Um dieselbe durch die fundamentalen

*) Bull. soc. math. Bd. 13, p. 155, (1885).

Covarianten auszudrücken, gehen wir aus von der Covariante des Herrn Cayley:

$$(5)\qquad \frac{\varphi_x^3 \chi_y^3 - \varphi_y^3 \chi_x^3}{(xy)} = 3\Theta_x^2\Theta_y^2 + \frac{1}{2}J\,.\,(xy)^2,$$

deren Verschwinden aussagt, dass x und y Wurzeln einer und derselben Form des Büschels sind. Ist nun x eine Wurzel von K_x^4, so hat die Form (5) zwei gleiche Wurzeln y; unsere Combinante K_x^4 ist also nichts anderes als die Discriminante der als quadratische Form in y_1, y_2 betrachteten Form (5). So findet man:

$$(6)\qquad K_x^4 = 9(\Theta\Theta')^2\Theta_x^2\Theta_x'^2 + 3J\Theta_x^4.$$

Die drei Factoren mit Doppelwurzeln in (3) liefern also unter das neue Wurzelzeichen einen cubischen Factor ψ_t^3 der Combinante (6), während der vierte Factor von (3), also irgend eine Form des Büschels, noch ausserdem darunter steht. Das Resultat des Herrn Goursat kann also folgendermassen ausgesprochen werden:

Wird durch die Substitution (2) *ein elliptisches Integral in ein hyperelliptisches* ($p=2$) *verwandelt, so erscheint die dem letzteren zu Grunde liegende Form* 6^{ten} *Grades als Product aus zwei cubischen Factoren, nämlich irgend einer Form des Büschels* $\lambda_1\chi - \lambda_2\varphi$ *und einem cubischen Factor* ψ *der Combinante* (6) *desselben.*

Ist also von den beiden cubischen Factoren φ_3, ψ_3 der f_6 der eine φ gegeben, so kann der andere ψ noch auf zweifach unendlich viele Weisen so bestimmt werden, dass die Form f_6 eine Form der verlangten Art ist, entsprechend den zweifach unendlich vielen Büscheln $\lambda_1\chi - \lambda_2\varphi$, welchen φ angehört.

Wollte man von diesem Ansatz aus zu der Invariantenrelation gelangen, welche erfüllt sein muss, wenn zwei Formen φ, ψ in der angegebenen Beziehung zu einander stehen sollen, so würde man folgendermassen zu verfahren haben. Man müsste zunächst die Relation aufsuchen, welche die Combinante K mit irgend einer Form φ des Büschels verknüpft; dieselbe wird darin bestehen, dass eine Covariante von K und φ identisch verschwindet. Hierauf müsste man K ersetzen durch das Product aus ψ_x^3 und einer linearen Hilfsform a_x, und endlich müsste man die Coefficienten der letzteren eliminiren.

Die Frage erweist sich demnach als nahe verwandt mit der von Herrn C. Stephanos*) behandelten nach den Beziehungen zwischen den Formen eines Büschels und der Functionaldeterminante desselben. Indessen würde hier die Durchführung doch grösseren Rechnungsaufwand erfordern, und es soll daher von derselben abgesehen werden.

---

*) Sur les faisceaux des formes binaires ayant même Jacobienne, (mém. sav. étr. t. 27, No. 7) p. 27, p. 40.

Herr Goursat gewinnt die gesuchte Relation in einfacher Gestalt durch Einführung eines irrationalen kanonischen Coordinatensystems. Er verlegt zunächst den Coordinatengrundpunkt $t_2 = 0$ in den Doppelpunkt der vierten (nicht benutzten) Form des Büschels, welche einen solchen besitzt, und wählt dann den Coordinatengrundpunkt $t_1 = 0$ so, dass in*):

$$\varphi = t_1^3 + 3at_1t_2^2 + b_2t^3 \tag{7}$$

kein Glied mit $t_1^2t_2$ auftritt, also:

$$\varphi_1^2\varphi_2 = 0 \tag{8}$$

wird. Wird dann derjenige Linearfactor, dessen Product mit t_2^2 eine Form des Büchels ist,

$$t_1 - pt_2$$

genannt, so wird die Combinante K_t^4:

$$(t_1 - pt_2)\left(t_1^3 + 3pt_1^2t_2 + (4b + 12ap)t_2^3\right),$$

sodass wir erhalten:

$$\psi_t^3 = t_1^3 + 3pt_1^2t_2 + (4b + 12ap)t_2^3. \tag{9}$$

Es tritt demnach in ψ kein Glied mit $t_1t_2^2$ auf; diese Eigenschaft — die durch:

$$\psi_1\psi_2^2 = 0 \tag{10}$$

sich ausdrückt — kann nun dazu dienen, in Verbindung mit (18) das benutzte Coordinatensystem in von χ unabhängiger Weise zu definiren. So gelangt Herr Goursat zu dem Resultat:

Wird:

$$q = 4b + 12ap, \tag{11}$$

wenn die beiden cubischen Formen auf die kanonischen Formen:

$$\begin{cases} \varphi = t_1^3 & + 3at_1t_2^2 + bt_2^3 \\ \psi = t_1^3 + 3pt_1^2t_2 & + qt_2^3 \end{cases} \tag{12}$$

gebracht werden, so gehört das Product $\varphi\psi = f_6$ zu einem hyperelliptischen Gebilde der verlangten Eigenschaft;

und umgekehrt:

wenn letzteres der Fall sein soll, so muss es möglich sein, die beiden Formen so in die kanonischen Formen (12) *zu bringen, dass die Bedingung* (11) *erfüllt ist.*

---

*) Abweichend von Goursat schreiben wir die Formen mit Binomialcoefficienten.

§ 19.

Ausdruck der Goursat'schen Bedingung durch die Fundamentalinvarianten.

Da zwei cubische Formen auf *fünf* verschiedene Weisen auf die Normalformen (12) des § 18 gebracht werden können, so ist die nach Herrn Goursat entwickelte Gestalt der gesuchten Bedingung eine *irrationale*. Für die hier ins Auge gefassten Anwendungen derselben erscheint es aber als durchaus wünschenswerth, sie auch in *rationaler* Form zu besitzen. Um diese rationale Form zu erhalten, beginnen wir damit, dass wir für die Grundpunkte jenes irrationalen kanonischen Coordinatensystems die Zeichen z, u einführen; dann lautet das Resultat des § 18:

Um die gesuchte Bedingung zu erhalten, bestimme man (vergl. § 18, (8), (10)) z, u aus den beiden Gleichungen*):

$$\varphi_z^2 \varphi_u = 0, \tag{1}$$

$$\psi_z \psi_u^2 = 0 \tag{2}$$

und führe (vgl. § 18, 11) die erhaltenen Werthe ein in die Gleichung:

$$-\varphi_z^3 \cdot \psi_u^3 + 4\varphi_u^3 \cdot \psi_z^3 + 12\varphi_z \varphi_u^2 \cdot \psi_z^2 \psi_u = 0. \tag{3}$$

Das heisst aber nichts anderes als:

Unsere Bedingung ist zugleich die Bedingung dafür, dass die drei Gleichungen (1), (2), (3) *gleichzeitig bestehen können.*

(Diese Formulirung zeigt übrigens, dass *die gesuchte Bedingung*, trotz der Bevorzugung von φ beim ersten Ansatz, *Vertauschung von φ und ψ zulassen muss***); denn werden gleichzeitig φ mit ψ, z mit u vertauscht, so geht (1) in (2), (2) in (1) über, während (3) ungeändert bleibt).

Die gesuchte Invariante, welche gleich Null gesetzt unsere Bedingung liefert, muss sonach als Factor in dem Resultat der Elimination von u und z aus den Gleichungen (1), (2), (3) enthalten sein. In demselben wird jedoch noch ein anderer Factor auftreten: die Gleichungen werden nämlich, sobald φ, ψ einen Linearfactor (αt) gemein haben, dadurch befriedigt, dass man:

$$u = z = \alpha$$

setzt. Jenes Eliminationsresultat wird daher eine Potenz der *Resultante* von φ und ψ zum Factor haben; dieser Factor aber ist unserer

*) Da aus (1) und (2) durch Elimination von u folgt:

$$(\varphi\psi)(\varphi'\psi)\varphi_z^2 \varphi_z'^2 \psi_z = 0,$$

so erhält man in der That fünf Lösungen, wie oben behauptet wurde.

**) Vgl. Goursat a. a. O.

Aufgabe fremd, welche ein eigentliches hyperelliptisches Gebilde zur Voraussetzung hat.

Man kann aber aus den zunächst vorliegenden Gleichungen andere ableiten, deren Resultante diesen fremden Factor nicht mehr besitzt, indem man zunächst Gleichungen herstellt, deren linke Seiten die Determinante (uz) zum Factor haben, und dann von diesem Factor absieht. Dies gelingt auf folgende Weise. Man multiplicire (1) mit ψ_u^3, (2) mit $(\varphi_z \varphi_u^2)$; die Differenz der linken Seiten wird dann, nach Umformung vermöge der bekannten Fundamentalidentität der symbolischen Rechnung, durch (uz) theilbar, und man erhält:

$$(4) \qquad (\varphi\psi)\varphi_z\varphi_u\psi_u^2 = 0.$$

Wird ferner von der linken Seite von (3) das 15-fache Product der linken Seiten von (1) und (2) subtrahirt, so erhält man nach Beseitigung von (uz):

$$(5) \qquad (\varphi\psi)\varphi_z^2\psi_u^2 + 4(\varphi\psi)\varphi_u^2\psi_z^2 + 16(\varphi\psi)\varphi_z\varphi_u\psi_z\psi_u = 0.$$

Endlich kann man (uz) noch einmal beseitigen, wenn man unter Einführung eines Hilfspunkts v die linke Seite von (4) mit $21(vz)$, die von (5) mit (uz) multiplicirt und die Differenz bildet; man erhält so:

$$(6) \quad (\varphi\psi)\varphi_z\psi_u^2\varphi_v + 20(\varphi\psi)\varphi_z\varphi_u\psi_u\psi_v + 4(\varphi\psi)^2\varphi_u\psi_z \,.\, (uv) = 0,$$

und zwar für beliebige Werthe des v.

Wird hier z mit Hilfe von (2) eliminirt, so gelangt man zu dem Resultat:

Die gesuchte Invariante ist auch als Factor in dem Resultat der Elimination von u aus den beiden Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} &(\varphi\psi)(\varphi\psi')\varphi_v\psi_u^2\psi_u'^2 + 20(\varphi\psi)\varphi_u\psi_u\psi_u'^2\psi_v \\ &\qquad + 4(\varphi\psi)^2(\psi\psi')\varphi_u\psi_u'^2 \,.\, (uv) = 0, \\ &(\varphi\psi)(\varphi\psi')\varphi_w\psi_u^2\psi_u'^2 + 20(\varphi\psi)\varphi_u\psi_u\psi_u'^2\psi_w \\ &\qquad + 4(\varphi\psi)^2(\psi\psi')\varphi_u\psi_u'^2 \,.\, (uw) = 0 \end{aligned}$$

enthalten, in welchen v, w zwei beliebige Hilfspunkte bedeuten.

Wird $v = w$, so werden alle Wurzeln der beiden Gleichungen (7) paarweise gleich, das Eliminationsresultat wird also $(vw)^4$ als Factor enthalten, während der andere Factor von v und w unabhängig ist. Dieser letztere Factor aber muss seinerseits noch einen unserer Aufgabe fremden Factor enthalten, wie das eintritt, wenn, wie hier geschehen, die Elimination von zwei Unbekannten aus drei Gleichungen in der Weise ausgeführt wird, dass man zuerst die eine und dann die andere eliminirt. Welches dieser fremde Factor sein wird, zeigt hier folgende einfache Ueberlegung: Die Resultante der beiden Gleichungen (7) wird vom 8. Grad in den Coefficienten von φ, vom 16. in denjenigen

von ψ. Mit Rücksicht auf die Symmetrie unserer Bedingung folgt hieraus, dass ein Factor 8. Grades in den Coefficienten von ψ sich abspalten muss. Andererseits aber sind zur Ableitung der Gleichungen (7) nur *rationale invariantive* Operationen benutzt worden; jener Factor muss also ebenfalls eine rationale Invariante von φ sein. Da nun jede rationale Invariante von ψ eine Potenz der Discriminante dieser Form ist, so folgt:

Die Resultante der beiden Gleichungen (7) *enthält als unserer Aufgabe fremden Factor das Quadrat der Discriminante von* ψ*).

Man könnte nun den Ausdruck der gesuchten Invariante durch die Fundamentalinvarianten von φ und ψ dadurch erzwingen, dass man die Resultante der beiden biquadratischen Formen (7) berechnete und durch geeignete Umformung die fremden Factoren zum expliciten Auftreten brächte, sodass man sie beseitigen könnte. Man kann aber auch — und das wollen wir ausführen — für irgend eine geeignete Normalform der beiden Formen φ, ψ die Gleichungen (7) aufstellen und ihre Resultante etwa nach der Methode von Bézout als explicite Function der Coefficienten berechnen. Andererseits lässt sich jede symmetrische Simultaninvariante 8. Grades homogen und linear zusammensetzen aus einer Anzahl von Producten der Fundamentalinvarianten (§ 12); die numerischen Coefficienten dieses Ausdrucks werden sich für unsere Invariante bestimmen lassen, wenn man nur eine (verhältnissmässig kleine) Anzahl Glieder derselben kennt.

§ 20.

Ausführung der Berechnung.

Zur wirklichen Ausführung der Berechnung scheint die von Herrn Goursat benutzte Normalform (vgl. § 18) ganz geeignet. Es werde also wieder — wir kehren zu unhomogener Schreibweise zurück:

$$\varphi = t^3 + 3at + b,$$
$$\psi = t^3 + 3pt^2 + q$$

gesetzt; dann treten an Stelle von § 19, (4) und (5) die Gleichungen:

$$(1)\qquad psu^3 - asu^2 - au^3 + (-2ap + q)su + (-ap - b)u^2 - 2bpu + aq = 0;$$

$$(2)\qquad -21ps^2u^2 + 24as^2u + 18asu^2 + (-q + 4b + 12ap)s^2 + (36ap + 16b - 16q)su + (15ap - 4q + b)u^2 + 24bps + 18bpu - 21aq = 0.$$

Nun werde von den beiden Hilfspunkten v, w der eine nach 0, der andere nach ∞ verlegt; dann treten an Stelle von § 19, (7) die folgenden beiden Gleichungen:

*) Dass weiter kein fremder Factor mehr auftritt, wird sich p. 419 ergeben.

$$(3)\quad \begin{aligned} &(21a + 21p^2)\,u^4 + (24ap + 20b + 4q)\,u^3 + (60bp + 30pq)\,u^2 \\ &\qquad + (48bp^2 - 24aq)u + (-12apq - 4bq + q^2) = 0, \\ &(b - 4q + 18ap)\,u^4 + (24bp + 12pq)\,u^3 + (-18aq + 36bp^2)\,u^2 \\ &\qquad + (20q^2 + 4bq - 72apq)\,u = 0. \end{aligned}$$

Die Resultante dieser beiden Gleichungen enthält nach Entfernung des Quadrats der Discriminante von ψ und nach Division mit 21 an Gliedern, welche keine höhere Potenz von a oder p als die zweite enthalten, die folgenden:

$$\begin{aligned} &-256b^8 - 2560b^7q - 2848b^6q^2 + 38528b^5q^3 + 111419b^4q^4 + 38528b^3q^5 \\ &\qquad - 2848b^2q^6 - 2560bq^7 - 256q^8 \\ &+ ap\{6144b^7 + 62976b^6q + 104832b^5q^2 - 245280b^4q^3 - 2112b^3q^4 \\ &\qquad - 14112b^2q^5 + 70656bq^6 + 16896q^7\} \\ &+ a^2p^2\{-41472b^6 - 456192b^5q - 277344b^4q^2 + 388800b^3q^3 \\ &\qquad + 1692576b^2q^4 - 912384bq^5 - 393984q^6\}; \end{aligned}$$

sie enthält keine Glieder, welche keine höhere Potenz von b oder q als die erste enthalten.

Andererseits existiren (vgl. p. 399) *fünfzehn* linear-unabhängige symmetrische Invarianten 8. Grades; wird zur Vereinfachung

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(D - T^2)$$

statt T^2 benutzt, so erhält man für dieselben an Gliedern der ersterwähnten Art die folgenden:

1. $J^8 = (b - q)^8 - 24ap(b - q)^7 + 252a^2p^2(b - q)^6;$

2. $$\begin{aligned} J^6T = &-(b - q)^6\,bq \\ &+ ap\{20b^6q - 102b^5q^2 + 210b^4q^3 - 220b^3q^4 + 120b^2q^5 \\ &\qquad - 30bq^6 + 2q^7\} \\ &+ a^2p^2\{2b^6 - 183b^5q + 750b^4q^2 - 1210b^3q^3 + 930b^2q^4 \\ &\qquad - 327bq^5 + 38q^6\}; \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} J^5\Omega = &\,ap\{b^6q - 6b^5q^2 + 15b^4q^3 - 20b^3q^4 + 15b^2q^5 - 6bq^6 + q^7\} \\ &+ a^2p^2\{b^6 - 18b^5q + 75b^4q^2 - 140b^3q^3 + 135b^2q^4 \\ &\qquad - 66bq^5 + 13q^6\}; \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} J^4D = &\,b^6q^2 - 4b^5q^3 + 6b^4q^4 - 4b^3q^5 + b^2q^6 \\ &+ ap\{-12b^5q^2 + 36b^4q^3 - 36b^3q^4 + 12b^2q^5\} \\ &+ a^2p^2\{54b^4q^2 - 108b^3q^3 + 54b^2q^4\}; \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} J^4\varepsilon = &\,ap\{b^5q^2 - 4b^4q^3 + 6b^3q^4 - 4b^2q^5 + bq^6\} \\ &+ a^2p^2\{b^5q - 17b^4q^2 + 46b^3q^3 - 46b^2q^4 + 17bq^5 - q^6\}; \end{aligned}$$

6. $J^3\Omega T = ap\{-b^5q^2 + 4b^4q^3 - 6b^3q^4 + 4b^2q^5 - bq^6\}$
$+ a^2p^2\{-b^5q + 12b^4q^2 - 32b^3q^3 + 34b^2q^4 - 15bq^5 + 2q^6\};$

7. $J^2TD = -b^5q^3 + 2b^4q^4 - b^3q^5$
$+ ap\{8b^4q^3 - 10b^3q^4 + 2b^2q^5\}$
$+ a^2p^2\{2b^4q^2 - 25b^3q^3 + 14b^2q^4\};$

8. $J^2T\varepsilon = ap\{-b^4q^3 + 2b^3q^4 - b^2q^5\}$
$+ a^2p^2\{-b^4q^2 + 11b^3q^3 - 13b^2q^4 + 3bq^5\};$

9. $J^2\Omega^2 = a^2p^2\{b^4q^2 - 4b^3q^3 + 6b^2q^4 - 4bq^5 + q^6\};$

10. $J\Omega D = ap\{b^4q^3 - 2b^3q^4 + b^2q^5\}$
$+ a^2p^2\{b^4q^2 - 2b^3q^3 + b^2q^4\};$

11. $J\Omega\varepsilon = a^2p^2\{b^3q^3 - 2b^2q^4 + bq^5\};$

12. $\Omega^2 T = a^2p^2\{-b^3q^3 + 2b^2q^4 - bq^5\};$

13. $D^2 = b^4q^4;$

14. $D\varepsilon = ap\cdot b^3q^4 + a^2p^2(b^3q^3 - b^2q^4);$

15. $\varepsilon^2 = a^2p^2b^2q^4.$

Es enthält also $J\Omega\varepsilon + \Omega^2 T$ nur Glieder, welche mindestens den Cubus von a oder den von p zum Factor haben; ausserdem aber hat keine lineare Combination der 15 Invarianten diese Eigenschaft. Man kann also durch Coefficientenvergleichung aus den angegebenen Gliedern allein schon schliessen, dass die gesuchte Invariante sich nur um ein Vielfaches von $J\Omega\varepsilon + \Omega^2 T$ von der folgenden unterscheidet:

$$\begin{aligned}(4)\quad & -256J^8 + 4608J^6T + 13824J^5\Omega - 23328J^4D - 248832J^3\Omega T \\ & -186624J^2\Omega^2 - 209952J\Omega D + 839808J\Omega T^2 + 177147D^2.\end{aligned}$$

Um jenes Vielfache zu bestimmen, berücksichtige man, dass in dem Eliminationsresultat keine Glieder vorkommen, welche in b und q von der 0^{ten} oder 1^{ten} Dimension sind, während an solchen Gliedern in den in (4) vorkommenden Invarianten auftreten:

$$\begin{aligned}
J^8 &= 6561a^8p^8 + 17496a^7p^7(-b + q);\\
J^6T &= 1458a^8p^8 + a^7p^7(-2916b + 4374q);\\
J^5\Omega &= 243a^8p^8 + a^7p^7(-648b - 81q) - 243a^8p^5q;\\
J^4D &= a^7p^7(1296q);\\
J^3\Omega T &= 54a^8p^8 + a^7p^7(-108b) - 54a^8p^5q;\\
J\Omega D &= a^7p^7(48q);\\
J\Omega T^2 &= 12a^8p^8 + a^7p^7(-16b + 4q) - 12a^8p^5q;\\
D^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Invariante (4) enthält somit an solchen Gliedern:

$$3359232\,a^8p^8 + 0\cdot a^7p^7b - 16796160\,a^7p^7q + 3359232\,a^8p^5q,$$

$J\Omega\varepsilon + \Omega^2T$ enthält dagegen:

$$-a^8p^8 + 0\cdot a^7p^7b + 5a^7p^7q - a^8p^5q;$$

also hat man zu (23) noch:

$$3359232(J\Omega\varepsilon + \Omega^2T)$$

hinzuzufügen, um unsere Invariante zu erhalten. Thut man das und führt vermöge Glchg. (7) des § 12 statt Ω die Resultante $\mathfrak{R}$ ein, so gelangt man zu folgendem endgültigen Ausdruck unserer Invariante:

$$(5)\qquad G_8 = 3^{11}D^2 + 2^5 3^6 DE - 2^8E^2 + 2^9 3^2 ZT.$$

In der That, da zwischen D, E, Z, T keine Relation besteht, so kann dieser Ausdruck G_8 nicht in Factoren zerlegt werden, welche ebenfalls rationale ganze Invarianten von φ, ψ wären. Wir können also sicher sein, dass wir alle fremden Factoren entfernt haben, und haben damit das Resultat:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein zu dem hyperelliptischen Gebilde $(x, \sqrt{f(x)})$ gehörendes Integral durch eine Transformation III. Grades, welche zu der Zerlegung $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ in ausgezeichneter Beziehung steht, auf ein elliptisches reducirt werden könne, ist die, dass die Simultaninvarianten von φ und ψ die Relation $G_8 = 0$ befriedigen.

VI.

Allgemeine Theorie der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$.

§ 21.

Einleitende Bemerkungen, insbesondere über die Wahl der Unbekannten.

In § 48 der Grundzüge ist als eine der Gestalten, in welchen das specielle Transformationsproblem seinen algebraischen Ausdruck finden kann, die der *Multiplicatorgleichung* genannt: einer Gleichung, deren Wurzel der transformirte Werth einer Modulform ist. Auch ist dort § 28 auseinandergesetzt, weshalb es vortheilhaft scheint, für die wirkliche Aufstellung solcher Gleichungen an Formen *zweiter* Stufe anzuknüpfen. *Welche* Form zweiter Stufe man aber als Wurzel der Multiplicatorgleichung wählt, das ist, vom principiellen Standpunkt aus betrachtet, ganz gleichgiltig; man ist daher berechtigt, ausschliesslich Rücksichten auf möglichst leichte Ausführbarkeit der Rechnungen für diese Wahl ausschlaggebend sein zu lassen. Diese Rücksichten bedingen aber, dass wir schon in der Wahl der Wurzel möglichst engen Anschluss an die *Thetafunctionen* suchen. Dadurch sind wir darauf hingewiesen, als Wurzel der Multiplicatorgleichung,

welche wir discutiren wollen, *eine Potenz des Th-Nullwerthes*, also der achten Wurzel aus dem Discriminantenproduct $\Delta_\varphi \Delta_\psi$, zu Grunde zu legen. Für die wirkliche Durchführung der Rechnungen wird man dann vom *Th*-Nullwerth zum Thetanullwerth übergehen, indem man mit der Quadratwurzel aus der ersten Periodendeterminante und mit einem numerischen Factor multiplicirt; für die allgemeine Untersuchung der Eigenschaften der Gleichung aber wird es durchaus zweckmässig sein, von diesem Zusatzfactor zunächst abzusehen und bei dem algebraischen Bestandtheil des Thetanullwerthes, also dem *Th*-Nullwerth, stehen zu bleiben.

Ist das nun entschieden, so wird man weiter festsetzen müssen, welche Potenz dieser Grösse man wählen will. Der *Th*-Nullwerth selbst, also die achte Wurzel aus dem Discriminantenproduct, ist keine eindeutige Form der Perioden und aus diesem Grunde unzweckmässig. Greift man andererseits zu höheren Potenzen, so nehmen auch die Grade der Coefficienten in entsprechendem Masse zu, was man gleichfalls wird vermeiden wollen. Schon diese vorläufige Ueberlegung führt somit dazu, *die vierte Wurzel aus dem Discriminantenproduct, also das Quadrat des Th-Nullwerthes, in's Auge zu fassen;* eine Wahl, deren Zweckmässigkeit sich im Folgenden noch weiter bestätigen wird*).

Für die Untersuchung der Eigenschaften dieser Gleichung ist es nun zweckmässig, derselben noch einige andere Formen zu ertheilen und die Fragen, welche in dieser Richtung gestellt werden können, je nach ihrer Natur theils an dieser, theils an jener Form zur Entscheidung zu bringen. Es sollen daher, wenn mit D das ursprüngliche, mit $\bar{D}$ das transformirte Discriminantenproduct bezeichnet wird, im Folgenden neben einander die Gleichungen betrachtet werden, welchen:

$$\sqrt{\bar{D}}; \quad \sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D}}; \quad \sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$$

genügen, unter n den Transformationsgrad verstanden*). Wie man von einer dieser Gleichungen zu den andern übergeht, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung.

Wir beschränken uns übrigens hier wie schon in Abschnitt III auf den Fall, dass n *eine ungerade Primzahl* ist.

§ 22.

Rationalitätsbereich der Coefficienten unserer Gleichung.

Die Form $\sqrt{\bar{D}}$ ist (vergl. § 2) von der vierten Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf zweite Einheits-

*) Es entspricht dies auch dem ursprünglichen Ansatz von Jacobi für die elliptische Multiplicatorgleichung.

wurzeln adjungirt. Sie erfüllt also die Bedingungen des Schlusssatzes von § 11 für $s = 4$, $\delta = 2$, $\frac{s}{\delta} = 2$ (da wir n wie gesagt als ungerade voraussetzen), und wir haben daher zunächst das Resultat*):

Die $(n+1)(n^2+1)$ *Werthe von* $\sqrt[4]{\frac{\mathsf{D}}{D}}$ *genügen einer Gleichung des Grades* $(n+1)(n^2+1)$, *deren Coefficienten der zweiten Stufe angehören.*

Da $\sqrt{D^{n-1}}$ eine Modulform II. Stufe ist, folgt weiter:

Dasselbe gilt für: $\sqrt[4]{\frac{\mathsf{D}}{D^n}}$.

Aber $\sqrt{D}$ bleibt auch ungeändert bei gewissen mod. 4 definirten, aber nicht mod. 4 zur Identität congruenten Operationen und ändert sich bei gewissen mod. 2 definirten, aber nicht mod. 2 zur Identität congruenten Operationen nur um vierte Einheitswurzeln. Hieran anknüpfend werden wir den Rationalitätsbereich, welchem die Coefficienten unserer Gleichung angehören müssen, noch weiter einschränken können. Wir gehen dabei aus von der Bemerkung, dass die Untergruppe II. Stufe, zu welcher D gehört und $\sqrt{D}$ adjungirt ist, dadurch erzeugt werden kann, dass man zu der Principaluntergruppe II. Stufe noch drei weitere Operationen hinzunimmt. Die Gruppe von D ist nämlich mit der Gruppe derjenigen Vertauschungen der Verzweigungspunkte von f, welche die Zerlegung $f = \varphi_3 \psi_3$ ungeändert lassen, in der Weise meroedrisch isomorph, dass der Principaluntergruppe II. Stufe in jener die Identität in dieser zugeordnet ist. Diese Permutationsgruppe aber kann ihrerseits aus drei Operationen erzeugt werden, nämlich aus zwei geeigneten Umsetzungen der Verzweigungspunkte von φ unter sich und aus der Vertauschung von φ mit ψ. Also kann auch die Gruppe von D erzeugt werden aus der Principaluntergruppe II. Stufe und aus irgend drei Operationen, welche die drei erwähnten Umsetzungen der Verzweigungspunkte mit sich bringen. Wenn wir also das Verhalten der Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung bei drei bestimmten solchen Periodentransformationen kennen, so reicht das in Verbindung mit dem zu Beginn des Paragraphen bereits ausgesprochenen Resultat hin, um das Verhalten unserer Coefficienten bei irgend einer Operation der Untergruppe, zu welcher D gehört, angeben zu können.

Solche drei Operationen aber sind bereits Grundz. § 8 zu finden; nämlich (wenn wir die durch die Verschiedenheit des zu Grunde ge-

---

*) Dasselbe findet sich p. 199 des in der Einleitung citirten Werkes von Krause; in nicht so bestimmter Form vorher in der ebendaselbst erwähnten Abhandlung von Wiltheiss p. 34.

legten Querschnittssystems (vgl. § 1) bedingten Abänderungen vornehmen): *)

(1) B: (02) , d.i. $\omega_1' = -\omega_3$, $\omega_2' = \omega_2$, $\omega_3' = \omega_1$, $\omega_4' = \omega_4$;

(2) C:(01)(25)(43), d.i. $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$, $\omega_3' = \omega_3$, $\omega_4' = \omega_4 - \omega_3$;

(3) D:(05)(23)(41), d.i. $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$, $\omega_3' = \omega_4$, $\omega_4' = \omega_3$.

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass diese drei Vertauschungen der Verzweigungspunkte zur Erzeugung der erwähnten Gruppe ausreichen; man erhält z. B. sofort:

$$E = DCBCD = (04);$$

und aus B, C, E entsteht die Permutationsgruppe nach ihrer Definition.

Für unsern Zweck dürfen übrigens die Periodentransformationen B, C, D durch irgend welche andere ersetzt werden, welche mod. 2 zu ihnen congruent sind. Wir wollen sie ersetzen durch die folgenden drei, welche mod. n zur Identität congruent sind:

$$(4)\quad \begin{aligned} B' : \omega_1' &= (1+n)\,\omega_1 + n\omega_3, & \omega_2' &= \omega_2, \\ \omega_3' &= -n\omega_1 + (1-n)\,\omega_3, & \omega_4' &= \omega_4; \end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned} C' : \omega_1' &= \omega_1 + n\omega_2, & \omega_3' &= \omega_3, \\ \omega_2' &= \omega_2, & \omega_4' &= \omega_4 - n\omega_3, \end{aligned}$$

$$(6)\quad \begin{aligned} D' : \omega_1' &= (1+n)\,\omega_1 + n\omega_2, & \omega_3' &= (1-n)\,\omega_3 + n\omega_4, \\ \omega_2' &= -n\omega_1 + (1-n)\,\omega_2, & \omega_4' &= -n\omega_3 + (1+n)\,\omega_4. \end{aligned}$$

Jeder von ihnen entsprechen Substitutionen der transformirten Perioden ϖ, welche zufolge § 11, Glchg. (7) alle unter sich mod. 2 congruent sind, und von welchen es daher genügt, je eine zu betrachten, etwa diejenigen, welche sich auf den durch $k = l = m = 0$ charakterisirten Repräsentanten des I. Typus beziehen. Von denselben wird:

$$(7)\quad \begin{aligned} \overline{B} : \varpi_1' &= (1+n)\,\varpi_1 + n^2\varpi_3, & \varpi_2' &= \varpi_2, \\ \varpi_3' &= -\varpi_1 + (1-n)\,\varpi_3, & \varpi_4' &= \varpi_4, \end{aligned}$$

während $\overline{C}$ und $\overline{D}$ sich bezw. von C' und D' nur durch die Bezeichnung der Perioden unterscheiden.

Um nun den Einfluss dieser Operationen auf $\sqrt{D}$ und $\sqrt[4]{\overline{D}}$ zu untersuchen, bedienen wir uns am bequemsten der Thetareihen. Am einfachsten gestaltet sich die Sache für C' und $\overline{C}$; man hat für C': $p_{12}' = p_{12}$, $\tau_{11}' = \tau_{11}$, $\tau_{12}' = \tau_{12} - n\tau_{11}$, $\tau_{22}' = \tau_{22} - 2n\tau_{22} + n^2\tau_{11}$, also:

*) Wir geben die Substitutionen, welche die Verzweigungspunkte erfahren, durch ihre Cyklen an. —

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\vartheta(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i (m_1^2 \tau_{11}' + 2 m_1 m_2 \tau_{11}' \tau_{12}' + m_2^2 \tau_{22}')} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i \left((m_1 - n m_2)^2 \tau_{11} + 2(m_1 - n m_2) m_2 \tau_{12} + m_2^2 \tau_{22}\right)}.
\end{aligned}
$$

Da nun die Gesammtheit der Zahlenpaare $(m_1 - n m_2, m_2)$ mit der Gesammtheit der Zahlenpaare (m_1, m_2) identisch ist und die Thetareihe unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, so folgt:

$$\vartheta(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \vartheta(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

hieraus wegen $p_{12}' = p_{12}$:

$$(9)\qquad \sqrt[4]{D'} = \sqrt[4]{D},$$

und ebenso für $\overline{C}$:

$$(10)\qquad \sqrt[4]{\overline{D}'} = \sqrt[4]{\overline{D}}$$

d. h. bei der Operation C' bleiben die Wurzeln, also auch die Coefficienten unserer drei Multiplicatorgleichungen $\left(\text{für } \sqrt[4]{D},\ \sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D}},\ \sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D''}}\right)$ ungeändert.

In ganz analoger Weise wird für D' erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_{12}' = p_{12}, \quad \tau_{11}' &= (1-n)^2 \tau_{11} + 2n(1-n)\tau_{12} + n^2 \tau_{22}, \\
\tau_{12}' &= -n(1-n)\tau_{11} + (1-2n^2)\tau_{12} + n(1+n)\tau_{22}, \\
\tau_{22}' &= n^2 \tau_{11} - 2n(1+n)\tau_{12} + (1+n)^2 \tau_{22},
\end{aligned}
$$

also:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')(m_1, m_2)^2 \\
&= (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})\left(m_1(1-n) - m_2 n,\ \ m_1 n + m_2(1+n)\right)^2,
\end{aligned}
$$

sodass man auch hier zu demselben Resultat kommt.

Die Behandlung von B und B' erfordert ein anderes Hilfsmittel. Wir erhalten zunächst:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
\tau_{11}' &= \frac{-n + (1-n)\tau_{11}}{1 + n + n\tau_{11}}, \qquad \tau_{12}' = \frac{\tau_{12}}{1 + n + n\tau_{11}}, \\
\tau_{22}' &= \tau_{22} - \frac{n\tau_{12}^2}{1 + n + n\tau_{11}}.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln zeigen, dass für $\tau_{12} = 0$ nicht nur $\tau_{12}' = 0$, sondern auch $\tau_{22}' = \tau_{22}$ wird. Nun zerfällt der hyperelliptische Thetanullwerth $\vartheta(\tau_{11}, 0, \tau_{22})$ (vgl. § 8) in das Product der beiden elliptischen $\vartheta_3(\tau_{11})$ und $\vartheta_3(\tau_{22})$ und ganz ebenso $\vartheta(\tau_{11}', 0, \tau_{22}')$ in $\vartheta_3(\tau_{11}') \cdot \vartheta_3(\tau_{22}')$. Der Factor $M_{B'}$ in der Gleichung

$$(13)\qquad \vartheta(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = M_{B'}\, \vartheta(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

reducirt sich also für $\tau_{12} = 0$ auf den Factor M in der Gleichung:

$$(14) \qquad \vartheta_3(\tau') = M\vartheta_3(\tau)$$

für:

$$(15) \qquad \tau' = \frac{-n + (1-n)\tau}{1 + n + n\tau}.$$

Den letzteren aber können wir ohne Schwierigkeit auf Grund der Transformationstheorie der elliptischen Functionen bestimmen; wir erhalten so für die Transformation B' das Resultat:

$$(16) \qquad \sqrt{D'} = i^{-n}\sqrt{D}$$

und ganz ebenso für die Transformation $\bar{B}$:

$$(17) \qquad \sqrt{\bar{D}'} = i^{-1}\sqrt{\bar{D}}.$$

Aus den beiden Gleichungen (16) und (17) aber folgt mit Rücksicht darauf, dass für ungerade n stets:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, das Resultat:

$$(18) \qquad \sqrt[4]{\frac{\bar{D}'}{D'^n}} = \sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}},$$

d. h. auch wenn die Substitution B' mit den ursprünglichen Perioden vorgenommen wird, bleiben die Wurzeln, also auch die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$ ungeändert, (nicht aber die der Gleichung für $\sqrt{\bar{D}}$, und die der Gleichung für $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D}}$ nur, wenn $n \equiv 1 \pmod{4}$ ist).

Nunmehr haben wir alle drei Substitutionen B', C', D' erledigt und können auf Grund der erhaltenen Resultate dem zu Anfang des Paragraphen ausgesprochenen Satze folgende bestimmtere Fassung ertheilen:

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$ bleiben ungeändert bei allen Operationen einer Untergruppe II. Stufe, nämlich bei denjenigen, welche die zugehörige Zerlegung $f = \varphi_3 \cdot \psi_3$ an ihrer Stelle lassen; daraus folgt, dass sie rationale symmetrische Invarianten von φ und ψ sind).*

---

*) Dem entspricht bei der gewöhnlichen Darstellung der *elliptischen* Multiplicatorgleichung der Satz, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von $k^2 \cdot k'^2$ sind, vgl. z. B. Königsberger, Vorlesungen Bd. II, p. 179 (1874) oder Joubert, sur les équations qui se rencontrent d. l. théorie d. l. transf. p. 73 (1876)

§ 23.

Einführung der Hermite'schen Repräsentanten.

Unsere bisherigen Entwickelungen knüpfen durchweg an die *„neuen“*. Repräsentanten (Grundz. § 50) der Systeme transformirter Perioden an; für die noch folgenden erweist es sich als zweckmässig, zu den Hermite'schen zurückzukehren. Die Formeln für diesen Uebergang sind bereits in § 10 gegeben; hier ist nur noch auf einen für unsere jetzigen Zwecke wesentlichen Punkt aufmerksam zu machen. Die Wurzeln unserer Multiplicatorgleichung (für $\sqrt{D}$) waren, in den neuen Repräsentanten geschrieben:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta^2(\overline{\tau}'_{11}, \overline{\tau}'_{12}, \overline{\tau}'_{22})}{\overline{p}'_{12}},$$

in den Hermite'schen Repräsentanten werden sie also:

$$(2)\qquad i^{\lambda}\,\frac{\vartheta^2(\overline{\tau}_{11}, \overline{\tau}_{12}, \overline{\tau}_{22})}{\overline{p}_{12}},$$

und wir haben noch für die Repräsentanten des II., III. und IV. Typus den Exponenten λ zu bestimmen (für den I. Typus sind beide Arten von Repräsentanten identisch). Dabei müssen wir die Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 3$ (mod. 4) unterscheiden.

Im ersteren Falle werden die Substitutionen, welche die ϖ' in die ϖ überführen (§ 10, Gl. (15)—(18)) alle mod. 4 zur Identität congruent; in diesem Falle ist also λ überall $= 0$ zu setzen.

Der zweite Fall dagegen bedarf einer längeren Ueberlegung, die wir wieder für den II. Typus durchführen wollen. Ganz wie es im vorigen Paragraphen für die Transformation B' geschah, kann gezeigt werden, dass die Bestimmung von λ zurückkommt auf die gleiche Bestimmung für die elliptische Thetafunction ϑ_3 und eine Transformation:

$$(3)\qquad \omega_1' = n\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_2,$$

deren Coefficienten (§ 10, Glchg. (8)) den Bedingungen:

$$(4)\qquad n\alpha \equiv -1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv -1 \pmod{4}$$

genügen. Für eine solche Transformation findet man aber:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_3^2(\tau')}{\omega_1'} = -\,\frac{\vartheta_3^2(\tau)}{\omega_1},$$

und daher erhalten wir auch:

$$(6)\qquad \frac{\vartheta^2(\overline{\tau}'_{11}, \overline{\tau}'_{12}, \overline{\tau}'_{22})}{\overline{p}'_{12}} = -\,\frac{\vartheta^2(\overline{\tau}_{11}, \overline{\tau}_{12}, \overline{\tau}_{22})}{\overline{p}_{12}}.$$

Der III. und IV. Typus lässt sich ganz in derselben Weise behandeln. Indem wir noch statt der $\widetilde{p}_{12}$ die ursprüngliche Periodendeterminante p_{12} einführen und in der Formulirung des Resultats die beiden vorher unterschiedenen Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 3$ (mod. 4) zusammenfassen, gelangen wir zu folgendem Satz: *)

Will man die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ durch Thetafunctionen der modificirten Hermite'schen Repräsentanten ausdrücken, so hat man zu setzen:

für die Repräsentanten des I. Typus:

$$\frac{1}{n^2 p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22});$$

für die Repräsentanten des II. und III. Typus:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22});$$

für den Repräsentanten des IV. Typus:

$$\frac{1}{p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22}).$$

Wir fügen die Reihenentwicklungen der hier auftretenden Thetanullwerthe bei. Setzen wir wieder:

(7) $$p = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad q = e^{\pi i \tau_{12}}, \quad r = e^{\pi i \tau_{22}},$$

sowie:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so erhalten wir:

für den I. Typus:

$$\vartheta = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2} \varepsilon^{4k\mu_1^2 + 8l\mu_1\mu_2 + 4m\mu_2^2} \, p^{\frac{1}{n}\mu_1^2} \, q^{\frac{2}{n}\mu_1\mu_2} \, r^{\frac{1}{n}\mu_2^2};$$

(8) für den II. Typus:

$$\vartheta = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2} \varepsilon^{4k\mu_2^2} \, p^{\frac{1}{n}(n\mu_1 + 4l\mu_2)^2} \, q^{\frac{2}{n}(n\mu_1 + 4l\mu_2)\mu_2} \, r^{\frac{1}{n}\mu_2^2};$$

für den III. Typus:

$$\vartheta = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2} \varepsilon^{4k\mu_1^2} \, p^{\frac{1}{n}\mu_1^2} \, q^{2\mu_1\mu_2} \, r^{n\mu_2^2};$$

für den IV. Typus:

$$\vartheta = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2} p^{n\mu_1^2} \, q^{2n\mu_1\mu_2} \, r^{n\mu_2^2}.$$

*) Dasselbe Resultat hat auf anderem Wege Herr Wiltheiss erhalten, Cr. J. Bd. 96, vgl. insbes. p. 26 u. 34.

Wir fügen auch die entsprechenden Entwicklungen für $\vartheta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ bei, unterlassen aber für diese die Bestimmung der beim Uebergang von den neuen zu den Hermite'schen Repräsentanten zutretenden Einheitswurzeln, da wir sie nicht brauchen werden. Wir erhalten:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2}(-1)^{\mu_1+\mu_2+1}\,\varepsilon^{k(2\mu_1+1)^2+2l(2\mu_1+1)(2\mu_2+1)+m(2\mu_2+1)^2}\\
&\qquad\qquad\cdot p^{\frac{1}{n}\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{\frac{1}{n}\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{\frac{1}{n}\left(\mu_2+\frac{1}{1}\right)^2};\\
&\text{II.}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2}(-1)^{\mu_1+\mu_2+1}\,\varepsilon^{k(2\mu_2+1)^2}\,p^{\frac{1}{n}\left(n\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)+4l\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\\
&\qquad\qquad\cdot q^{\frac{1}{n}\left(n\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)+4l\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{\frac{1}{n}\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2};\\
&\text{III.}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2}(-1)^{\mu_1+\mu_2+1}\,\varepsilon^{k(2\mu_1+1)^2}\,p^{\frac{1}{n}\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{n\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2};\\
&\text{IV.}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu_2}(-1)^{\mu_1+\mu_2+1}\,p^{n\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2n\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{n\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

§ 24.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ sind ganze Functionen der Coefficienten von φ und ψ.

Wir fragen jetzt, ob die Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung irgendwo unendlich gross werden. An die Spitze dieser Untersuchung stellen wir folgenden bekannten Satz:

Wenn die gegebenen Thetamoduln den zur Convergenz der Thetareihen erforderlichen Bedingungen genügen, so genügen ihnen auch die transformirten Thetamoduln.

Aus diesem Satze folgt nun zunächst:

Solange die Verzweigungspunkte des vorgelegten hyperelliptischen Gebildes alle von einander verschieden sind, bleiben die Wurzeln und also auch die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ endlich.

Wir untersuchen weiter, wie sie sich verhalten, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken; dabei stützen wir uns auf das im II. Abschnitte erhaltene Resultat, dass, für $\lim(\alpha_2-\alpha_1)=0$, $\lim p_{12}$ endlich und $\lim p=0$ ist. Es bleiben aber für $p=0$ und endliches p_{12} alle transformirten Th-Nullwerthe endlich für jede Charakteristik: durch lineare Transformation folgt, dass dasselbe für Zusammenrücken

von zwei beliebigen Verzweigungspunkten gilt. Also können wir schliessen:

Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[\lambda]{D}$ *bleiben auch dann endlich, wenn zwei Verzweigungspunkte des gegebenen hyperelliptischen Gebildes zusammenrücken, während die übrigen von einander und von der gemeinschaftlichen Grenzlage dieser beiden verschieden bleiben.*

Nunmehr können wir folgendermassen*) weiter schliessen: Die Stellen, an welchen *mehr als ein Paar* Verzweigungspunkte zusammenrücken, bilden im Gebiete der Coefficienten von f eine Mannigfaltigkeit von zu geringer Dimension, als dass eine algebraische Function dieser Coefficienten an jenen Stellen allein unendlich oder unbestimmt werden könnte. Es folgt also, ohne dass wir das Verhalten unserer Functionen an jenen Stellen zu untersuchen brauchten:

Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[\lambda]{D}$ *sind ganze algebraische Functionen der Coefficienten von* f.

Diesen Satz halten wir nun zusammen mit dem Resultat des § 22, indem wir wieder die beiden Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 3$ (mod. 4) unterscheiden. Setzen wir voraus, dass *der Coefficient der höchsten Potenz von* $\sqrt[\lambda]{D}$ *zu* 1 *gemacht sei*, so können wir das Resultat folgendermassen formuliren:

Ist der Transformationsgrad $n \equiv 1$ (*mod.* 4), *so sind die Coefficienten gerader Potenzen von* $\sqrt[\lambda]{D}$ *in der Multiplicatorgleichung für diese Grösse ganze rationale symmetrische Invarianten von* φ *und* ψ, *die Coefficienten ungerader Potenzen Producte solcher Invarianten in* $\sqrt[\lambda]{D}$.

Ist aber der Transformationsgrad $n \equiv 3$ (*mod.* 4), *so ist allgemein der Coefficient von* $\sqrt[\lambda]{D}^{\lambda}$ *das Product einer solchen Invariante in* $\sqrt[\lambda]{D^{[\lambda]}}$, *unter* $[\lambda]$ *den kleinsten positiven Rest von* λ *nach dem Modul* 4 *verstanden* (0, *wenn* λ *ein Vielfaches von* 4).

§ 25.

Jeder Coefficient ist durch eine bestimmte Potenz von D theilbar.

Wir haben eben hervorgehoben, dass die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[\lambda]{D}$ endlich bleiben, wenn zwei Wurzeln von f zusammenfallen; wir wollen aber jetzt ihr Verhalten in diesem Falle noch näher untersuchen.

Seien $\alpha_2 - \alpha_1 = \varepsilon$ und also auch $e^{\pi i \tau_{11}} = p$ unendlich kleine Grössen erster Ordnung, p_{12} endlich und von Null verschieden, so zeigen die Reihenentwicklungen von § 23, dass die transformirten Werthe von $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right|}$ nicht nur endlich, sondern auch von Null verschieden bleiben,

*) Vgl. dieselbe Schlussweise bei Herrn Klein, p. 69 dieses Bandes.

dass dagegen die transformirten Werthe von $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|}$ unendlich klein werden, und zwar:

die n^3 des Typus I von der Ordnung $\frac{1}{4n}$;

diejenigen n des Typus II, für welche $l = 0$, von der Ordnung $\frac{n}{4}$;

diejenigen n^2-n des Typus II, für welche $l \gtrless 0$, von der Ordnung $\frac{1}{4n}$*);

die n des Typus III ebenfalls von der Ordnung $\frac{1}{4n}$;

endlich der des Typus IV von der Ordnung $\frac{n}{4}$.

Nun gehört bei der hier zu Grunde gelegten Wahl des Querschnittsystems (§ 1) $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right|}$ zu einer solchen Zerlegung $\binom{024}{135}$ der Form f, bei welcher die Punkte 1 und 2 getrennt werden, $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|}$ zu einer solchen $\binom{012}{345}$, bei welcher sie vereinigt bleiben. Andererseits aber können wir einer gegebenen Form $\sqrt[4]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$ durch Aenderung des Querschnittsystems jede beliebige gerade Charakteristik verschaffen. Was also von $D_{\substack{012\\345}}$ beim Zusammenrücken von 1 mit 2 gilt, das muss auch von $D_{\substack{024\\135}}$ beim Zusammenrücken von 2 mit 4 gelten. Berücksichtigen wir noch, dass die Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung abgesehen von Potenzen von $\sqrt[4]{D}$ rationale symmetrische Invarianten von φ und ψ sind, so können wir aus diesen Ueberlegungen folgenden Schluss ziehen:

Verschwindet die Resultante von φ und ψ, so bleiben die $(n^2+1)(n+1)$ Werthe von $\sqrt[4]{D}$ endlich und von Null verschieden; wird aber die Discriminante von φ oder die von ψ unendlich klein (von der Ordnung 2), so werden $n^2(n+1)$ von jenen Werthen unendlich klein je von der Ordnung $\frac{1}{2n}$, die übrigen $n+1$ je von der Ordnung $\frac{n}{2}$.

Jeder Coefficient der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{D}$ muss also durch eine bestimmte Potenz von $D^{\frac{1}{2n}}$ theilbar sein. Das Absolutglied z. B. wird das Product von $D^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ in eine Invariante des Grades $(n-1)^2(n+1)$; das Verschwinden der letzteren sagt, wie leicht zu sehen, aus, dass

*) Glieder dieser Ordnung kommen stets wirklich vor, da die diophantische Gleichung $n\mu_1 + 4l\mu_2 = -\frac{1}{2}(n-1) - 2l$ stets ganzzahlige Lösungen μ_1, μ_2 besitzt.

ein zu dem gegebenen Gebilde gehöriges Integral in einer die Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$ auszeichnenden Weise durch Transformation n^{ter} Ordnung auf ein elliptisches reducirt werden kann (vgl. Abschn. II u. V).

§ 26.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ sind ganze Functionen der ursprünglichen Th-Nullwerthe

Wir wollen auch noch untersuchen, was aus den Wurzeln unserer Multiplicatorgleichung wird, wenn drei Verzweigungspunkte des gegebenen hyperelliptischen Gebildes zusammenrücken; dabei knüpfen wir an die Resultate von Abschnitt II an*). Wir sahen dort, dass unter dieser Voraussetzung die Grenzwerthe $\lim (\varepsilon^{\frac{1}{2}} p_{12})$ und $\lim (\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tau_{12})$ endlich und von 0 verschieden bleiben, es bleibt also auch:

$$\lim \frac{e^{\mu \pi i \tau_{12}} - e^{-\mu \pi i \tau_{12}}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

für jeden von Null verschiedenen Exponenten μ endlich und von Null verschieden. Nun lassen sich in denjenigen $(n+1)^2$ der Entwicklungen (9) in § 23, in welchen $l = 0$ ist, die Glieder stets in Paare der Form:

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma - p^\alpha q^{-\beta} r^\gamma$$

zusammenfassen; alle diese Reihen werden also für $\varepsilon = 0$ unendlich klein wie $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, während die $n^3 - n$ übrigen Reihen von Null verschieden bleiben. Nach Division mit p_{12} erhalten wir hieraus das Resultat:

Werden die gegenseitigen Entfernungen der drei Wurzeln von φ (oder der drei Wurzeln von ψ) von der ersten Ordnung unendlich klein, so werden von den Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ $(n+1)^2$ unendlich klein von der Ordnung $\frac{3}{2}$, die übrigen $n^3 - n$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Die Entwickelungen (26) dagegen bleiben für $\tau_{12} = 0$ endlich und von Null verschieden; daher folgt:

Werden die gegenseitigen Entfernungen zweier Wurzeln von φ und einer von ψ (oder zweier von ψ und einer von φ) von der ersten Ord-

*) Die dort hinzugefügte Einschränkung „das Doppelverhältniss der drei zusammenrückenden Punkte mit irgend einem festen vierten Punkt soll einen bestimmten, von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth behalten" können wir hier weglassen, da wir bereits wissen, dass wir es mit *ganzen* algebraischen Functionen zu thun haben, deren Grenzwerthe von der Art der Annäherung unabhängig sein müssen.

nung unendlich klein, so werden die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ alle unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung werden also in beiden Fällen unendlich klein von einer Ordnung, welche halb so hoch ist, als ihr Grad in den Coefficienten von φ und ψ; daraus folgt (IV, § 3):

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt{D}$ sind ganze Functionen der ursprünglichen Th-Nullwerthe.

VII.

Berechnung einiger Coefficienten der Multiplicatorgleichung für Transformation dritten Grades.

§ 27.

Allgemeiner Ansatz.

Es sollen nun für den speciellen Fall $n = 3$ einige Coefficienten der Multiplicatorgleichung für:

$$x = \sqrt{D}$$

wirklich berechnet werden. Zu diesem Zwecke werde zunächst zusammengestellt, was über die Form dieser Coefficienten aus den allgemeinen Entwickelungen des vorigen Abschnitts sich ergiebt. Zunächst:

Der Grad der Gleichung wird:

$$3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40.$$

Aus VI, § 5 folgt: Wird $\sqrt{D}$ von der ersten Ordnung unendlich klein, so werden von den 40 Werthen unseres x 36 unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{3}$, die übrigen von der Ordnung 3. Die Summe der Producte der Wurzeln zu je λ wird also unendlich klein mindestens von der Ordnung $\frac{\lambda}{3}$, wenn $\lambda \leqq 36$ ist, dagegen mindestens von der Ordnung:

$$\frac{1}{3}\, 36 + 3 \cdot (\lambda - 36) = 3\lambda - 96,$$

wenn $\lambda \geqq 36$ ist; daraus folgt:

Der Coefficient von $x^{40-\lambda}$ in unserer Gleichung hat zum Factor eine Potenz von D, deren Exponent:

$$\textit{mindestens gleich } \frac{1}{12}\,\lambda \textit{ für } \lambda \leqq 36,$$

$$\textit{mindestens gleich } \frac{3}{4}\,\lambda - 24 \textit{ für } \lambda \geqq 36$$

ist.

Das Product sämmtlicher Wurzeln wird dabei genau von der Ordnung 24 unendlich klein; *das absolute Glied unserer Gleichung hat also genau die Potenz D^6 zum Factor.*

Andererseits folgt aus dem Schlusssatze von § 24 dass *der Exponent von $\sqrt[4]{D}$ im Exponenten von $x^{40-\lambda}$ eine ganze Zahl und $\equiv -\lambda$ (mod. 4) sein muss.*

Halten wir alle diese Bemerkungen zusammen, so ergiebt sich für unsere Gleichung folgende Form:

$$\begin{aligned}
x^{40} &+ 0\,.\,x^{39} + g_0 D^{\frac{1}{2}} x^{38} + g_2 D^{\frac{1}{4}} x^{37} + g_0' D x^{36} + g_2' D^{\frac{3}{4}} x^{35} \\
&+ g_4 D^{\frac{1}{2}} x^{34} + g_2'' D^{\frac{5}{4}} x^{33} + g_4' D x^{32} + g_6 D^{\frac{3}{4}} x^{31} + g_4'' D^{\frac{3}{2}} x^{30} \\
&+ g_6' D^{\frac{5}{4}} x^{29} + g_8 D x^{28} + g_6'' D^{\frac{7}{4}} x^{27} + g_8' D^{\frac{3}{2}} x^{26} + g_{10} D^{\frac{5}{4}} x^{25} \\
&+ g_8'' D^2 x^{24} + g_{10}' D^{\frac{7}{4}} x^{23} + g_{12} D^{\frac{3}{2}} x^{22} + g_{10}'' D^{\frac{9}{4}} x^{21} + g_{12}' D^2 x^{20} \\
&+ g_{14} D^{\frac{7}{4}} x^{19} + g_{12}'' D^{\frac{5}{2}} x^{18} + g_{14}' D^{\frac{9}{4}} x^{17} + g_{16} D^2 x^{16} + g_{14}'' D^{\frac{11}{4}} x^{15} \\
&+ g_{16}' D^{\frac{5}{2}} x^{14} + g_{18} D^{\frac{9}{4}} x^{13} + g_{16}'' D^3 x^{12} + g_{18}' D^{\frac{11}{4}} x^{11} + g_{20} D^{\frac{5}{2}} x^{10} \\
&+ g_{18}'' D^{\frac{13}{4}} x^9 + g_{20}' D^3 x^8 + g_{22} D^{\frac{11}{4}} x^7 + g_{20}'' D^{\frac{7}{2}} x^6 + g_{22}' D^{\frac{13}{4}} x^5 \\
&+ g_{24} D^3 x^4 + g_{22}'' D^{\frac{15}{4}} x^3 + g_{20}''' D^{\frac{9}{2}} x^2 + g_{18}''' D^{\frac{21}{4}} x + g_{16}''' D^6 = 0.
\end{aligned}$$

Die g, g', g'', g''' bedeuten darin *ganze rationale symmetrische Invarianten von φ und ψ,* deren Grad in den Coefficienten jeder von beiden Formen durch die ihnen beigefügten unteren Indices bezeichnet ist.

Der Coefficient von x^{39} muss Null sein, da er eine ganze Function ersten Grades der Coefficienten von φ und ψ und doch durch $D^{\frac{3}{4}}$ theilbar sein soll.

§ 28.

Berechnung der ersten Coefficienten.

Für die Berechnung der Coefficienten der Multiplicatorgleichung wird es sich im allgemeinen empfehlen, den Weg durch die Potenzsummen der Wurzeln hindurch zu wählen, welche für $\lambda \leq 36$ die angegebenen Eigenschaften mit den Coefficienten von gleichem Grade theilen. (Nur die 3 letzten Coefficienten haben höhere Potenzen von $\sqrt[4]{D}$ zu Factoren, als die entsprechenden Potenzsummen). Diese Potenzsummen lassen sich nach Multiplication mit dem bekannten transscen-

denten Zusatzfactor darstellen durch Reihen, welche nach Potenzen von p, r, s fortschreiten und deren Anfangsglieder aus den Entwicklungen (8) des § 23 leicht erhalten werden können. Dabei kann man die Rechnung dadurch sehr vereinfachen, dass man von Anfang an alle Glieder unberücksichtigt lässt, welche wegen der zwischen den Einheitswurzeln bestehenden Relationen später doch herausfallen.

Andererseits folgt aus den angegebenen Eigenschaften der Coefficienten und aus den Entwicklungen des IV. Abschnitts für jeden derselben ein Ausdruck als Summe einer gewissen Anzahl von Invariantenproducten, mit unbekannten numerischen Coefficienten. Indem man hier für die Invarianten ihre Entwicklungen aus § 17 einsetzt, gelangt man durch Reihenvergleichung zur Berechnung dieser Zahlenfactoren und damit zur vollständigen Bestimmung der Coefficienten unserer Gleichung.

Auf diesem Wege überzeugt man sich zunächst davon, dass in der That:

$$s_1 = \sum x = 0$$

ist. Ferner zeigt sich, dass für s_2, s_3, s_4, s_5 immer nur je eine Invariante existirt, welche allen Bedingungen genügt, sodass nur je ein Zahlenfactor zu bestimmen bleibt, man findet*):

$$\begin{aligned} s_2 = \sum x^2 = {} & 8 + 64(p+r) + 192(p^2+r^2) + 256pr + 256(p^3+r^3) \\ & + 0(p^2r+pr^2) + 192(p^4+r^4) - 1024(p^3r+pr^3) \\ & - 1536p^2r^2 + 64prs^2 + \cdots \\ = {} & 216\sqrt{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 = \sum x^3 = {} & \frac{1}{3\sqrt{3}}\{16 - 320(p+r) - 1088(p^2+r^2) + 7680pr \\ & - 1536(p^3+r^3) - 6400(p^2r+pr^2) - 4160(p^4+r^4) \\ & + 0(p^3r+pr^3) + 12544p^2r^2 - 320prs^2 + \cdots\} \\ = {} & 16B\sqrt{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 = \sum x^4 = {} & \frac{1}{27}\{280 + 4480(p+r) + 31360(p^2+r^2) + 53760pr \\ & + 125440(p^3+r^3) + 250880(p^2r+pr^2) \\ & + 318080(p^4+r^4) + 501760(p^3r+pr^3) \\ & + 501760(p^2r+pr^2) + 4480prs^2 + \cdots\} \\ = {} & 7560D; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_5 = \sum x^5 = {} & \frac{1}{81\sqrt{3}}\{2080 - 24960(p+r) - 424320(p^2+r^2) + \cdots\} \\ = {} & 2^5 . 3 . 5 . 13B\sqrt{D^3}. \end{aligned}$$

*) Es sind jedesmal so viele Entwicklungsglieder verglichen, als angegeben sind.

Mit Hilfe der Newton'schen Formeln ergeben sich hieraus die Anfangsglieder der Multiplicatorgleichung wie folgt:

$$x^{40} + * - 108 D^{\frac{1}{2}} x^{38} - 16 B D^{\frac{1}{4}} x^{37} + 3942 D x^{36} + 480 B D^{\frac{3}{4}} x^{35} + \cdots = 0.$$

§ 29.

Das Absolutglied der Multiplicatorgleichung.

Das letzte Glied unserer Multiplicatorgleichung enthält, wie oben (§ 27) erwähnt, D^6 — und zwar keine höhere Potenz von D — zum Factor. Ist aber $D \gtrless 0$, so kann nach den Resultaten des V. Abschnitts (vgl. auch § 25a. E.) $\overline{D}$ nur verschwinden, wenn die Invariante 8^{ten} Grades:

$$G_8 = 3^{11} D^2 - 2^5 3^6 D E - 2^8 E^2 + 2^9 3^2 Z T$$

verschwindet. Der nach Abtrennung von D^6 noch übrig bleibende Factor 16. Grades muss also bis auf einen Zahlenfactor mit $G_8{}^2$ identisch sein; durch das Anfangsglied der Reihenentwickelungen findet man:

Das letzte Glied unserer Multiplicatorgleichung ist:

$$\frac{1}{3^8} G_8{}^2 D^6.$$

Hiermit ist das in der Einleitung in Aussicht gestellte nächste Ziel dieser Untersuchungen erreicht: wir haben eine Reihe von Eigenschaften unserer Gleichung kennen gelernt, die es uns ermöglicht haben zu vollständiger Ausrechnung wenigstens einiger ihrer Coefficienten vorzudringen. Eine Eigenschaft unserer Gleichung aber ist dabei noch nicht zur Geltung gekommen; es sei darüber vorläufig nur folgendes bemerkt: Die Quadratwurzeln aus den $n+1$ Wurzeln der *elliptischen* Multiplicatorgleichung für Transformation vom Primzahlgrade n lassen sich bekanntlich durch $\frac{n+1}{2}$ Grössen linear ausdrücken. Analoge Ausdrücke für die Wurzeln der *hyperelliptischen* Multiplicatorgleichung hat Herr Wiltheiss*) aufgestellt; und diese in der That fundamentale Eigenschaft unserer Gleichung ist es, welche in diesem I. Theil unserer Untersuchungen bei Seite gelassen wurde, um so mehr aber im weiteren Verlauf derselben in den Vordergrund treten soll.

Göttingen, November 1889.

---

*) Crelle's Journal Bd. 96, (1884). Dort ist p. 27 mitgetheilt, dass Herr Kronecker schon früher im Besitz der betr. Relationen war.

Ueber Theilbarkeitseigenschaften ganzer Functionen höherer Differentialquotienten.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

In einer früheren Arbeit habe ich eine einfache Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen $f(x) = 0$ gegründet auf die Lösung der Aufgabe, für das Argument einer ganzen rationalen Function $f(x)$ eine solche rationale Function y_n desselben zu substituiren, dass $f(y_n)$ mit der n^{ten} Potenz von $f(x)$ proportional wird. Dabei ergab sich die Differenz $y_n - x$, abgesehen vom Factor $nf(x)$, als der Quotient des $(n-1)^{\text{ten}}$ und des n^{ten} Differentialquotienten von der gebrochenen Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, deren Zähler eine zu $f(x)$ theilerfremde, im Uebrigen aber willkürliche ganze rationale Function von x darstellte.

Setzt man den angegebenen Werth von y_n in $f(y_n)$ ein, und entwickelt nach Potenzen von $y_n - x$, so findet die erwähnte Thatsache ihren Ausdruck in dem Satze, dass eine gewisse ganze rationale Function von $\varphi(x)$ und $f(x)$ nebst ihren Ableitungen (bis zur n^{ten} incl.) die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von $f(x)$ als Factor zulässt, d. h. durch $f^{n+1}(x)$ theilbar wird.

Es drängt sich naturgemäss die Frage auf, inwieweit der in Rede stehende Satz von dem Charakter der Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ abhängig ist: erst nach Erledigung dieser Vorfrage kann man dazu übergehen, die oben citirte Auflösungsmethode auf transcendente Gleichungen zu übertragen.

Vermöge einer naheliegenden Verallgemeinerung wird man so zu der Aufgabe geführt: „Entwickelt man den Quotienten $\frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}$, wo $\varphi(x)$ und $f(x)$ beliebige Functionen von x bedeuten, in eine Taylor'sche Reihe nach Potenzen von h, und setzt die Differenz $y_n - x$ gleich dem Quotienten zweier consecutiver Coefficienten u_{n-1}, u_n jener Entwickelung; entwickelt man jetzt die Function $f(y_n)$ wiederum in eine Taylor'sche Reihe nach Potenzen von $f(x)$, durch welche Potenz von

$f(x)$ wird dann die Summe S_ν der ν ersten Glieder der letzteren Reihe theilbar?"

Die genauere Untersuchung lehrt, dass die gestellte Aufgabe nur ein einzelnes Glied einer Kette von eigenthümlichen Erscheinungen bildet, welche sich sämmtlich als Theilbarkeitsbeziehungen zwischen höheren Ableitungen des Quotienten $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nach x auffassen lassen, in dem Sinne, dass sich aus gewissen ganzrationalen, homogenen und zumeist auch isobaren Functionen solcher Ableitungen immer eine bestimmte Potenz von $f(x)$ abscheiden lässt, vorausgesetzt, dass eine jede Ableitung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch ihren expliciten, nach Potenzen von $f(x)$ geordneten Werth ersetzt ist, und die auftretenden Nenner heraufgeschafft sind. Schon die zu Anfang (§ 1) für die fraglichen Ableitungen aufgestellte lineare Recursionsformel weist die hervorgehobene Eigenthümlichkeit auf, weit prägnanter jedoch (§§ 2, 3) eine Reihe quadratischer Functionen. Das Ergebniss in dieser Richtung lässt sich in dem eleganten Satze niederlegen, dass unter einfachen, leicht angebbaren Bedingungen irgend eine quadratische, homogene und isobare Function der Ableitungen von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ stets durch eine bestimmte Potenz von $f(x)$ theilbar wird.

Dabei mag betont sein, dass nur die, für den vorliegenden Zweck gewählte Form dieses Resultates einen speciellen Charakter an sich hat: das Letztere führt in der That, wie in einer anschliessenden Arbeit gezeigt wird, zu der Gesammtheit der algebraischen Beziehungen zwischen den Coefficienten, welche bei der Entwickelung höherer Differentiale einer willkürlichen Function y von x nach den Differentialquotienten $y^{(\varkappa)}$ auftreten, sobald man die übliche Annahme eines constanten dx fallen lässt. Auf Grund der geschilderten Hülfssätze lässt sich die Eingangs formulirte Frage vollständig beantworten. Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $\nu - 1$, so ist $S_\nu = f(y_n)$ für jeden Werth von n noch durch die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von $f(x)$ theilbar. In jedem anderen Falle jedoch ist die in S_ν d. i. der Summe der ν ersten Glieder von $f(y_n)$ aufgehende Potenz von $f(x)$ für $\nu \leqq n+1$ die ν^{te}, für $\nu > n+1$ die $(n+1)^{\text{te}}$. (§ 5.)

Es ist zu beachten, dass derartige Eigenschaften rein formaler Natur sind; indem man $\varphi(x)$ und $f(x)$ nebst ihren Derivirten bis zur n^{ten} incl. als ein System von $2n+2$ willkürlichen und unabhängigen Veränderlichen ansieht, zeigt es sich, dass aus gewissen ganzen Functionen derselben eine bestimmte Potenz von $f(x)$ als Factor abgespalten werden kann.

Die angewandten Hülfsmittel erlauben es aber, noch einen Schritt weiter zu thun und die Gültigkeitsgrenzen der gewonnenen Sätze fest-

zustellen, nämlich solche Functionalgleichungen, beziehungsweise „Congruenzen"*) anzugeben, denen $\varphi(x)$ und $f(x)$ genügen müssen, damit die Abspaltung von wenigstens einem weiteren Factor $f(x)$ möglich wird. (§ 6.)

Den Schluss (§ 7) bilden einige Bemerkungen über eine Anwendung des Voraufgegangenen auf die Auflösung transcendenter Gleichungen.

§ 1.

Hülfsformeln für die n^{te} Ableitung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nach x.

Es seien $\varphi(x)$ und $f(x)$ zwei, beliebig oft differenzirbare Functionen von x. Setzt man zur Abkürzung

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k} = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}, \quad f_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{1}{k!}f^{(k)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ \varphi\ = \varphi(x), \qquad f = f(x); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \Delta_k = \frac{1}{k!} f^{k+1}\left(\frac{\varphi}{f}\right)^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(3)\qquad \mathsf{E}_k = \frac{1}{k!} f^{k+1}\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

und fasst den Quotienten $\frac{\varphi}{f}$ als das Product von φ und $\frac{1}{f}$ auf, so liefert die bekannte Regel über die wiederholte Differentiation eines Productes zweier Functionen von x für die n^{te} Ableitung von $\frac{\varphi}{f}$ nach x die Entwickelung:

$$(4)\quad \Delta_n = \varphi\mathsf{E}_n + \varphi_1 f\mathsf{E}_{n-1} + \varphi_2 f^2\mathsf{E}_{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1}f^{n-1}\mathsf{E}_1 + \varphi_n f^n.$$

Geht man andererseits von der Identität aus:

$$(5)\qquad \left(\frac{\varphi}{f}\cdot f\right)^{(n)} = \varphi^{(n)},$$

und vollzieht links die n-malige Differentiation des Productes $\frac{\varphi}{f}\cdot f$ nach der eben angewandten Regel, so gelangt man zu einer Recursionsformel**) für die Δ, nämlich:

*) Wegen der realen Bedeutung, die dem Begriffe der Theilbarkeit bei transcendenten Functionen überhaupt noch zukommen kann, sei etwa auf die Abhandlung von H. Stickelberger „Ueber einen Satz des Herrn Noether", diese Annalen, Band XXX, verwiesen.

**) Umgekehrt erlaubt offenbar das succ. für $n = 1, 2, 3, \ldots n$ gebildete System von Gleichungen (6) nur eine einzige Auflösung nach den Unbekannten $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, nämlich die durch Formel (2) dargestellte. Aus dieser Be-

(6) $$\Delta_n + f_1\Delta_{n-1} + f_2 f\Delta_{n-2} + f_3 f^2\Delta_{n-3} + \cdots + f_{n-1}f^{n-2}\Delta_1 + f_n f^{n-1}\Delta_0 = \varphi_n f^n,$$

wo unter Δ_0 die Function φ selber zu verstehen ist. Durch die Specialisirung $\varphi = 1$ ergiebt sich hieraus die entsprechende Recursionsformel für die E:

(7) $$\mathsf{E}_n + f_1\mathsf{E}_{n-1} + f_2 f\mathsf{E}_{n-2} + f_3 f^2\mathsf{E}_{n-3} + \cdots + f_{n-1}f^{n-2}\mathsf{E}_1 + f_n f^{n-1} = 0.$$

Es lässt sich aber auch rückwärts die Formel (6) aus (7) gewinnen, sobald man die Entwickelung (4) als bekannt ansieht. Denn stellt man die letztere schrittweise für $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ auf, addirt die n so entstehenden Gleichungen und berücksichtigt dabei immer die entsprechenden Beziehungen (7), so kommt die Formel (6) zum Vorschein.

Aus der Form der Relation (7) lässt sich unmittelbar schliessen, dass E_n ein Aggregat*) von Gliedern des Typus $Cf^{\alpha} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$ ist, wo C eine ganze Zahl und die $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nicht negative, ganzzahlige Exponenten bedeuten, welche den Bedingungen:

(8) $$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n$$

unterliegen, sodass der Satz gilt:

„*Die Grössen* E *in* (4) *sind ganze, ganzzahlige, homogene und isobare Functionen der* $f, f_1, f_2, \ldots f_n$.“

Ein entsprechender Satz gilt für die Grössen Δ.

---

merkung fliesst sofort die Erledigung der Aufgabe, die Lösung des recurrenten Gleichungssystemes

$$x_n a_0 + x_{n-1}a_1 + x_{n-2}a_2 + \cdots + x_0 a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots n)$$

in geschlossener Form darzustellen, wenn die Coefficienten a_i, b_i willkürlich gegebene Werthe haben (von denen nur der erste, a_0, nicht verschwinden darf) und wenn der Index n einen vorgeschriebenen Werth besitzt. Versteht man nämlich unter $f(z)$, $\varphi(z)$ die beiden ganzen Functionen n^{ten} Grades in z:

$$f(z) = a_0 + (z-\lambda)\,a_1 + (z-\lambda)^2\,a_2 + \cdots + (z-\lambda)^n\,a_n,$$
$$\varphi(z) = b_0 + (z-\lambda)\,b_1 + (z-\lambda)^2\,b_2 + \cdots + (z-\lambda)^n\,b_n,$$

wo λ einen Parameter bedeutet, so kommt

$$x_k = \frac{1}{k!}\left\{\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}^{(k)}_{z=\lambda} \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Dies gilt auch für ein unendlich werdendes n, vorausgesetzt, dass dann die Entwickelungen für $f(z)$, $\varphi(z)$ convergiren, und dass auch der Grenzwerth der angegebenen k^{ten} Ableitung für $k = \infty$ ein bestimmter ist.

Nachträglich lässt sich auch die Bedingung, dass a_0 nicht verschwinden sollte, aufheben, nur muss dann, wenn man zu bestimmten endlichen Lösungen für die x gelangen will, zugleich $b_0 = 0$ sein. Verschwindet dann a_1 nicht, so reduciren sich die obigen $n + 1$ Gleichungen in den $x_0, x_1, \ldots x_n$ von selbst auf n Gleichungen derselben Art in den $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ u. s. f.

*) Die wirkliche Aufstellung des Aggregates E_n findet sich in der zweiten Abhandlung, § 1.

§ 2.

Einfachste Theilbarkeitsbeziehungen. Der Satz (A).

Die Recursionsformel (6) für die Δ lässt sich in mannigfaltiger Weise als eine Theilbarkeitsbeziehung auffassen, wenn man ausdrückt, dass die Summe der ersten k Glieder linker Hand, wo $2 \leqq k \leqq n+1$, als rationale, ganze, ganzzahlige Function der $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$, die $(k-1)^{\text{te}}$ (im Allgemeinen aber auch keine höhere) Potenz von f als Factor enthält. In Form einer Congruenz schreibt sich dies:

(9) $\Delta_n + f_1 \Delta_{n-1} + f_2 f \Delta_{n-2} + \cdots + f_{k-1} f^{k-2} \Delta_{n-k+1} = 0 \text{ mod. } f^{k-1}$.

Nimmt man hier $k=2$, und lässt den Index n successive um Eins abnehmen, so kommt:

(10) $\Delta_n = -f_1 \Delta_{n-1} \text{ mod. } f, \quad \Delta_{n-1} = -f_1 \Delta_{n-2} \text{ mod. } f$, etc.

und daher

(11) $\Delta_n \equiv (-1)^s f_1^s \Delta_{n-s} \text{ mod. } f \quad (s = 1, 2, 3, \ldots n)$.

Hieraus wiederum folgt unmittelbar, dass für $s = s_1 + s_2$ stets:

(12) $$\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2} \equiv 0 \text{ mod. } f$$

wird, sowie allgemeiner, dass irgend zwei Producte aus einer gleichen Anzahl von Factoren Δ, welche überdies eine gleiche Indicessumme aufweisen, einander mod. f congruent sind.

So z. B. zeigt in dem einfachsten Falle $n=2$, $s=2$, also $s_1 = s_2 = 1$, die wirkliche Ausrechnung, dass

(13) $$\Delta_2 \Delta_0 - \Delta_1^2 = f\{f(\varphi\varphi_2 - \varphi_1^2) - \varphi(\varphi f_2 - \varphi_1 f_1)\} = f \cdot \begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi & \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Geht man jetzt aber einen Schritt weiter, zu dem Falle $n=3$, $s=2$ $(s_1 = s_2 = 1)$, und ermittelt den Werth der Differenz $\Delta_3 \Delta_1 - \Delta_2^2$, so zeigt sich die letztere sogar theilbar durch f^2, denn es berechnet sich:

(14) $$\Delta_1 \Delta_3 - \Delta_2^2 = f^2 \cdot \begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & f & f_1 & f_2 \\ 0 & \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Es erhebt sich somit allgemein die Frage nach der höchsten Potenz von f, welche in der linken Seite der Congruenz (12) aufgeht, oder, mit anderen Worten, wenn man die Differenz (12) nach steigenden Potenzen von f anordnet, nach der niedrigsten Potenz von f, deren Coefficient nicht mehr identisch verschwindet. Die Antwort darauf giebt der Satz:

(A) „*Die Differenz* $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2 = 2, 3, \ldots, n)$ *ist noch durch die* $(n-s+1)^{\text{te}}$ *Potenz von* f *theilbar:*

$$(15) \qquad \Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s+s_1} \equiv 0 \text{ mod. } f^{n-s+1}\text{“.}$$

Der Beweis wird nach dem Verfahren der vollständigen Induction geführt. Der Satz gelte der Reihe nach für die Indices $n = 2, 3, \ldots$ bis zu einem gewissen $p-1$, und für die jeweils möglichen Werthe von s, s_1, s_2 $\left(2 \leqq s \leqq n;\ \begin{matrix} s_1 = 1, 2, & \ldots s-1 \\ s_2 = s-1, & s-2 \ldots 1 \end{matrix}\right)$; dann soll daraus seine Gültigkeit für den nächstfolgenden Index p, und die entsprechenden Werthe der s, s_1, s_2 gefolgert werden. Sei s_1 diejenige der beiden Zahlen s_1, s_2, welche nicht grösser ist als die andere, so setzen wir die Recursionsformel (6) für Δ_n einmal für den Zeiger $n = p$, das andere Mal für $n = p - s_1$ an, und multipliciren noch mit Δ_{p-s} resp. Δ_{p-s_2}, dann kommt:

$$\begin{aligned}(16) \quad -\Delta_p \Delta_{p-s} = {} & f_1 \Delta_{p-1} \Delta_{p-s} + f_2 f \Delta_{p-2} \Delta_{p-s} + \cdots f_{s_2-1} f^{s_2-2} \Delta_{p-s_2+1} \Delta_{p-s} \\ & + f_{s_2} f^{s_2-1} \Delta_{p-s_2} \Delta_{p-s} \\ & + f_{s_2+1} f^{s_2} \Delta_{p-s_2-1} \Delta_{p-s} + \cdots + f_{p-s_1} f^{p-s_1-1} \Delta_{s_1} \Delta_{p-s} \\ & + f_{p-s_1+1} f^{p-s_1} \Delta_{s_1-1} \Delta_{p-s} + \cdots + f_p f^{p-1} \Delta_0 \Delta_{p-s} - f^p \varphi_p \Delta_{p-s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(17) \quad -\Delta_{p-s_1} \Delta_{p-s_2} = {} & f_1 \Delta_{p-s_1-1} \Delta_{p-s_2} + f_2 f \Delta_{p-s_1-2} \Delta_{p-s_2} + \cdots + f_{s_2-1} f^{s_2-2} \Delta_{p-s+1} \Delta_{p-s_2} \\ & + f_{s_2} f^{s_2-1} \Delta_{p-s} \Delta_{p-s_2} \\ & + f_{s_2+1} f^{s_2} \Delta_{p-s-1} \Delta_{p-s_2} + \cdots + f_{p-s_1} f^{p-s_1-1} \Delta_0 \Delta_{p-s_2} \\ & - f^{p-s_1} \varphi_{p-s_1} \Delta_{p-s_2}.\end{aligned}$$

Indem wir den Specialfall $s_2 = 1$ vor der Hand ausschliessen, theilen wir die rechten Seiten von (16) und (17) in vier (je durch eine Zeile dargestellte) Parthien, und führen die in (15) vorgeschriebene Subtraction so aus, dass je zwei mit der nämlichen Potenz von f multiplicirte Glieder zusammengefasst werden.

Die Entwickelung von $\Delta_p \Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1} \Delta_{p-s_2}$ beginnt demnach mit der in $-f_1$ multiplicirten Differenz

$$(18) \quad \Delta_{p-1} \Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1-1} \Delta_{p-s_2} = \Delta_{p-1} \Delta_{(p-1)-(s-1)} - \Delta_{(p-1)-s_1} \Delta_{(p-1)-(s_2-1)},$$

welche, der getroffenen Verabredung zufolge, noch gerade durch die $\{(p-1)-(s-1)+1\}^{\text{te}} = (p-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f theilbar ist. Dieselbe Theilbarkeit (durch f^{p-s+1}) findet statt für die nächstfolgende, mit dem Factor $-f_2 f$ verbundene Differenz; mithin lässt sich hier im Ganzen die $(n-s+2)^{\text{te}}$ Potenz von f heraussetzen d. i. eine um Eins höhere Potenz, als beim Anfangsgliede.

In dieser Weise setzt sich der Process fort, indem je ein weiterer Factor f hinzutritt, bis das $(s_2-1)^{\text{te}}$ Glied (der Coefficient von f_{s_2-1}) erreicht ist, für welches der Gesammtexponent von f auf

$$(n-s+1) + (s_2-2) = n - s_1 - 1$$

gestiegen ist.

Der hierauf folgende Term $f_{s_2} f^{s_2-1}(\Delta_{p-s_2}\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s}\Delta_{p-s_2})$ verschwindet identisch.

Von da ab wird der Charakter der Entwickelung ein anderer. Denn die Vereinigung der dritten Zeile von (16) mit der von (17) liefert zuvörderst, als Coefficienten von $-f_{s_2+1} f^{s_2}$:

$$\Delta_{p-s_2-1}\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s-1}\Delta_{p-s_2} \tag{19}$$
$$= -(\Delta_{p-s_2}\Delta_{(p-s_2)-(s_1+1)} - \Delta_{(p-s_2)-1}\Delta_{(p-s_2)-s_1}).$$

Aber in der letzteren Differenz ist der kleinste der vier Indices nicht mehr $p-s$, sondern $(p-s_2)-(s_1+1) = p-s-1$; sie lässt also nur noch den Theiler f^{p-s} zu, was, im Verein mit f^{s_2}, als höchste, diesem Gliede vorantretende Potenz von f, die $(p-s+s_2)^{\text{te}} = (p-s_1)^{\text{te}}$ ergiebt.

Das nächste Mal summiren sich $p-s-1$ und s_2+1 als Exponenten von f, sodass als Gesammtfactor wiederum f^{p-s_1} resultirt, und dies Letztere wiederholt sich so lange, bis man zu dem mit f_{p-s_1} verknüpften Term vorgedrungen ist, wo es zum letzten Male in dieser Art auftritt. Der noch verbleibende Rest von Gliedern (die aus der vierten Zeile von (16), (17) hervorgehen) verhält sich abermals abweichend. Er beginnt mit dem Ausdrucke:

$$-f^{p-s_1}(f_{p-s_1+1}\Delta_{s_1-1}\Delta_{p-s} - \varphi_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}), \tag{20}$$

der (im Allgemeinen) die $(p-s_1)^{\text{te}}$ Potenz von f aufweist, und jetzt kommen nur noch Terme von (16), bei denen die begleitende Potenz von f fortwährend um eine Einheit wächst, bis sie mit der p^{ten}, als höchsten abschliesst.

Als Gesammtergebniss ist demnach zu verzeichnen, dass bei der vorgenommenen Anordnung von $\Delta_p\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}$ das erste Glied (der Coefficient von f_1), die $(p-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f abzusondern erlaubt, sämmtliche nachfolgenden Glieder aber eine höhere, sodass die ganze Summe durch f^{p-s+1} theilbar wird.

Damit ist der Beweis des Satzes (A), bis auf den Sonderfall $s_2 = 1$, von $p-1$ auf p geleistet, und, da der Satz für $p = 2$ gemäss (13) richtig ist, so gilt er allgemein.

Wir wenden uns jetzt zu der Modification, deren der geführte Beweis bedarf, wenn s_2 gleich Eins wird d. h. wenn die erste Zeile der rechten Seiten von (16) und (17) gar nicht existirt.

Aus $s_2 = 1$ folgt sofort, dass s_1 (welches $\geqq 1$ und $\leqq s_2$ festgesetzt war) ebenfalls $= 1$, mithin $s = 2$ wird; es handelt sich also um die Differenz $\Delta_p\Delta_{p-2} - \Delta_{p-1}^2$.

Ordnet man dieselbe, wie früher, so ist das erste, nicht verschwindende Glied, der Factor von $f_{s_2+1} = f_2$ mit der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz von f behaftet. Dasselbe Verhalten zeigen die weiteren Glieder bis

zum vorletzten incl., während das letzte mit f^n multiplicirt ist. Zieht man jetzt aus dieser Summe den Factor f^{n-1} heraus, so bleibt es noch fraglich, ob der verbleibende Bestand nicht abermals durch f theilbar ist. Dass diese Annahme aber nicht zutrifft, wird durch ein geeignetes Beispiel bewiesen. Nimmt man nämlich

$$f = (x - \alpha)(x - \beta) \; \left(\alpha \gtrless \beta\right), \quad \varphi = f_1,$$

so erhält man mit Hülfe der Partialbruchzerlegung von $\frac{f_1}{f}$:

$$\begin{aligned}(21) \qquad & \Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2 \\ & = \left\{(x-\alpha)^{n-1} + (x-\beta)^{n-1}\right\}\left\{(x-\alpha)^{n+1} + (x-\beta)^{n+1}\right\} \\ & - \left\{(x-\alpha)^n + (x-\beta)^n\right\}^2 = f^{n-1}(\alpha - \beta)^2.\end{aligned}$$

Demnach gilt der Satz (A) auch in dem Falle $s = 2$ $(s_1 = s_2 = 1)$, in dem Sinne, dass bei Anordnung der Differenz $\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ nach steigenden Potenzen von f der erste nicht verschwindende Coefficient der zu $f^{n-s+1} = f^{n-1}$ gehörige ist.

Nachdem im Vorstehenden der vollständige Beweis des Satzes (A) geführt worden ist, lässt sich auch ein Criterium für den Umfang desselben angeben. Wie nämlich aus den Formeln (16), (17), (18) sofort hervorgeht, ist der Coefficient von f^{n-s+1} bei der Entwickelung von $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2}$, bis auf den Factor $-f_1$, gleich dem Coefficienten von f^{n-s+1} bei der Entwickelung von $\Delta_{n-1} \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1-1} \Delta_{n-s_2}$. Die wiederholte Anwendung desselben Schlusses führt also zu der Congruenz:

$$\begin{aligned}(22) \qquad & \Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2} \\ & = (-f_1)^{s-2} \left(\Delta_{n-s+2} \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s+1}^2\right) \bmod. f^{n-s+2}.\end{aligned}$$

Schliessen wir demnach den extremen Fall einer Theilbarkeit von f_1 durch f im Folgenden ein für allemal aus, so haben wir als Ergänzung zu (A) den Satz:

(A_1) *„So lange die Differenz $\Delta_{n-s+2} \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s+1}^2$ durch keine höhere Potenz von f, als die $(n - s + 1)^{te}$ theilbar ist, ist die letztere auch die höchste Potenz von f, welche in der Differenz $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2)$ aufgeht."*

§ 3.

Quadratische Formen der Δ. Der Satz (B).

Fasst man den Ausdruck $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1} \Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2)$ auf als eine quadratische, homogene und isobare (d. i. mit dem Gewicht $2n - s$ behaftete) Form der Δ, für welche die Summe der Coefficienten verschwindet, so lässt sich der Satz (A) in eleganter Weise

ausdehnen. Sei Φ_g eine allgemeine quadratische, homogene und isobare Form der Δ, vom Gewicht g:

(23) $$\Phi_g = \alpha_0 \Delta_g \Delta_0 + \alpha_1 \Delta_{g-1} \Delta_1 + \cdots + \alpha_h \Delta_{g-h} \Delta_h,$$

wo $h = \frac{g}{2}$ resp. $\frac{g-1}{2}$, jenachdem g gerade oder ungerade, und die Coefficienten α selbst wieder ganze, ganzzahlige Functionen der $f, f_1, f_2, \ldots; \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bedeuten, so fragen wir zunächst nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Congruenz:

(24) $$\Phi_g \equiv 0 \text{ mod. } f.$$

Zu dem Zwecke führen wir statt der α neue Grössen a ein mittelst der Relationen

(25) $$a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1 + \alpha_0, \quad a_2 = \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0, \ldots, \\ a_h = \alpha_h + \alpha_{h-1} + \cdots + \alpha_0.$$

Die Umkehrung derselben lautet:

(26) $$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = a_1 - a_0, \quad \alpha_2 = a_2 - a_1, \ldots, \alpha_h = a_h - a_{h-1}.$$

Damit nimmt die Form Φ_g (23) die Gestalt an:

(27) $$\Phi_g = a_0(\Delta_g \Delta_0 - \Delta_{g-1}\Delta_1) + a_1(\Delta_{g-1}\Delta_1 - \Delta_{g-2}\Delta_2) + \cdots \\ + a_{h-1}(\Delta_{g-h+1}\Delta_{h-1} - \Delta_{g-h}\Delta_h) + a_h \Delta_{g-h}\Delta_h,$$

und dies hat nach Satz (A) die Congruenz zur Folge:

(28) $$\Phi_g \equiv a_h \Delta_{g-h} \Delta_h \text{ mod. } f.$$

Da sich eine Theilbarkeit von Δ_{g-h} oder Δ_h durch f, wie aus (6) hervorgeht, nur mit der — oben bereits ausgeschlossenen — Theilbarkeit von f_1 durch f vertragen würde, so ist in (28) der Satz enthalten:

„*Eine quadratische, homogene und isobare Form der Δ ist dann, und nur dann durch f theilbar, wenn dies von ihrer Coefficientensumme gilt.*"

Soll eine höhere Potenz von f, als die erste, in Φ_g aufgehen, so müssen weitere Bedingungen hinzutreten; wir beschränken uns auf den folgenden Satz, für welchen der Beweis ganz ähnlich, wie für den letzten geführt wird:

(B) „*Ist bei der Anordnung* (23) *einer quadratischen, homogenen und isobaren Form Φ_g der Δ der erste, nicht verschwindende Coefficient der ν^{te}, so ist die höchste, in Φ_g aufgehende Potenz von f stets, aber auch nur dann die ν^{te}, falls die Summe der Coefficienten von Φ_g durch f^ν theilbar ist.*"

Sind im Besondern die Cofficienten der Form ganze rationale Zahlen, — wie beim Satze (A) — so ist die Theilbarkeit ihrer Summe durch irgend eine Potenz von f äquivalent mit deren Verschwinden. Die zum Satze (B) gehörige, zu (A_1) analoge Ergänzung möge der Kürze halber unterdrückt werden.

§ 4.

Formen höheren Grades in den Δ. Der Satz (C).

Für die homogenen und isobaren Formen n^{ten} Grades in den Δ lassen sich ähnliche Ergebnisse ableiten, wie die im vorangehenden Paragraphen für quadratische Formen bewiesenen; wir begnügen uns indessen mit einem speciellen Satze, dessen wir in der Folge benöthigt sein werden:

(C) *„Die Differenz* $\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s$ $(2 \leqq s \leqq n)$ *ist noch durch die* $(n-s+1)^{\text{te}}$ *Potenz von* f *theilbar"*.

Denn diese Behauptung ist zunächst richtig für $s = 2$ und ein beliebiges n, da nach Satz (A) die höchste in $\Delta_n\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ aufgehende Potenz von f die $(n-2+1)^{\text{te}}$ ist.

Nun findet die identische Zerlegung statt:

$$\begin{aligned}\Delta_n^s\Delta_{n-(s+1)} - \Delta_{n-1}^{s+1} = \Delta_n^{s-1}(\Delta_n\Delta_{n-(s+1)} - \Delta_{n-1}\Delta_{n-s})\\ + \Delta_{n-1}(\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s),\end{aligned} \tag{29}$$

wo der erste Klammerfactor rechter Hand, wiederum nach Satz (A), durch f^{n-s} theilbar ist. Nimmt man also die Giltigkeit des Satzes (C) für irgend ein $s(< n)$ an, so weist der zweite Klammerfactor auf der rechten Seite von (29) den Theiler f^{n-s+1} auf. Mithin ist $f^{n-s} = f^{n-(s+1)+1}$ der der linken Seite von (29) zukommende Theiler d. h. der Satz (C) gilt dann auch (bei gleichem n) für die der Zahl s nächstfolgende Zahl $s + 1$, und es ist somit allgemein, was bewiesen werden sollte:

$$\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s \equiv 0 \text{ mod. } f^{n-s+1} \quad (2 \leqq s \leqq n). \tag{30}$$

Aus dem geführten Beweise geht zugleich mit Hülfe des Satzes (A_1), das Corollar hervor:

(C_1) *„Die Differenz* $\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s$ *kann keine höhere Potenz von* f, *als die* $(n-s+1)^{\text{te}}$, *als Factor enthalten, solange das Nämliche für die Differenz* $\Delta_{n-s+2}\Delta_{n-s} - \Delta_{n+s+1}^2$ *zutrifft"*.

§ 5.

Das Theilbarkeitssystem (D).

Indem zur Abkürzung gesetzt wird:

$$y_n = x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}, \tag{31}$$

denke man sich $f(y_n)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt*). Ver-

*) So oft im Folgenden (abgesehen vom Schlussparagraph) von der Entwickelung einer Function in eine Taylor'sche Reihe die Rede ist, soll das nur im Sinne eines abkürzenden Ausdrucks verstanden werden, mit der Möglichkeit einer solchen Entwickelung haben die Darlegungen des Textes Nichts zu schaffen.

steht man unter S_ν die Summe der ersten ν Glieder dieser Entwickelung, so ist $\Delta_n^{\nu-1} S_\nu$ eine rationale, ganze, ganzzahlige Function der $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, welche offenbar den Factor f besitzt. Wir schreiben

$$(32)\quad \Delta_n^{\nu-1} S_\nu = f T_\nu = f(\Delta_n^{\nu-1} + f_1 \Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-1} + f_2 f \Delta_n^{\nu-3} \Delta_{\nu-1}^2 + \cdots \\ \cdots + f_{\nu-1} f^{\nu-2} \Delta_{n-1}^{\nu-1})$$

und fragen nach der höchsten, in T_ν aufgehenden Potenz von f.

Es werde zuerst der Fall $\nu \leqq n$ in Betracht gezogen. Auf das Anfangsglied $\Delta_n^{\nu-1}$ von T_ν wende man die, zuvor mit $\Delta_n^{\nu-2}$ multiplicirte Recursionsformel (6) für Δ_n an, dann nimmt T_ν die Gestalt an:

$$(33)\quad T_\nu = -f_2 f \Delta_n^{\nu-3} (\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2) - \cdots - f_i f^{i-1} \Delta_n^{\nu-i-1} (\Delta_n^{i-1} \Delta_{n-i} - \Delta_{n-1}^i) \\ - \cdots - f_{\nu-1} f^{\nu-2} (\Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-\nu+1} - \Delta_{n-1}^{\nu-1}) \\ - f_\nu f^{\nu-1} \Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-\nu} - \cdots - f_n f^{n-1} \Delta_n^{\nu-2} \Delta_0 + f^n \Delta_n^{\nu-2} \varphi_n .$$

Bei dieser Anordnung kommt jedem der $\nu - 2$ ersten Terme die n^{te} Potenz von f als Factor zu. Denn greifen wir etwa den $(i-1)^{\text{ten}}$ Term heraus, so besitzt dessen Klammerfactor, in Folge des Satzes (C), den Theiler f^{n-i+1}, und dieser vereinigt sich mit dem voranstehenden f^{i-1} zur n^{ten} Potenz von f. Dagegen ist der $(\nu-1)^{\text{te}}$ Term von (33) nur mit der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Potenz von f behaftet, und in jedem nachfolgenden Gliede tritt noch je ein weiteres f als Factor hinzu.

Soll demnach beurtheilt werden, welches die höchste, in T_ν enthaltene Potenz von f ist, so sind zwei Hauptunterfälle zu unterscheiden.

Entweder ist f_ν durch f nicht theilbar, verschwindet also auch nicht identisch, dann ist gemäss der schon früher eingetretenen Beschränkung, dass kein Δ_n den Factor f zulassen, noch weniger identisch verschwinden solle, die $(\nu-1)^{\text{te}}$ Potenz von f die höchste, auch auf keine Weise übersteigbare, welche im $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Terme von T_ν (33), und damit zugleich in T_ν selbst aufgeht.

Oder aber, es weist f_ν den Factor f auf resp. verschwindet identisch, dann wird T_ν mindestens durch f^ν theilbar.

Der Kürze halber soll indessen von der Eventualität einer eigentlichen Theilbarkeit von f_ν durch f (wie bereits früher für $\nu = 1$ Abstand genommen werden, sodass nur noch der Fall eines identisch verschwindenden f_ν $(\nu > 2)$ einer Untersuchung bedarf.

Verschwindet nun f_ν (und damit auch $f_{\nu+1}$, $f_{\nu+2}$ etc.) identisch, $f_{\nu-1}$ aber nicht d. h. hat man es mit einer rationalen, ganzen Function (von x) vom Grade $\nu - 1$ zu thun, so besteht T_ν (33) aus einem Aggregat von $\nu - 1$ Gliedern, deren jedes den Factor f^n zulässt, und T_ν ist danach durch die nämliche Potenz von f theilbar. Dass es aber

im Allgemeinen auch keine höhere Potenz dieser Art giebt, zeigt eine directe Ausrechnung, falls man φ passend, etwa gleich f_1, wählt.

Derselbe Schluss bleibt auch gültig, wenn schon ein $f_\varkappa$ ($\varkappa < \nu$) identisch verschwinden sollte, übrigens ist dieser Fall von dem eben besprochenen nicht wesentlich verschieden, da sich alsdann ν d. i. die Anzahl der Entwickelungsglieder von $f(y_n)$, von selbst auf $\varkappa$ reducirt.

Nachdem so die verschiedenen Möglichkeiten für $\nu \leqq n$ erörtert worden sind, wenden wir uns zu den Fällen $\nu \geqq n + 1$.

An die Stelle der Entwickelung (33) tritt jetzt die andere:

$$(34)\quad \begin{aligned} T_\nu = &-f_2 f \Delta_n^{\nu-3}(\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2) - \cdots - f_i f^{i-1} \Delta_n^{\nu-i-1}(\Delta_n^{i-1}\Delta_{n-i} - \Delta_{n-1}^i) \\ &- \cdots - f_n f^{n-1} \Delta_n^{\nu-n-1}(\Delta_n^{n-1}\Delta_0 - \Delta_{n-1}^n) + f^n \Delta_n^{\nu-2} \varphi_n \\ &+ f_{n+1} f^n \Delta_n^{\nu-n-2} \Delta_{n-1}^{n+1} + \cdots + f_{\nu-1} f^{\nu-2} \Delta_{n-1}^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Nunmehr lässt sich aus jedem der n ersten Glieder der Factor f^n absondern, während die (für $\nu > n + 1$) noch nachfolgenden von den Factoren f^n, $f^{n+1}, \ldots$ begleitet werden. Somit wird T_ν sicher durch die n^{te} Potenz von f theilbar; dass dieselbe aber im Allgemeinen auch nicht überschritten wird, lehrt wiederum der Fall einer ganzen rationalen Function f von genügend hohem Grade, wenn ausserdem φ passend, z. B. gleich f_1 gewählt wird.

Um die gewonnenen Ergebnisse in einfachster Weise zusammenzufassen, übertragen wir lieber die Theilbarkeit der rationalen ganzen Function $\Delta_n^{\nu-1} S_\nu$ durch irgend eine Potenz von f auf diejenige der rationalen gebrochenen Function S_ν, indem wir die Definition einführen:

„*Eine rationale Function der $f, f_1, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$, deren Nenner keinen Theiler mit f gemein hat, heisst theilbar durch irgend eine Potenz von f, wenn die letztere im Zähler der Function f aufgeht.*“

Dann gilt das Theorem:

(D) „*Denkt man sich den Quotienten $\frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}$ nach Potenzen von h entwickelt:*

$$(35)\qquad \frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)} = u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \cdots + h^n u_n + \cdots,$$

so ist die Summe S_ν der Anfangsglieder der Taylor'schen Entwickelung von $f(y_n) = f\left(x + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$ für $\nu \leqq n + 1$ noch durch die ν^{te}, für $\nu > n + 1$ noch durch die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von f theilbar.

Nur in dem Falle, dass $f(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $\nu - 1$ bedeutet, ist $S_\nu = f(y_n)$ für jeden Werth von $n (\geqq 1)$ noch durch die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von f theilbar.“

Was die zu Eingang des Theorems gewählte Fassung angeht, so liegt auf der Hand, dass gemäss der Formel (2) die Grössen $f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ und $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ übereinstimmen.

§ 6.

Der Giltigkeitsbereich des Theorems (D). Der Satz (E).

Es erübrigt jetzt noch die Untersuchung der Beschränkungen, welchen die Functionen φ, f zu unterliegen haben, damit die zufolge des Theorems (D) aus der Summe S_ν der ν ersten Glieder von $f(y_n)$ heraustretende ν^{te} resp. $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von f sicher die höchste ist.

Für $\nu \leqq n$ ist diese Frage, bei Ausschluss der ganzen rationalen Functionen $f(x)$ des Grades $\nu - 1$, bereits entschieden worden; denn nachdem einmal die Verabredung getroffen war, dass weder f_ν, noch Δ_n, $\Delta_{n-\nu}$ einen Theiler mit f gemein haben sollen, ging aus der Entwickelung (33) hervor, dass sich aus S_ν $(\nu \leqq n)$ auf keine Weise eine höhere, als die ν^{te} Potenz von f abspalten lässt.

Dagegen war in den Fällen $\nu > n$ und, bei $\nu \leqq n$ für die ganzen rationalen Functionen $f(x)$ des Grades $\nu - 1$, ein entsprechender Schluss nicht möglich, insofern S_ν eine ganze Reihe von Gliedern aufweist, deren jedes mit dem Factor f^{n+1} behaftet ist.

Soll nun für diese Fälle festgestellt werden, unter welchen Umständen eine Erhöhung der Theilbarkeit von S_ν um wenigstens eine Potenz von f eintreten würde, so führen wir, um gewissen Schwierigkeiten bezüglich der Taylor'schen Entwickelbarkeit von $f(y_n)$ aus dem Wege zu gehen — da es sich ja hier um formale Eigenschaften der Ableitungen von φ und f handelt — eine Beschränkung in der Allgemeinheit der Functionen φ und f ein, indem wir die letzteren als willkürliche ganze rationale Functionen (von x) von genügend hohem Grade wählen.

Eine derartige Beschränkung ist in der That erlaubt. Denn wenn z. B. nach Theorem (D) $\Delta_n^n S_{n+1}$ im allgemeinen noch durch f^{n+1} theilbar ist, so besagt das Nichts Anderes, als dass aus einer ganzen ganzzahligen Function der als völlig willkürlich und unabhängig anzusehenden Variabeln $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der Factor f^{n+1} heraustritt. Dies erleidet aber keine wesentliche Aenderung, wenn man für f sowohl wie für φ arbiträre ganze rationale Functionen (von x) des Grades n nimmt; die $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bleiben dann, nach wie vor, lauter willkürliche und von einander unabhängige Veränderliche, und das Verschwinden von f_{n+1} hat nach (34) auf die Theilbarkeit von $\Delta_n^n S_{n+1}$ durch f^{n+1} keinen Einfluss, während dasjenige von φ_{n+1} offenbar überhaupt nicht in Betracht kommt.

Die Theilbarkeit von $S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots$ durch f^{n+1} bedarf dabei keiner besonderen Erwähnung, da die Congruenz $T_{n+1+i} \equiv T_{n+1} \bmod. f^n$ oder auch

$$(36) \qquad \Delta_n^i S_{n+1+i} \equiv S_{n+1} \bmod. f^{n+1} \quad (i=1,2,\ldots)$$

eine unmittelbare Folge der Formel (34) ist.

Die angestellte Ueberlegung benöthigt dagegen einer wesentlichen Modification, wenn man den „allgemeinen" Fall verlässt und nach einer eventuellen Theilbarkeit $\Delta_n^{n+i} S_{n+1+i}$ durch die $(n+2)^{\text{te}}$ Potenz von f forscht. Denn aus (34) folgert man weiter:

$$(37) \qquad T_{n+2+i} \equiv T_{n+2} \text{ mod. } f^{n+1} \quad (i=1,2,\ldots),$$

$$(38) \qquad T_{n+2} = T_{n+1} + f_{n+1} f^n \Delta_{n-1}^{n-1}$$

und damit

$$(37\,\text{a}) \qquad \Delta_n^i S_{n+2+i} \equiv S_{n+2} \text{ mod. } f^{n+2},$$

$$(38\,\text{a}) \qquad \Delta_n S_{n+2} = S_{n+1} + f_{n+1} f^{n+1} \Delta_{n-1}^{n+1}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei einer etwaigen Theilbarkeit von $S_\nu (\nu \geq n+1)$ durch f^{n+2} zwei Hauptfälle zu unterscheiden sind: einmal reducirt sich die Gesammtheit der Fälle $\nu > n+1$ auf den einzigen $\nu = n+2$; andererseits bildet $\nu = n+1$ für sich den zweiten Hauptfall. Der letztere bietet wiederum zwei Unterfälle, jenachdem f_{n+1} verschwindet oder nicht: man bemerkt dann zugleich nach (38a), dass beim Nichtverschwinden von f_{n+1} eine Theilbarkeit von S_{n+1} durch f^{n+2} die nämliche Theilbarkeit für S_{n+2} ausschliessen müsste, und umgekehrt.

Fasst man dies zusammen, so erkennt man — unter Anwendung der gleichen Schlüsse, wie oben — dass es für die vorliegende Frage erlaubt ist, f und φ als ganze rationale Functionen anzunehmen, und zwar die erstere vom Grade $n+1$ resp. (für $f_{n+1} = 0$) vom Grade n, die letztere beidemale vom Grade n. Und wenn wir zudem voraussetzen, dass weder f_1, noch φ (also auch kein Δ_ν) mit f einen Theiler gemein haben sollen, so entspricht das vollständig den früher f und φ auferlegten Bedingungen.

Der nunmehr ausschliesslich noch verbleibende Fall (cf. Theorem (D)) eines $\nu < n+1$ bei gleichzeitig verschwindendem f_ν wird im Nachstehenden von selber miterledigt werden.

Von den vier soeben aufgeführten Fällen lassen nämlich offenbar drei eine gemeinsame Behandlung zu, wenn man die Frage so stellt:

„*Unter welcher Bedingung besteht eine Identität von der Form*

$$(39) \qquad \Delta_n^\mu f\left(x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right) = f^{n+2} G(x),$$

wo $f(x)$ eine arbiträre ganze rationale Function vom Grade μ ($< n$, resp. $= n$, resp. $= n+1$) bedeutet und $\varphi(x)$ eine ebensolche Function vom Grade n?"

Setzt man, wie in (31), $y_n = x + f\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$, so liefert eine einmalige Differentiation von (39) nach x die weitere Identität:

$$(40)\qquad \Delta^{\mu} y_n' \frac{df(y_n)}{dy_n} + \mu f(y_n) \Delta_n^{\mu-1} \Delta_n' = f^{n+1} \{ fG' + (n+2) G f_1 \}$$

oder auch, wenn man will, dass nur ganze Functionen darin auftreten:

$$(40\,\mathrm{a})\qquad \{\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)\} \{\Delta_n^2 y_n'\} + \mu \{\Delta_n^{\mu} f(y_n)\} \Delta_n' = f^{n+1} \Delta_n \{ fG' + (n+2) G f_1 \}.$$

Die Giltigkeit von (39) vorausgesetzt, müsste also die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von f im ersten Gliede der linken Seite von (40a) aufgehen. Aber der erste Factor desselben, $\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)$, kann mit $f(x)$ keinen Theiler gemein haben (da ein solcher zugleich in $f_1(x)$ enthalten sein müsste). Somit zieht die Identität (39) die Congruenz nach sich:

$$(41)\qquad \Delta_n^2 y_n' = 0 \text{ mod. } f^{n+1}.$$

Aber auch das Umgekehrte findet statt. Denn sei $n+1$ der höchste Exponent von f, für welchen die Congruenz (41) gilt, so gehen wir aus von einer Identität:

$$(42)\qquad \Delta_n^{\mu} f(y_n) = f^{n+1+i} H(x) \quad (i \geqq 0)$$

wo i noch unbekannt und H nicht weiter durch f theilbar sein soll. Man differenzire wiederum (42) nach x, dann kommt:

$$(43)\qquad \{\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)\} \{\Delta_n^2 y_n'\} + \mu \{\Delta_n^{\mu} f(y_n)\} \Delta_n' = f^{n+i} \Delta_n \{ fG' + (n+1+i) G f_1 \}.$$

Hier ist die rechte Seite durch f^{n+i}, aber auch durch keine höhere Potenz von f theilbar, in demselben Sinne sind die beiden Glieder linkerhand durch f^{n+1} resp. f^{n+1+i} theilbar. Mithin kann i weder grösser, noch kleiner, als Eins sein d. h. es ist $i = 1$, was zu beweisen war.

Durch Wiederholung derselben Schlüsse zeigt man, dass, wenn f^{n+1+i} $(i=0,1,2,\ldots)$ die höchste in $\Delta_n^{\mu} f(y_n)$ aufgehende Potenz von f ist, die höchste in $\Delta_n^2 y_n'$ aufgehende Potenz von f durch f^{n+i} angegeben wird, und *vice versa**).

*) Aus dem geführten Beweise ergiebt sich nebenher die *Gesammtheit* der Lösungen einer von mir früher (diese Zeitschrift, Band XXXIII, pag. 515 u. f.) behandelten Aufgabe, eine rationale Substitution $y_n(x)$ von der Art zu finden, dass dadurch die ganze rationale Function $f(y_n)$ mit der $(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz von $f(x)$ proportional wird: $f(y_n) = Q(x) f^{n+1}(x)$. In der That gehen aus einer Lösung, etwa $y = x + \frac{u_{n-1}}{u_n}$ (35), alle andern z_n durch den Process

$$z_n = y_n + f^{n+1}(x)\,\psi(x)$$

hervor, wenn $\psi(x)$ eine, durch $f(x)$ nicht theilbare, im Uebrigen aber arbiträre rationale Function von x bedeutet. Oder, um einen üblichen Ausdruck zu ge-

Dies spricht der Satz aus:

(E) *„Bedeuten $f(x)$ und $\varphi(x)$ arbiträre, ganze rationale Functionen von den Graden $\mu(>1)$ und $n(\geq 1)$, die nur der Beschränkung unterliegen, dass sowohl f_1, wie φ zu f relativ prim sein sollen, so ist $f(y_n) = f\left(x + f\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)$ stets und nur dann durch die $(n+1+i)^{te}$ $(i \geq 1)$ Potenz von f theilbar, wenn f^{n+i} die höchste in y_n' aufgehende Potenz von f ist."*

Für $i = 0$ erhält man mit Rücksicht auf (D) den Satz:

„Im Allgemeinen ist y_n' noch durch die n^{te} Potenz von f theilbar."

Combinirt man das in (E) niedergelegte Ergebniss mit den Ueberlegungen, die kurz zuvor bezüglich einer eventuellen Theilbarkeit von S_{n+1} resp. S_{n+2} durch eine höhere, als die $(n+1)^{te}$ Potenz von f (im Falle beliebiger Functionen φ, f) angestellt wurden, und berücksichtigt noch die (weiter unten bewiesene) Relation

$$(44) \qquad \Delta_n^2 y_n' = -(n+1)(\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2)$$

so tritt dem Theoreme (1) das folgende Corollar ergänzend zur Seite:

(D_1) *„Sieht man von dem unter* (E) *aufgeführten Falle ab, und legt den Functionen φ, f nur die Beschränkung auf, dass weder φ, noch f_1 mit f einen Theiler gemein haben sollen, so ist die Summe S_ν von den ν Anfangsgliedern der Entwickelung $f(y_n) = f\left(x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)$ nicht nur für $\nu < n+1$, sondern auch für $\nu = n+1$ ausschliesslich durch die ν^{te} und durchaus durch keine höhere Potenz von f theilbar.*

Dagegen ist für $\nu > n+1$ eine Erhöhung der im Allgemeinen stattfindenden Theilbarkeit von S_ν durch f^{n+1} um die i^{te} $(i = 1, 2, \ldots)$ Potenz von f möglich: eine solche tritt genau dann, aber auch nur dann ein, wenn die höchste, in der Differenz $\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2$ aufgehende Potenz von f die $(n+i)^{te}$ ist."

Das Theorem (D) gilt also gerade so weit, als $\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2$ durch keine höhere, als die n^{te} Potenz von f theilbar ist.

Was jetzt noch den Beweis der Formel (44) angeht, so folgt zunächst aus (31) durch Differentiation nach x:

$$(45) \qquad \Delta_n^2 y_n' = \Delta_n^2 + f_1 \Delta_n \Delta_{n-1} + \Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)'$$

wo

$$(46) \qquad \Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)' = (f\Delta_{n-1}')\Delta_n - (f\Delta_n')\Delta_{n-1}$$

---

brauchen: Alle Lösungen der Aufgabe gehören einer und derselben, durch den Modul $f^{n+1}(x)$ bestimmten „Classe" an.

Auf den Inhalt dieser Anmerkung hat mich Herr R. Dedekind aufmerksam gemacht.

ist. Andererseits erschliesst man aus der ursprünglichen Bedeutung von Δ_n resp. Δ_{n-1} (2) sofort, dass

(47) $f\Delta_n' = (n+1)\Delta_{n+1} + (n+1)f_1\Delta_n, \quad f\Delta_{n-1}' = n\Delta_n + nf_1\Delta_{n-1}.$

Hierdurch geht (46) über in

$$(48) \qquad \Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)' = n\Delta_n^2 - (n+1)\Delta_{n-1}\Delta_{n+1} - f_1\Delta_{n-1}\Delta_n,$$

was, in (45) eingesetzt, nach kurzer Zusammenziehung, zu der gewünschten Formel (44) führt.

Mittelst dieser Relation (44) gewinnt man leicht eine Recursionsformel für y_n. Bedient man sich nämlich der Umformungen:

$$(40) \qquad \Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2 = -\Delta_{n+1}\Delta_n\left\{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right\}$$
$$= -\frac{\Delta_{n+1}\Delta_n}{f}(y_{n+1} - y_n)$$

so hat man unmittelbar

$$(50) \qquad y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} f \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} y_n'.$$

§ 7.

Zur Auflösung der transcendenten Gleichungen *).

Wir beschränken uns hier auf die Erörterung einiger Folgerungen, welche aus dem Theorem (D) des § 5 unmittelbar hervorgehen, eine Erörterung, welche dem in einer früheren Arbeit (diese Annalen, Band XXXIII) betreffs der Auflösung der algebraischen Gleichungen durchgeführten Gedankengange im Wesentlichen parallel läuft.

Unter der Bedingung, dass die Taylor'sche Entwickelung von $f(y_n) = f\left(x + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$ convergirt, gilt, da aus der Summe $S_\nu (\nu \geqq n+1)$ der ν ersten Glieder die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von $f(x)$ heraustritt, die Identität:

$$(51) \qquad f(y_n) = Q(x)\, f^{n+1}(x),$$

wo der Factor $Q(x)$ einen endlichen Werth besitzt.

Bedeutet daher x einen Ausgangswerth, der in solcher Nähe einer Nullstelle der Gleichung $f(x) = 0$ gewählt ist, dass der absolute Betrag von $f(x)$ kleiner als die Einheit ausfällt, so hat die Formel (51) die

---

*) Wegen der Nullstellen von Potenzreihen vgl. König „Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen" diese Annalen, Band XXIII, und Hurwitz „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function", ebenda, Band XXXIII.

Wirkung, dass man sich bei genügender Wiederholung der Substitution*)

$$(52)\qquad y_n = x + \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

dem Werth α beliebig nähern muss.

Will man es aber bei einer einmaligen Anwendung der Substitution (52) bewenden lassen, indem man den Index über alle Grenzen wachsen lässt, so muss die Forderung hinzugefügt werden, dass auch in diesem Falle die Convergenz der Reihe für $f(y_n)$ erhalten bleibt. Alsdann lässt (51) einen äquivalenten Schluss zu; es wird $\lim y_n = \alpha$, und damit zugleich $\lim y_n' = 0$.

Lässt man sich behufs hinreichender Annäherung an die Nullstelle α an einem genügend hoch gewählten n genügen, so ist demnach, in Uebereinstimmung mit der Formel (41), der Werth von y_n' ein Mass für den begangenen Fehler.

Will man den letzteren indessen direct bestimmen, nämlich als Rest der Reihe:

$$(53)\qquad \alpha = x + (y_1 - x) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_{n+1} - y_n) + \cdots,$$

so leisten die Umformungen (49), (50) nützliche Dienste.

In dem besonderen (bei reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, wie l. c. pag. 520 gezeigt, immer herstellbaren) Falle, dass die Glieder der Reihe (53), von einem bestimmten an, abwechselnde Vorzeichen haben (und reell sind), wird der Fehler kleiner als das erste Glied des Restes.

Clausthal, Dezember 1889.

---

*) Behufs practischer Ausführung der Substitution (52) bedient man sich am besten der Recursionsformel (6) resp. (7).

Ueber algebraische Relationen zwischen den Entwickelungscoefficienten höherer Differentiale.

Von

FRANZ MEYER in Clausthal.

Unterliegt das Differential dx einer Veränderlichen x keiner beschränkenden Voraussetzung, sodass dx nebst den folgenden Differentialen d^2x, d^3x, ... geradezu eine Reihe von unabhängigen Variabeln bildet, und ist y eine Function von x, so lässt sich, wie bekannt, das n^{te} Differential von y linear und homogen durch die Ableitungen von y nach x, bis zur n^{ten} incl., ausdrücken, mit Hülfe von Coefficienten C, welche ganze, rationale Functionen der dx, $d^2x, \dots, d^nx$ sind.

Zwischen diesen, succ. für $n = 1, 2, 3, \dots$ aufgestellten Coefficienten herrschen eigenthümliche algebraische Beziehungen, unter denen diejenigen vom ersten und zweiten Grade in besonderer Weise ausgezeichnet sind.

Man gelangt zu den gemeinten Beziehungen am einfachsten auf Grund des Satzes, dass bei der Entwickelung der n^{ten} Ableitung des reciproken Werthes einer Function $f(x)$ von x nach steigenden Potenzen von $f(x)$ die dabei auftretenden Coefficienten Γ von den Grössen $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ genau in derselben Weise abhängen, wie die Coefficienten C von den Grössen dx, $d^2x, \dots, d^nx$. Somit geht eine jede algebraische Beziehung zwischen den C in eine solche zwischen den Γ über, wenn man nur noch die Ableitungen von $f(x)$ mit den bezüglichen Differentialen von x vertauscht, und umgekehrt.

Die gewünschten Beziehungen zwischen den Γ fliessen nun fast unmittelbar aus den Theilbarkeitsbeziehungen, welche in der voranstehenden Abhandlung für gewisse ganze Functionen höherer Differentialquotienten von $\frac{1}{f(x)}$ hergeleitet sind.

Aus den so gewonnenen Relationen zwischen den Γ resp. C lässt sich als besonders merkwürdig ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionalgleichungen für jene Grössen vom zweiten Grade herausheben. Durch

diese Gleichungen werden alle darin vorkommenden Unbekannten bis auf n von ihnen, welche willkürlich bleiben, als ganze, ganzzahlige Functionen der letzteren n Argumente eindeutig definirt. Jenachdem man für eben diese Argumente die Ableitungen von $f(x)$, oder die Differentiale von x substituirt, gehen die Werthe der Unbekannten in die Γ resp. C über.

§ 1.

Grundformeln.

Man verdankt Herrn Faà di Bruno*) den Satz:

„*Sei φ als Function von x und x selbst als Function von y durch die Gleichung*

$$x = \psi(y) \tag{1}$$

gegeben, so ist $\left(\textit{für } \Pi(k) = 1.2.3 \ldots k \textit{ und } \Pi(0) = 1\right)$:

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \sum\nolimits_{\varrho, k} \frac{\Pi(n)}{\Pi(k_1) \ldots \Pi(k_n)} \frac{\partial^\varrho \varphi}{\partial x^\varrho} \left(\frac{\psi'}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{\psi''}{1.2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\psi^{(n)}}{\Pi(n)}\right)^{k_n}, \tag{I}$$

wo die Summe alle ganzen nicht negativen Werthe von $\varrho, k_1, \ldots, k_n$ umfasst, die den Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \\ n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n \end{cases} \tag{2}$$

genügen“.

Man kann diesem Satze eine allgemeinere Bedeutung geben, wenn man bemerkt, dass sich bei wirklichem Ausschreiben der Ableitungen $\psi', \psi'', \ldots, \psi^{(n)}$ das Product der Nenner zufolge der zweiten Relation (2) gegen den Nenner ∂y^n links hebt. Hieraus ergiebt sich (wenn man, wie üblich, für φ den Buchstaben y substituirt):

„*Ist y eine Function von x, und wird das Differential dx nicht als constant angesehen, sondern selbst wieder als abhängig von irgend welchen Veränderlichen, so drückt sich das n^{te} Differential von y durch die Ableitungen von y nach x und die Differentiale von x vermöge der Formel aus:*

$$d^n y = \sum\nolimits_{\varrho, k} \frac{\Pi(n)}{\Pi(k_1) \ldots \Pi(k_n)} y^{(\varrho)} \left(\frac{dx}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{d^2 x}{1.2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{d^n x}{\Pi(n)}\right)^{k_n}, \tag{II}$$

---

*) Cf. dessen Lehrbuch „Formes Binaires“ § 1. Für die, mit (I) äquivalente Formel (II) hat Herr Königsberger einen selbstständigen Beweis gegeben. (Diese Annalen, Band XXVII, pag. 473 u. flg.). Was endlich die Formel (III) anlangt, die wiederum inhaltlich mit (I) und (II) identisch ist, so habe ich einen elementaren Beweis derselben (welcher von der Entwickelbarkeit einer Function $f(x)$ in eine Taylor'sche Reihe keinen Gebrauch macht) in den Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik Heft 1 veröffentlicht.

Ueber einen weiteren neuen Beweis von (I) siehe § 5.

wo die ganzen Zahlen $\varrho, k_1, \ldots, k_n$ gerade, wie oben, den Relationen (2) *genügen.*"

Setzt man zur Abkürzung:

$$(3)\quad \frac{d^n y}{\Pi(n)} = d_n y, \qquad \frac{d^i x}{\Pi(i)} = d_i x, \qquad \frac{y^{(\varrho)}}{\Pi(\varrho)} = y_\varrho \quad (i, \varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

so nimmt (II) die Gestalt an*):

$$(\text{II a})\quad d_n y = \sum\nolimits^{\varrho, k} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1)\ldots\Pi(k_n)}\, y_\varrho (d_1 x)^{k_1} (d_2 x)^{k_2} \ldots (d_n x)^{k_n}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} y_\varrho\, C_{n, n-\varrho}.$$

Zwischen diesen Entwickelungscoefficienten

$$C_{n, n-\varrho} (n = 1, 2, 3, \ldots, \varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

finden, wie sich zeigen wird, eigenthümliche algebraische Relationen statt.

Um dieselben zu gewinnen, wenden wir die Formel (I) auf den besonderen Fall an, wo φ den reciproken Werth einer beliebigen Function f von x darstellt. Nun ist

$$(4)\quad \frac{d^\varrho\left(\frac{1}{f}\right)}{df^\varrho} = (-1)^\varrho \frac{\Pi(\varrho)}{f^{\varrho+1}} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots).$$

Bedient man sich der weiteren Abkürzungen:

$$(5)\quad \frac{1}{\Pi(n)} f^{n+1} \frac{d^n\left(\frac{1}{f}\right)}{dx^n} = \mathsf{E}_n, \qquad \frac{1}{\Pi(i)} \frac{d^i f}{dx^i} = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

so liefert die Formel (I) für den vorliegenden Fall nach leichter Umformung das Ergebniss:

„*Die* n^{te} *Ableitung von* $\frac{1}{f(x)}$ *nach* x *drückt sich in Function der Ableitungen von* f *nach* x *vermöge der Formel aus:*

$$(\text{III})\quad (-1)^n \mathsf{E}_n = \sum\nolimits^{\varrho, k} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1)\ldots\Pi(k_n)} (-f)^{n-\varrho} f_1^{k_1} f_2^{k_2} \cdots f_n^{k_n}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} (-f)^{n-\varrho}\, \Gamma_{n, n-\varrho},$$

wo die ganzen (nicht negativen) Zahlen $\varrho, k_1, \ldots, k_n$, wie früher, alle Werthe durchlaufen, welche den Relationen (2) *genügen.*"

---

*) Zur Illustration der Formel (II a) dient die als Anhang beigegebene Tabelle, welche die Fälle $n = 1$ bis $n = 10$ umfasst. Durch Vertauschung der d_i mit den f_i und zugleich der y_{n-i} mit den Potenzen $\{-f(x)\}^i$ leistet die Tabelle das Entsprechende für die Formel (III).

Der Vergleich der Entwickelungen (IIa) und (III) lehrt, dass die Coefficienten $C_{n,n-\varrho}$ und $\Gamma_{n,n-\varrho}$, ganze, ganzzahlige, homogene und isobare Functionen der Argumente $d_i x$ resp. f_i $(i=1,2,\ldots,n)$, durch Vertauschung derselben genau in einander übergehen, das heisst, die nämlichen Zahlencoefficienten besitzen.

Nun haben im Allgemeinen sowohl die $d_i x$, als die f_i den Charakter von n willkürlichen und unabhängigen Variabeln.

Mithin gelten alle algebraischen Relationen zwischen den $\Gamma_{n,n-\varrho}$, bei deren Herleitung keinerlei algebraische Beziehung zwischen den f_i in Frage kam, genau in derselben Weise zwischen den $C_{n,n-\varrho}$.

§ 2.

Lineare Relationen zwischen den C.

Nach Nr. (7) der vorangehenden Abhandlung genügt die Function E_n (5) der recurrenten Functionalgleichung:

$$\text{(IV)}\quad E_n+f_1 E_{n-1}+f_2 f E_{n-2}+f_3 f^2 E_{n-3}+\cdots+f_{n-1} f^{n-2} E_1+f_n f^{n-1}=0.$$

Setzt man hier die Entwickelung (III) ein:

$$\text{(III)}\quad (-1)^k E_k=\Gamma_{k,0}+(-1) f\Gamma_{k,1}+(-1)^2 f^2\Gamma_{k,2}+\cdots+(-1)^{k-1} f^{k-1}\Gamma_{k,k-1},$$

und sieht das Ergebniss als eine in f identisch verschwindende Gleichung an, so fliessen daraus n Beziehungen zwischen den Γ und den f_i. Von diesen haben $n-1$ die recurrirende Form:

$$\text{(6)}\quad \Gamma_{n,k}=f_1\Gamma_{n-1,k}+f_2\Gamma_{n-2,k-1}+f_3\Gamma_{n-3,k-2}+\cdots+f_{k+1}\Gamma_{n-(k+1),0}$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-2)$$

während die letzte lautet:

$$\text{(7)}\qquad \Gamma_{n,n-1}=f_n.$$

Sieht man umgekehrt in diesen Relationen (6), (7) die f_i als beliebig gegebene Grössen an, so sind damit die $\Gamma_{n,k}$ eindeutig und völlig bestimmt.

Somit gilt, nach den am Schlusse von § 1 gemachten Bemerkungen, für die Entwickelungscoefficienten C von $d_n y=\frac{d^n y}{\Pi(n)}$:

$$\text{(IIa)}\qquad d_n y=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} y_\varrho C_{n,n-\varrho}\qquad \left(y_\varrho=\frac{1}{\Pi(\varrho)}\,\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho}\right)$$

ein entsprechendes Resultat, nämlich, wenn man noch der Kürze halber $\frac{d^i x}{\Pi(i)}=d_i x$ durch d_i ersetzt:

„*Die Coefficienten C sind durch die* $\frac{n(n+1)}{2}$ *linearen Relationen**):

$$
\text{(V)}\quad \begin{cases} C_{n,k} = d_1 C_{n-1,k} + d_2 C_{n-2,k-1} + d_3 C_{n-3,k-2} + \cdots + d_{k+1} C_{n-(k+1),0} \\ \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-2),\ (n=1,2,3,\ldots,n), \\ C_{n,n-1} = d_n \end{cases}
$$

eindeutig charakterisirt“.

Es ist nun merkwürdig, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ ersten dieser in den C linearen Relationen, welche als Coefficienten noch die Differentiale d_i mit sich führen, vollständig durch eine gleiche Anzahl solcher ersetzt werden können, die in den C bis zum zweiten Grade ansteigen, deren Coefficienten aber nur ganze Zahlen sind.

§ 3.

Quadratische Relationen zwischen den C.

Specialisirt man den Satz (A) der vorangehenden Abhandlung, indem man die Function φ daselbst gleich der Einheit nimmt, so zeigt sich, dass die Entwickelung der Differenz $\mathsf{E}_n \mathsf{E}_{n-s} - \mathsf{E}_{n-s_1} \mathsf{E}_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2 = 2, 3, \ldots, n)$ nach steigenden Potenzen von f erst mit der $(n-s+1)^{\text{ten}}$ Potenz dieser Grösse beginnt, während die Coefficienten sämmtlicher voraufgehenden Potenzen verschwinden. Durch Substitution der Entwickelungen (III) gelangt man danach zu folgenden $n-s+1$ Relationen zwischen den Γ:

$$
(8)\quad \begin{cases} \Gamma_{n,0}\Gamma_{n-s,0} = \Gamma_{n-s_1,0}\Gamma_{n-s_2,0}, \\ \Gamma_{n,0}\Gamma_{n-s,1} + \Gamma_{n,1}\Gamma_{n-s,0} = \Gamma_{n-s_1,0}\Gamma_{n-s_2,1} + \Gamma_{n-s_2,0}\Gamma_{n-s_1,1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Gamma_{n,1}\ \Gamma_{n-s,n-s-1} + \Gamma_{n,2}\ \Gamma_{n-s,n-s-2} + \cdots + \Gamma_{n,n-s}\ \Gamma_{n-s,0} \\ \Gamma_{n-s_1,0}\Gamma_{n-s_2,n-s} + \Gamma_{n-s_1,1}\Gamma_{n-s_2,n-s-1} + \cdots + \Gamma_{n-s_1,n-s}\Gamma_{n-s_2,0} \end{cases}
$$

welche alle, mit Ausnahme der letzten, mit dem Factor $\Gamma_{n,0}$ anfangen.

---

*) Um Missverständnisse auszuschliessen, sei bemerkt, dass bezüglich der „Anzahl“ solcher Relationen, wie (V), eine doppelte Sprechweise Berechtigung hat. Jenachdem man hervorheben will, dass ein derartiges System von recurrenten Gleichungen für einen vorgeschriebenen Werth von n aufgestellt sein soll, oder aber, dass dieses System mit allen vorhergehenden, d. i. kleineren Werthen von n entsprechenden, zusammengefasst werden soll, wird man den Ausdruck wählen, dass die Anzahl der Gleichungen (V) gleich n, oder aber gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ sei.

Während diese, in den Γ quadratischen Relationen nur die positive oder negative Einheit als Coefficienten aufweisen, ist die sich an die nächst höhere d. i. die $(n-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f (bei der Entwickelung von $E_n E_{n-s} - E_{n-s_1} E_{n-s_2}$) knüpfende Relation von anderer Art. Wie nämlich aus der Formel (22) der citirten Abhandlung hervorgeht, wenn man wiederum $\varphi = 1$ setzt, erhält man mittels (III):

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Gamma_{n,2}\Gamma_{n-s,n-s-1} + \Gamma_{n,3}\Gamma_{n-s,n-s-2} + \cdots + \Gamma_{n,n-s+1}\Gamma_{n-s,0} \\
&- \{\Gamma_{n-s_1,0}\Gamma_{n-s_2,n-s+1} + \Gamma_{n-s_1,1}\Gamma_{n-s_2,n-s} + \cdots + \Gamma_{n-s_1,n-s+1}\Gamma_{n-s_2,0}\} \\
&= (-f_1)^{s-2}[\Gamma_{n-s+2,2}\Gamma_{n-s,n-s-1} + \Gamma_{n-s+2,3}\Gamma_{n-s,n-s-2} + \cdot\cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\cdot + \Gamma^{*}_{n-s+2,n-s+1}\Gamma_{n-s,0} \\
&\qquad\qquad - \{\Gamma_{n-s+1,1}\Gamma_{n-s+1,n-s} + \Gamma_{n-s+1,2}\Gamma_{n-s+1,n-s-1} + \cdot\cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\cdot + \Gamma_{n-s+1,n-s}\Gamma_{n-s+1,1}\}].
\end{aligned}
\right.
$$

Man bemerkt, dass auf der rechten Seite eine Potenz von f_1 als Factor auftritt, und in diesem Sinne besitzt die Formel (9) den Charakter der in § 2 untersuchten linearen Relationen zwischen den Γ.

In den Gleichungen (8) kann man ohne Weiteres die Γ durch die C (IIa) ersetzen, während in (9) die gleichzeitige Vertauschung von f_1 mit d_1 erforderlich ist. Von den weiteren Beziehungen zweiten und höheren Grades zwischen den Γ resp. C, wie sie in den Sätzen (B), (C) u. s. f. der vorigen Arbeit implicite enthalten sind, mag hier Abstand genommen werden, um so mehr, als dieselben nur als Consequenzen der quadratischen Relationen (8), (9) erscheinen.

Dagegen soll jetzt der Frage näher getreten werden, ob sich nicht aus den letztgenannten ein System von einander unabhängiger Gleichungen ausscheiden lässt, welches die noch übrigen zur Folge hat, und zugleich den $n-1$ ersten linearen Functionalgleichungen (V) äquivalent ist.

§ 4.

Ueber ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen, ganzzahligen, quadratischen Functionalgleichungen für die C.

Ertheilt man in den Gleichungen (8) dem Index n einen vorgeschriebenen Werth (> 1), so sind die drei ganzen, positiven Zahlen s, s_1, s_2 bis auf die Beziehung $s = s_1 + s_2$ und die Beschränkungen $2 \leqq s \leqq n$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ noch willkürlich wählbar. Aus dieser grossen Mannigfaltigkeit soll das durch die Wahl $s = 2$, mithin $s_1 = s_2 = 1$ bestimmte System von $n-1$ Gleichungen herausgenommen werden. Indem wir gleich die C statt der Γ substituiren, kommt:

$$
(\mathrm{VI})\left\{\begin{array}{l}
C_{n,0}\quad C_{n-2,0}=C_{n-1,0}C_{n-1,0},\\
C_{n,0}\quad C_{n-2,1}+C_{n,1}\quad C_{n-2,0}=C_{n-1,0}C_{n-1,1}+C_{n-1,1}C_{n-1,0},\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
C_{n,0}\quad C_{n-2,n-3}+C_{n,1}\quad C_{n-2,n-4}+\cdots+C_{n,n-3}\quad C_{n-2,0}=\\
C_{n-1,0}C_{n-1,n-3}+C_{n-1,1}C_{n-1,n-4}+\cdots+C_{n-1,n-3}C_{n-1,0},\\
C_{n,1}\quad C_{n-2,n-3}+C_{n,2}\quad C_{n-2,n-4}+\cdots+C_{n,n-2}\quad C_{n-2,0}=\\
C_{n-1,0}C_{n-1,n-2}+C_{n-1,1}C_{n-1,n-3}+\cdots+C_{n-1,n-2}C_{n-1,0}.
\end{array}\right.
$$

Das im Falle $n=2$ auftretende Zeichen $C_{0,0}$ (das nur der Gleichförmigkeit halber eingeführt ist) hat hierbei die Bedeutung der positiven Einheit.

Man kann das System (VI) als ein solches von $n-1$ *linearen* Gleichungen in den $n-1$ Unbekannten $C_{n,n-2}, C_{n,n-3}, \ldots, C_{n,1}, C_{n,0}$ auffassen. Um über die Auflösbarkeit der ersteren nach den letzteren zu entscheiden, bilde man die Determinante des Systems:

$$
(10)\qquad \left|\begin{array}{ccccccc}
C_{n-2,0} & C_{n-2,1} & C_{n-2,2} & \cdot\;\cdot & \cdot & C_{n-2,n-3} & 0\\
0 & C_{n-2,0} & C_{n-2,1} & \cdot\;\cdot & \cdot & C_{n-2,n-4} & C_{n-2,n-3}\\
0 & 0 & C_{n-2,0} & \cdot\;\cdot & \cdot & C_{n-2,n-5} & C_{n-2,n-4}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & \cdot & 0\;0 & 0 & 0 & C_{n-2,0}
\end{array}\right|.
$$

Dieselbe hat offenbar den Werth $C_{n-2,0}^{n-1}$, besitzt also einen von Null verschiedenen Werth, falls die Grösse $C_{n-2,0}$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird. Nun lehrt die erste der Gleichungen (VI), wenn man darin succ. $n=2, 3, 4, \ldots, n$ setzt, dass

$$
(11)\qquad C_{2,0}=C_{1,0}^{2};\quad C_{3,0}=C_{1,0}^{3};\ \ldots;\ C_{n,0}=C_{1,0}^{n}.
$$

Demnach wird die Determinante (10) gleich $C_{1,0}^{(n-1)(n-2)}$, verschwindet also nicht, wenn man für die Grösse $C_{1,0}$, welche als eine erste willkürliche Constante des Systems (VI) angesehen werden kann, den Werth Null ausschliesst.

Alsdann gestatten die $n-1$ Systeme von Gleichungen (VI), welche der Reihe nach den Werthen $2, 3, 4, \ldots, n$ des Index n correspondiren, Schritt für Schritt je eine einzige Auflösung nach den jeweiligen Unbekannten $C_{n,n-2}, C_{n,n-3}, \ldots, C_{n,0}$.

Auf diese Weise stellen sich von den $\frac{n(n+1)}{2}$, in (VI) vorkommenden Grössen $C_{n,k}$ vermöge eben dieser $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen $\frac{n(n-1)}{2}$, nämlich die $C_{i,k}\left\{\begin{array}{l} i=2, 3, \ldots, n\\ k=0, 1, \ldots, i-2\end{array}\right\}$ als rationale Functionen der n noch übrigen $C_{i,i-1}$ dar, die, weil sie durch die Bedingungen (VI)

allein nicht bestimmbar sind, als die willkürlichen Constanten der letzteren figuriren. Und zwar wird der Nenner der genannten rationalen Functionen immer nur aus einer Potenz von $C_{1,0}$ gebildet, wärend die Coefficienten der Zähler ganze Zahlen sind.

Aber diese rationalen Functionen der $C_{i,i-1}$ reduciren sich thatsächlich auf ganze Functionen ihrer Argumente. Denn eine derartige Auflösung der Gleichungen (VI) kennen wir von früher her: es sind dies die Coefficienten C der y_ϱ in der Entwickelung (IIa) von $d_n y$, wobei die $C_{i,i-1}$ in die d_i übergehen. Die letzteren Grössen konnten aber, wie das die linearen Functionalgleichungen (V) deutlich zeigen, ebenfalls als n willkürliche und von einander unabhängige Constanten aufgefasst werden. Wir sind somit zu dem Ergebnisse gelangt*):

„*Durch die* $\frac{n(n-1)}{2}$ *quadratischen Relationen* (VI) *werden die Grössen* $C_{i,k}$ $\begin{pmatrix} i=2,3,\ldots,n \\ k=0,1,\ldots,i-2 \end{pmatrix}$ *in eindeutiger Weise als ganze, ganzzahlige Functionen der* $C_{i,i-1}$ *definirt. Durch Vertauschung der* $C_{i,i-1}$ *mit den* $d_i = \frac{1}{i!} d^i x$ *gehen die in Rede stehenden* $C_{i,k}$ *unmittelbar über in die entsprechenden Entwickelungscoefficienten* (IIa) *des* n^{ten} *Differentiales von* y".

Damit erweisen sich wirklich die $\frac{n(n-1)}{2}$ quadratischen Relationen (VI) als äquivalent mit den $\frac{n(n-1)}{2}$, unter (V) an erster Stelle aufgeführten linearen Relationen, während die noch hinzutretenden Substitutionen $C_{n,n-1} = d_n$ beiden gemeinsam sind.

Es erübrigt noch die Beantwortung der Frage, in welcher Weise die nach Ausschluss der fundamentalen Gleichungen (VI) noch verbleibenden quadratischen Relationen (8), d. s. die den Werthen $s = 3, 4, \ldots, n$ zugehörigen, von den ersteren abhängen.

Sei z. B. $n=3$, $s=3$, $s_1=1$, $s_2=2$, so liefert (8) die eine Relation:

$$C_{3,0} - C_{1,0}C_{2,0} = 0.$$

Nun ist identisch:

$$C_{1,0}(C_{3,0} - C_{1,0}C_{2,0}) = C_{2,0}(C_{2,0} - C_{1,0}^2) + (C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2),$$

während die Gleichungen:

$$C_{2,0} - C_{1,0}^2 = 0, \quad C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2 = 0$$

dem Systeme (VI) angehören.

---

*) Dieser Satz lässt auch den Grund erkennen, warum in den Sätzen (A_1), (C_1), (D_1), (E) der voraufgehenden Arbeit der Grösse $\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ eine fundamentale Rolle zukommt.

Sei ferner $n = 4$, $s = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, so ergeben sich aus (8) zwei Relationen, deren erste lautet:

$$C_{4,0} - C_{1,0}\,C_{3,0} = 0.$$

Es gilt aber wiederum die Identität:

$$C_{1,0}\,C_{2,0}(C_{4,0} - C_{1,0}\,C_{3,0}) = C_{2,0}\,C_{3,0}\,(C_{2,0} - C_{1,0}^2) + C_{3,0}\,(C_{1,0}\,C_{3,0} - C_{2,0}^2) + C_{1,0}\,(C_{2,0}\,C_{4,0} - C_{3,0}^2)$$

und die gleich Null gesetzten Klammerausdrücke rechter Hand liefern gleichfalls Relationen des Systems (VI). In beiden Beispielen ist eine Gleichung (8) ($s > 2$) mit Gleichungen (VI) derart linear verknüpft, dass die begleitenden Factoren die Form ganzer ganzzahliger Functionen der C besitzen.

Um das Entsprechende allgemein nachzuweisen, und zugleich die Mittel zu einer vollständigen Aufstellung der fraglichen Verknüpfungen zu gewinnen, greifen wir noch einmal auf die Entstehung der Gleichungen (8) zurück. Die Existenz der letzteren war nur der Ausdruck der Thatsache, dass bei der Entwickelung der Differenz

$$\mathsf{E}_n \mathsf{E}_{n-s} - \mathsf{E}_{n-s_1} \mathsf{E}_{n-s_2} \quad (s = s_1 + s_2 = 2, 3, \ldots, n)$$

nach steigenden Potenzen von f der erste nicht verschwindende Coefficient der von f^{n-s+1} war. Die genannten Differenzen zerlege man ebenfalls in zwei Gruppen, jenachdem s gleich oder grösser als Zwei ausfällt:

$$\text{(A)}\ \mathsf{E}_n \mathsf{E}_{n-2} - \mathsf{E}_{n-1}^2, \quad \text{(B)}\ \mathsf{E}_n \mathsf{E}_{n-s} - \mathsf{E}_{n-s_1} \mathsf{E}_{n-s_2}, \ (s = s_1 + s_2 = 3, 4, \ldots, n).$$

Wir werden zuvörderst die zwischen den Gruppen (A) und (B) bestehenden Verknüpfungen studiren: dann werden sich diejenigen zwischen den Gleichungen (8) ($s > 2$) und (VI) als eine unmittelbare Folge daraus ableiten lassen.

Aus der Gruppe (B) greife man zunächst den Theil heraus, der erhalten wird, indem man nicht nur n, sondern auch s je einen festen Werth beilegt. Ein solcher Theil umfasst nur Ausdrücke (B) von ein und demselben Gewicht $g = 2n - s$. Alle Individuen des Theiles lassen sich offenbar durch blosse Addition aus den folgenden zusammensetzen:

$$(\mathrm{B}_1)\left\{\begin{array}{l} \mathsf{E}_g \mathsf{E}_0 - \mathsf{E}_{g-1} \mathsf{E}_1,\ \mathsf{E}_{g-1} \mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_{g-2} \mathsf{E}_2, \ldots, \mathsf{E}_{\frac{g}{2}+2}\, \mathsf{E}_{\frac{g}{2}-2} - \mathsf{E}_{\frac{g}{2}+1}\, \mathsf{E}_{\frac{g}{2}-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{resp.}\ \mathsf{E}_{\frac{g+3}{2}}\, \mathsf{E}_{\frac{g-3}{2}} - \mathsf{E}_{\frac{g+1}{2}}\, \mathsf{E}_{\frac{g-1}{2}}, \end{array}\right.$$

jenachdem g gerade oder ungerade ist.

Bedient man sich des abkürzenden Zeichens:

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ k_1, & k_2, & k_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{E}_{i_1}, & \mathsf{E}_{i_2}, & \mathsf{E}_{i_3} \\ \mathsf{E}_{k_1}, & \mathsf{E}_{k_2}, & \mathsf{E}_{k_3} \\ \mathsf{E}_{i_1} + \lambda \mathsf{E}_{k_1}, & \mathsf{E}_{i_2} + \lambda \mathsf{E}_{k_2}, & \mathsf{E}_{i_3} + \lambda \mathsf{E}_{k_3} \end{vmatrix},$$

wo λ einen willkürlichen, ganzzahligen Parameter bedeutet, so lassen sich zwischen den Differenzen (A) und (B_1), wofern man in letzteren succ. $g = 3, 4, \ldots, g$ nimmt, folgende Beziehungen ansetzen:

$$(\mathrm{VII})\left\{\begin{array}{l} g=3)\ \begin{pmatrix} 0, 1, 2 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} = 0; \quad g=4)\ \begin{pmatrix} 0, 2, 3 \\ 1, 3, 4 \end{pmatrix} = 0; \\ g=5)\ \begin{pmatrix} 0, 3, 4 \\ 1, 4, 5 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 4 \end{pmatrix} = 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g=g)\ \begin{pmatrix} 0, g-2, g-1 \\ 1, g-1, g \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 1, g-3, g-2 \\ 2, g-2, g-1 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 2, g-4, g-3 \\ 3, g-3, g-2 \end{pmatrix} = 0, \\ \ldots \begin{pmatrix} \frac{g}{2}-2, & \frac{g}{2}, & \frac{g}{2}+1 \\ \frac{g}{2}-1, & \frac{g}{2}+1, & \frac{g}{2}+2 \end{pmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{pmatrix} \frac{g-3}{2}, & \frac{g-1}{2}, & \frac{g+1}{2} \\ \frac{g-1}{2}, & \frac{g+1}{2}, & \frac{g+3}{2} \end{pmatrix} = 0, \end{array}\right.$$

jenachdem g gerade oder ungerade ist.

Mittels dieser Beziehungen stellen sich der Reihe nach sämmtliche Differenzen (B_1) und damit auch sämmtliche Differenzen (B) als ganze, lineare (homogene) Functionen von Differenzen (A) dar, wobei die Coefficienten gebrochene (ganzzahlige) Functionen der E selbst und der willkürlichen ganzen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ werden. Zugleich ist einleuchtend, dass mit den Beziehungen (VII) alle überhaupt möglichen Relationen zwischen den Ausdrücken (A) und (B) erschöpft sind, insofern jede weitere auf eine Combination jener zurückführbar sein muss.

Aber auch die ursprüngliche Frage nach der Gesammtheit der zwischen den Gleichungen (VI) und (8) ($s > 2$) herrschenden Relationen ist hiermit erledigt, denn es sind dieselben in den Beziehungen (VII) implicite enthalten, wie aus Folgendem hervorgeht.

Die Gleichungen (VI) und (8) ($s > 2$) fliessen aus der Entwickelung der Bildungen (A) und (B), oder einfacher der Bildungen (A) und (B_1) ($g = 3, 4, \ldots$) nach steigenden Potenzen von f, indem $\mathsf{E}_i \mathsf{E}_k - \mathsf{E}_l \mathsf{E}_m$ erst mit der $(k+1)^{\text{ten}}$ Potenz von f beginnt, falls k den kleinsten der vier Indices i, k, l, m darstellt.

Nun ist in irgend einer der Beziehungen (VII), etwa der $(k+1)^{\text{ten}}$, der letzten zum Gewichte g gehörigen Reihe:

$$(13)\qquad \left\{\begin{matrix} k, & g-(k+2), & g-(k+1) \\ k+1, & g-(k+1), & g-k \end{matrix}\right\} = 0 \left(k=0, 1, \cdots, \frac{g-2}{2} \text{ resp. } \frac{g-3}{2}\right)$$

k der kleinste der sechs auftretenden Indices. Ordnet man also die Determinante linker Hand nach den Elementen der letzten Reihe, und entwickelt nach Potenzen von f, so verschwinden die Coefficienten von $f^0, f^1, \ldots$ bis f^k incl. Durch das Verschwinden der Determinante wird aber die der Gruppe (B_1) zugehörige Differenz $\mathsf{E}_{g-k}\mathsf{E}_k - \mathsf{E}_{g-(k+1)}\mathsf{E}_{k+1}$ vom Gewichte g als lineare ganze Function der ebenfalls zu (B_1) gehörenden Differenz $\mathsf{E}_{g-(k+1)}\mathsf{E}_k - \mathsf{E}_{g-(k+2)}\mathsf{E}_{k+1}$ vom Gewichte $g-1$ und der zu (A) gehörenden Differenz $\mathsf{E}_{g-k}\,\mathsf{E}_{g-(k+2)} - \mathsf{E}^2_{g-(k+1)}$ ausgedrückt. Folglich wird auch jede, aus der erstgenannten Differenz nach Früherem überhaupt ableitbare Relation (8) linear ausgedrückt durch eine ebensolche, aber von nächst niedrigerem Gewichte, und eine der Relationen (VI). Setzt man diesen Process fort, indem man das Gewicht g der bezüglichen Differenzen (B_1) genügend weit herunterdrückt, und substituirt schliesslich wieder die C statt der Γ, so gelangt man zu dem Satze:

„*Schafft man in den Relationen* (8) ($s > 2$), *nachdem noch die* Γ *durch die C ersetzt sind, sowie in den Functionalrelationen* (VI) *alle Glieder auf die linke Seite, so ist eine jede der linken Seiten von* (8) *mit einer Anzahl linker Seiten von* (VI) *durch eine lineare Identität verknüpft, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der C sind. Diese Identitäten sind in den Determinantengleichungen* (VII) *implicite enthalten*“.

Zur Erläuterung mögen die früher direct behandelten Fälle $n=3$, $s=3$, $s_1=1$, $s_2=2$ und $n=4$, $s=4$, $s_1=s$, $s_2=3$ dienen.

Die beiden ersten Beziehungen (VII) ergeben, wenn man den Parameter λ beidemal gleich Null setzt:

$$\mathsf{E}_1(\mathsf{E}_3-\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2)=\mathsf{E}_2(\mathsf{E}_2-\mathsf{E}_1^2)\quad+(\mathsf{E}_1\mathsf{E}_3-\mathsf{E}_2^2),$$
$$\mathsf{E}_2(\mathsf{E}_4-\mathsf{E}_1\mathsf{E}_3)=\mathsf{E}_3(\mathsf{E}_3-\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2)+(\mathsf{E}_2\mathsf{E}_4-\mathsf{E}_3^2)$$

also auch durch geeignete Combinirung:

$$\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2(\mathsf{E}_4-\mathsf{E}_1\mathsf{E}_3)=\mathsf{E}_2\mathsf{E}_3(\mathsf{E}_2-\mathsf{E}_1^2)+\mathsf{E}_3(\mathsf{E}_1\mathsf{E}_3-\mathsf{E}_2^2)+\mathsf{E}_1(\mathsf{E}_2\mathsf{E}_4-\mathsf{E}_3^2).$$

Setzt man die von f freien Glieder zu beiden Seiten der ersten resp. der dritten Identität einander gleich, so wird man, nach Vertauschung der Γ mit den C, gerade zu den beiden, damals erhaltenen Formeln geführt:

$$C_{1,0}(C_{3,0}-C_{1,0}C_{2,0})=C_{2,0}(C_{2,0}-C_{1,0}^2)+(C_{1,0}C_{3,0}-C_{2,0}^2),$$
$$C_{1,0}C_{2,0}(C_{4,0}-C_{1,0}C_{3,0})=C_{2,0}C_{3,0}(C_{2,0}-C_{1,0}^2)+C_{3,0}(C_{1,0}C_{3,0}-C_{2,0}^2)$$
$$+C_{1,0}(C_{2,0}C_{4,0}-C_{3,0}^2).$$

§ 5.

Zur Begründung der Bruno'schen Formel.

Zum Schlusse möge noch ein neuer, kurzer Beweis*) der von H. Faà di Bruno gegebenen Grundformel (I) seinen Platz finden, der die Form der darin auftretenden Coefficienten zu einer sehr durchsichtigen macht.

Sei wiederum φ eine Function von x, und x eine solche von y. Der n^{te} Differentialquotient von φ nach y sei mit $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ bezeichnet; der, durch $\Pi(\varrho)$ dividirte ϱ^{te} Differentialquotient von φ nach x mit φ_ϱ, und analog der, durch $\Pi(k)$ dividirte k^{te} Differentialquotient von x nach y mit x_k.

Endlich bedeute Δy eine beliebige Aenderung von y, Δx die entsprechende von x und $\Delta\varphi$ diejenige von φ.

Die Grösse $\frac{1}{\Pi(n)}\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ erscheint als Coefficient von $(\Delta y)^n$ in der Taylor'schen Entwickelung von $\Delta\varphi = \varphi\big(x(y+\Delta y)\big) - \varphi\big(x(y)\big)$. Diese Entwickelung kann aber auf doppelte Art vorgenommen werden. Entweder ersetzt man unter dem Functionszeichen φ von vornherein x durch seine Function in y und entwickelt direct nach Potenzen von Δy: dabei spielt y die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, und die Zwischenvariable x ist gleich zu Anfang eliminirt. Oder aber es lässt sich $\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$ zunächst nach Potenzen von Δx entwickeln, wobei x als unabhängige Veränderliche fungirt; wird sodann nicht nur x durch die Function $x(y)$ ersetzt, sondern auch $\Delta x = x(y+\Delta y) - x(y)$ von Neuem (nach Taylor) nach Potenzen von Δy entwickelt und die letztere Entwickelung überall in die ersterwähnte eingeführt, und wird endlich nach Potenzen von Δy geordnet, so resultirt eine Entwickelung von $\Delta\varphi$ nach Potenzen von Δy, welche mit der ursprünglich direct abgeleiteten nothwendig Glied für Glied übereinstimmen muss. Die Vergleichung des beiderseitigen Coefficienten von $(\Delta y)^n$ stellt somit $\frac{1}{\Pi(n)}\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ als ganze, rationale Function der φ_ϱ und x_k $\begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots n\\ k = 1, 2, \ldots n\end{pmatrix}$ dar.

Man hat demnach zuvörderst:

$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \sum_1^\infty (\Delta x)^\varrho \varphi_\varrho. \tag{14}$$

---

*) Das diesem Beweise zu Grunde liegende Princip verdanke ich einer gütigen Mittheilung von Herrn R. Dedekind.

Die Einführung von y und Δy geschieht durch:

$$(15) \qquad \Delta x = x(y+\Delta y) - x(y) = \sum_1^\infty (\Delta y)^k x_k.$$

Mithin geht (14) über in:

$$(16) \qquad \Delta \varphi = \sum_1^\infty \varphi_\varrho \{\Delta y . x_1 + (\Delta y)^2 x_2 + \cdots + (\Delta y)^n x_n + \cdots\}^\varrho,$$

wo auch in den φ_ϱ nach Ausführung der bez. Differentiation nach x das letztere Argument durch seine Function $x(y)$ in y zu ersetzen ist. Auf der rechten Seite von (16) hat man den Coefficienten $(\Delta y)^n$ aufzusuchen. Die daselbst figurirenden Klammerreihen dürfen desshalb bei der n^{ten} Potenz Δy abgebrochen werden: desgleichen können für den Exponenten ϱ nur die Werthe $\varrho = 1, 2, \ldots, n$ in Betracht kommen.

Somit wird $\frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ gleich dem Factor von $(\Delta y)^n$ in der endlichen Entwickelung:

$$(17) \qquad \sum_1^n {}^\varrho \varphi_\varrho \{(\Delta y) x_1 + (\Delta y)^2 x_2 + \cdots + (\Delta y)^n x_n\}^\varrho.$$

Die letztere wird durch den Polynomialsatz geliefert, wie folgt:

$$(18) \qquad \begin{cases} \sum_1^n {}^\varrho \varphi_\varrho \sum (\Delta y)^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1)\Pi(k_2)\cdots\Pi(k_n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \varrho \quad (k_i \geqq 0) \quad \big(\Pi(0) = 1\big). \end{cases}$$

Soll also hier der Coefficient von $(\Delta y)^n$ herausgehoben werden, so sind die Indices k_i der weiteren Bedingung zu unterwerfen:

$$(19) \qquad k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n,$$

und es ergiebt sich schliesslich (für die so eingeschränkten k_i)

$$(20) \qquad \frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \sum^{\varrho, x} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1)\Pi(k_2)\ldots\Pi(k_n)} \varphi_\varrho x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}.$$

Dies ist aber die Bruno'sche Formel (I), wenn man sich noch für $x = x(y)$ des Functionszeichens $\psi = \psi(y)$ bedient.

Clausthal, December 1889.

Tabelle der Entwickelungscoefficienten von $d^n y$ für $n = 1$ bis $n = 10$.

$d_n y$	y_n	y_{n-1}	y_{n-2}	y_{n-3}	y_{n-4}	y_{n-5}	y_{n-6}	y_{n-7}	y_{n-8}	y_{n-9}
$n=1$	d_1									
$n=2$	d_1^2	d_2								
$n=3$	d_1^3	$2d_1d_2$	d_3							
$n=4$	d_1^4	$3d_1^2d_2$	$2d_1d_3+d_2^2$	d_4						
$n=5$	d_1^5	$4d_1^3d_2$	$3d_1^2d_3$ $+3d_1d_2^2$	$2d_1d_4+2d_2d_3$	d_5					
$n=6$	d_1^6	$5d_1^4d_2$	$4d_1^3d_3$ $+6d_1^2d_2^2$	$3d_1^2d_4+6d_1d_2d_3$ $+d_2^3$	$2d_1d_5+2d_2d_4+d_3^2$	d_6				
$n=7$	d_1^7	$6d_1^5d_2$	$5d_1^4d_3$ $+10d_1^3d_2^3$	$4d_1^3d_4+12d_1^2d_2d_3$ $+4d_1d_2^3$	$3d_1^2d_5+6d_1d_2d_4$ $+3d_1d_3^2+3d_2^2d_3$	$2d_1d_6+2d_2d_5$ $+2d_3d_4$	d_7			
$n=8$	d_1^8	$7d_1^6d_2$	$6d_1^5d_3$ $+15d_1^4d_2^2$	$5d_1^4d_4+20d_1^3d_2d_3$ $+10d_1^2d_2^3$	$4d_1^3d_5+12d_1^2d_2d_4$ $+6d_1^2d_3^2$ $+12d_1d_2^2d_3+d_2^4$	$3d_1^2d_6+6d_1d_2d_5$ $+6d_1d_3d_4+3d_2^2d_4$ $+3d_2d_3^2$	$2d_1d_7+2d_2d_6$ $+2d_3d_5+d_4^2$	d_8		
$n=9$	d_1^9	$8d_1^7d_2$	$7d_1^6d_3$ $+21d_1^5d_2^2$	$6d_1^5d_4+30d_1^4d_2d_3$ $+20d_1^3d_2^3$	$5d_1^4d_5+20d_1^3d_2d_4$ $+10d_1^3d_3^2$ $+30d_1^2d_2^2d_3+5d_2^4$	$4d_1^3d_6+12d_1^2d_2d_5$ $+12d_1^2d_3d_4$ $+12d_1d_2^2d_4$ $+12d_1d_2d_3^2$ $+4d_2^3d_3$	$3d_1^2d_7+6d_1d_2d_6$ $+6d_1d_3d_5+3d_1d_4^2$ $+3d_2^2d_5+6d_2d_3d_4$ $+d_3^3$	$2d_1d_8+2d_2d_7$ $+2d_3d_6+2d_4d_5$	d_9	
$n=10$	d_1^{10}	$9d_1^8d_2$	$8d_1^7d_3$ $+28d_1^6d_2^2$	$7d_1^6d_4+42d_1^5d_2d_3$ $+35d_1^4d_2^3$	$6d_1^5d_5+30d_1^4d_2d_4$ $+15d_1^4d_3^2$ $+60d_1^3d_2^2d_3$ $+15d_1^2d_2^4$	$5d_1^4d_6+20d_1^4d_2d_5$ $+20d_1^3d_3d_4$ $+30d_1^2d_2^2d_4$ $+30d_1^2d_2d_3^2$ $+20d_1d_2^3d_3+d_2^5$	$4d_1^3d_7+12d_1^2d_2d_6$ $+12d_1^2d_3d_5$ $+6d_1^2d_4^2$ $+12d_1d_2^2d_5$ $+24d_1d_2d_3d_4$ $+4d_1d_3^3+4d_2^3d_4$ $+6d_2^2d_3^2$	$3d_1^2d_8+6d_1d_2d_7$ $+6d_1d_3d_6+6d_1d_4d_5$ $+3d_2^2d_6+3d_2d_4^2$ $+6d_2d_3d_4+3d_3^2d_4$	$2d_1d_9$ $+2d_2d_8$ $+2d_3d_7$ $+2d_4d_6$ $+d_5^2$	d_{10}
	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	$C_{n,2}$	$C_{n,3}$	$C_{n,4}$	$C_{n,5}$	$C_{n,6}$	$C_{n,7}$	$C_{n,8}$	$C_{n,9}$

Erklärung: $d_n y = \frac{d^n y}{\Pi(n)}$, $d_k = d_k x = \frac{d^k x}{\Pi(k)}$, $y_i = \frac{1}{\Pi(i)} \frac{d^i y}{dx^i}$.

Ersetzt man die y_{n-i} durch $(-1)^i f^i(x)$, die d_k durch $f_k = \frac{1}{\Pi(k)} \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, so hat man die Entwickelung von

$$(-1)^n E_n = (-1)^n \frac{1}{\Pi(n)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{1}{f(x)} \right\}$$ nach Potenzen von $f(x)$.

Eintheilung der Strahlencongruenzen 2. Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Es ist bekannt, dass Herr Kummer in einer umfangreichen Untersuchung, welche er in den „Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1866“ veröffentlichte, eine Abzählung der Congruenzen 2. Ordnung unternommen hat und zwar zunächst derjenigen, welche Brennlinien haben, und dann derer, welche ohne solche ausgezeichnete Linien sind.

Den weitaus grösseren Theil der Arbeit nimmt die Behandlung der letzteren allgemeineren Congruenzen ein; durch die grundlegenden Ergebnisse, welche Herr Kummer für diese Congruenzen gewonnen hat, insbesondere über die Zahl ihrer singulären Punkte, über die Lage dieser Punkte und ihrer Kegel, über die Brennflächen der Congruenzen und über die Congruenzen, welche mit einer gegebenen Congruenz 2. Ordnung dieselbe Brennfläche haben, gehört diese Abhandlung, mit welcher ein ganz neues Gebiet der Geometrie eröffnet wurde, unzweifelhaft zu den hervorragendsten geometrischen Schriften unserer Zeit.

Ihr hoher Werth wird gewiss keine Minderung erleiden, wenn sich nun, nach fast 25jähriger Beschäftigung mit der Liniengeometrie, herausstellt, dass die Abzählung der Congruenzen 2. Ordnung *mit* Brennlinien in der Kummer'schen Abhandlung (§ 4 und 5) nicht vollständig ist.

Einige gelegentlich gefundene Beispiele von Congruenzen 2. Ordnung mit einer Brennlinie, welche unter die von Herrn Kummer aufgezählten nicht fallen, — ich erwähne hier nur die Congruenz (2, 2) mit gerader Brennlinie, welche durch die Geraden des einen von zwei collinearen Räumen gebildet wird, deren Punktreihen mit den entsprechenden im anderen Raume gleich sind*), — veranlassten mich, bei der rein geometrischen Behandlung der Congruenzen 2. Ordnung,

*) Math. Annalen Bd. 28, S. 261.

mit der ich zur Zeit beschäftigt bin, die Abzählung in anderer Weise, wenigstens hinsichtlich der Gattung III, vorzunehmen.

Das Ergebniss dieser, wie ich nun glaube, erschöpfenden Abzählung erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen; die ausführliche Darlegung aber behalte ich mir für eine spätere Veröffentlichung vor.

Es dürfte wohl richtiger sein, das Wort „Brennlinie" durch „singuläre Linie" zu ersetzen. Denn einen singulären Punkt einer Congruenz nennen wir ja einen solchen, von dem nicht blos eine endliche Anzahl von Congruenzstrahlen ausgeht, sondern ∞^1, welche einen Kegel bilden. Nun ist aber doch wohl die Eigenschaft der fraglichen Linie, dass sie von jedem ihrer Punkte einen solchen Kegel an die Congruenz sendet, wichtiger als die, dass sie der Ort der einen Brennpunkte der Congruenzstrahlen ist.

Die Eintheilung der Congruenzen 2. Ordnung, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, in folgende 3 Gattungen ist fast von selbst gegeben:

I. *Alle Strahlen der Congruenz treffen eine und dieselbe Raumcurve zweimal.*

II. *Alle Strahlen der Congruenz treffen zwei verschiedene Curven je einmal.*

III. *Eine einzige singuläre Linie wird von allen Strahlen der Congruenz getroffen und zwar im Allgemeinen nur einmal.*

Ich habe an anderer Stelle*) erörtert, dass wir nicht berechtigt sind, die Congruenzen der Gattungen I, II als solche zu bezeichnen, welche nur Brennlinien, nicht eine Brennfläche haben; deshalb bezeichne ich auch die Congruenzen von III nicht als solche, welche eine Brenncurve und eine Brennfläche haben.

Zu I gehört nur eine einzige Congruenz: die der Doppelsecanten der Raumcurve 4. Ordnung 1. Art (Lehrsatz VII bei Kummer).

Bei II haben wir nur zwei Fälle (Lehrsatz VIII, IX, X):

a) Die singulären Linien sind beide Kegelschnitte, welche zwei gemeinsame Punkte haben; die Classe der Congruenz ist 4.

b) Die eine singuläre Linie ist eine Gerade, die andere eine Curve n^{ter} Ordnung, welche der Geraden $(n-2)$-mal begegnet; die Classe ist n.

Diese beiden Gattungen dürften kaum anders zu behandeln sein, als es in der Kummer'schen Abhandlung geschehen ist.

Anders aber ist es mit der Gattung III. Bei dieser bin ich nicht davon ausgegangen, neben der singulären Linie, auf welche sich alle Strahlen der Congruenz stützen, noch eine Fläche anzunehmen, welche

*) Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890 (Leipzig, Teubner) S. 61.

von ihnen berührt wird und die der Ort der zweiten Brennpunkte ist. Denn die vollständige Congruenz der Strahlen, welche diese beiden Bedingungen erfüllen, *kann zerfallen* und unter den Theilcongruenzen können sich auch solche 2. Ordnung befinden. Es ist aber nicht leicht, diese Fälle des Zerfallens alle ausfindig zu machen: von den 3 möglichen, welche meine Aufzählung bringen wird, hat Herr Kummer nur einen bemerkt.

Ausserdem giebt es noch eine bemerkenswerthe Art von Congruenzen, bei denen *auf jedem ihrer Strahlen die beiden Brennpunkte sich* in dem Punkte, in dem er sich auf die singuläre Linie stützt, *vereinigen und also eine je im zweiten Brennpunkte von jedem Congruenzstrahle berührte Fläche nicht vorhanden ist.*

Einen Fall dieser Art hat Herr Kummer gefunden, ohne jedoch diese seine Eigenthümlichkeit hervorzuheben.

Ich habe vielmehr meine Untersuchung darauf hin gerichtet, dass ich fragte, was für Kegel von den Punkten der singulären Curve möglich sind, wenn die Ordnung der Congruenz 2 sein, zu der vorausgesetzten singulären Linie aber nicht noch eine zweite kommen soll, und habe gefunden, dass, wenn die singuläre Linie eine Gerade ist, dann keine Beschränkung hinsichtlich der Ordnung dieser Kegel statt hat, *wenn die singuläre Curve aber von höherer Ordnung ist als* 1, *nur Kegel* 1. *und* 2. *Ordnung möglich sind.* Danach zerfällt die Gattung III in drei Untergattungen:

III_1: *Die singuläre Linie ist eine Gerade.*

III_2: *Die singuläre Linie ist nicht gerade und sendet aus jedem ihrer Punkte einen Strahlenbüschel zur Congruenz.*

III_3: *Die singuläre Linie ist ebenfalls nicht gerade und sendet aus jedem ihrer Punkte einen Kegel 2. Grades zur Congruenz.*

Die Congruenzen III_2 und III_3 haben noch folgenden bemerkenswerthen Unterschied: bei jenen geht durch jeden Punkt der singulären Linie noch ein nicht zum Strahlenbüschel gehöriger Strahl der Congruenz, bei diesen sind — ausgenommen gewisse ausgezeichnete Punkte der singulären Linie — solche nicht dem Kegel angehörige Congruenzstrahlen nicht möglich.

Ferner ist der *Rang* der Congruenz, d. i. die Zahl, welche angiebt, wie oft die zwei von einem Punkte ausgehenden Congruenzstrahlen mit einer gegebenen Geraden zu demselben Strahlenbüschel gehören, bei den Congruenzen III_1, III_2, III_3 bez.

$$0,\quad n-1,\quad n-2,$$

wo n die Classe ist.

Bei III_1 haben wir nun folgende Fälle:

1) Die Congruenz 2. Classe der Geraden, welche eine Gerade treffen und eine Fläche 2. Grades berühren (Lehrsatz XII bei Kummer).

2) Die Congruenzen $(2\mu - 2)^{\text{ter}}$ Classe der Geraden, welche eine Fläche μ^{ter} Ordnung $(\mu > 2)$ mit einer $(\mu - 2)$-fachen Geraden berühren (aber nicht auf dieser Geraden) und die Gerade treffen (Lehrsatz XV).

3) *Die Congruenzen n^{ter} Classe, welche durch alle Strahlenbüschel gebildet werden, die einen festen Strahl gemeinsam haben und deren Scheitel und Ebenen in einer solchen Correspondenz stehen, dass jeder Ebene durch den festen Strahl 2 Punkte auf ihm als Scheitel, jedem Punkte aber dieses Strahls n Ebenen durch ihn entsprechen.*

Man könnte 1) unter 2) subsumiren; doch da sie sich in weiteren Eigenschaften unterscheiden, so ist es besser, sie zu trennen. Die Congruenzen 3) haben die Eigenschaft, dass, im Allgemeinen, die beiden Brennpunkte eines Congruenzstrahls sich in dem Punkte vereinigt haben, in dem er den festen Strahl, der ja singuläre Linie ist, trifft. Es giebt aber ∞^1 Strahlen in der Congruenz, welche alle ihre Punkte zu Brennpunkten haben.

Jeder Punkt der singulären Geraden sendet bei 1) einen Kegel 2. Grades, bei 2) einen Kegel $(2\mu - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, bei 3) einen in n Strahlenbüschel zerfallenden Kegel n^{ter} Ordnung zur Congruenz.

III_2 liefert uns ebenfalls 3 Fälle:

1) Die Congruenzen n^{ter} Classe der Strahlen, welche einen Kegel 2. Grades berühren und eine ebene Curve n^{ter} Ordnung treffen, die in einer Tangentialebene des Kegels liegt und $(n - 1)$-mal durch dessen Spitze geht (Lehrsatz XIII specieller Fall).

2) Die Congruenzen n^{ter} Classe, von denen je zwei zusammen das System $(4, 2n)$ der Geraden bilden, welche einen Kegel 2. Grades berühren und eine Curve n^{ter} Ordnung treffen, welche $(n - 2)$-mal durch die Spitze des Kegels geht und denselben ausserdem noch zweimal berührt (Lehrsatz XIV).

3) Die Congruenzen n^{ter} Classe der Strahlen, welche einen Kegel 2. Grades in den Punkten einer auf ihm gelegenen und $(n - 2)$-mal durch seine Spitze gehenden Curve n^{ter} Ordnung berühren (Lehrsatz XVI in der Kummer'schen Abhandlung, jedoch dort nur für gerades n ausgesprochen).

Die Congruenz 1. Classe, welche sich bei 1) ergiebt, wenn $n = 1$ ist, erhält man auch bei III_1 1), wenn die Fläche 2. Grades ein Kegel ist, der die Gerade berührt: zur 2. Classe wird sie durch das Strahlenfeld in der die Gerade enthaltenden Tangentialebene des Kegels ergänzt.

2) ist der oben erwähnte von Herrn Kummer bemerkte Fall, dass das System aller eine Curve treffenden und eine Fläche berührenden Geraden in zwei selbständige Congruenzen zerfällt.

Die Strahlen der Congruenzen 3) haben vereinigte Brennpunkte; die ∞^1 Strahlen, auf denen alle Punkte Brennpunkte sind, sind die Kanten des Kegels, der als Brennfläche nur durch diese Brennpunkte zu Stande kommt.

Bei III_3 endlich haben wir zunächst 2 Fälle zu unterscheiden:

α) *Alle Kegel 2. Grades, die von den Punkten der singulären Linie zur Congruenz kommen, zerfallen in 2 Strahlenbüschel.*

β) *Diese Kegel zerfallen im Allgemeinen nicht.*

Zu α) gehören nur:

Die Congruenzen $2\mu^{ter}$ Classe der Strahlen, die einen Kegel 2. Grades berühren und eine ebene Curve μ^{ter} Ordnung treffen, welche $(\mu - 1)$-mal durch die Spitze geht, aber nicht wie bei III_2 1) in einer Berührungsebene des Kegels liegt (Lehrsatz XIII allgemeiner Fall).

Mit $\mu = 1$ greift dieser Fall in III_1 über und liefert einen Specialfall von III_1 1).

Bei β) aber kann die Ordnung der singulären Curve nur 2 *oder* 3 *sein.* Im ersteren Falle zerspalten sich zwei von den erzeugenden Kegeln in Strahlenbüschel-Paare, im letzteren aber keiner. Indem die Curve 3. Ordnung eben und uneben sein kann, ergeben sich 3 Fälle:

1) *Die singuläre Curve ist ein Kegelschnitt s^2. Die erzeugenden Kegel 2. Grades aus seinen Punkten gehen durch 5 feste Punkte, von denen 1 oder 2 auf s^2 liegen, die übrigen aber ausserhalb der Ebene, jedoch so, dass, wenn 4 ausserhalb liegen, dann 4 solche von den 6 Verbindungslinien, welche ein windschiefes Vierseit bilden, den Kegelschnitt s^2 treffen, wenn 3 ausserhalb liegen, 2 von ihren 3 Verbindungslinien es thun.*

Bei der Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt und 4 ausserhalb desselben befindlichen Knotenpunkten zerfällt die Congruenz (4, 8) *der Tangenten, welche sich auf die Doppelcurve stützen, in zwei Congruenzen* (2, 4) *der vorliegenden Art.*

2) *Die singuläre Linie ist eine ebene Curve 3. Ordnung s^3 mit Doppelpunkt. Die erzeugenden Kegel aus ihren Punkten gehen alle durch diesen Doppelpunkt und 4 ausserhalb der Ebene gelegene Punkte, deren sämmtliche 6 Verbindungslinien die Curve s^3 treffen.*

Eine Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten führt zu dieser Congruenz, welche 6. Classe ist. Alle Tangenten derselben, welche sich auf den Schnitt einer Ebene stützen, erzeugen eine Congruenz (6, 12); *diese zerfällt in eine* (2, 6) *und eine* (4, 6), *wenn die Ebene eine Berührungsebene der Fläche ist.*

3) *Die singuläre Linie ist eine Raumcurve 3. Ordnung s^3. Die erzeugenden Kegel aus ihren Punkten gehen durch 4 feste Punkte der Curve und berühren in einem von ihnen eine Sehne derselben oder gehen*

durch 3 feste Punkte der Curve und berühren in zweien von ihnen Sehnen derselben.

Die Tangenten einer Regelfläche 4. Grades mit einer cubischen Raumcurve als Doppelcurve, welche sich auf die Doppelcurve stützen, erzeugen diese Congruenz, welche ebenfalls 6. Classe ist.

Damit sind die möglichen Fälle der Congruenzen 2. Ordnung mit singulären Linien erschöpft. Neu hinzugekommen sind die durch den Druck hervorgehobenen Congruenzen III_1 3) und III_3 β) 1), 2), 3), von denen diese 3 letzten wohl zu den interessantesten gehören.

Münster i./W., den 10. März 1890.

Ueber die Theorie der algebraischen Formen*).

Von

David Hilbert in Königsberg.

Inhalt:

I.

Die Endlichkeit der Formen in einem beliebigen Formensysteme.

Unter einer algebraischen Form verstehen wir in üblicher Weise eine ganze rationale homogene Function von gewissen Veränderlichen und die Coefficienten der Form denken wir uns als Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches. Ist dann durch irgend ein Gesetz ein System von unbegrenzt vielen Formen von beliebigen Ordnungen in den Veränderlichen vorgelegt, so entsteht die Frage, ob es stets möglich ist, aus diesem Formensysteme eine endliche Zahl von Formen derart auszuwählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann, d. h. ob eine jede Form des Systems sich in die Gestalt

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m$$

bringen lässt, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bestimmt ausgewählte Formen des gegebenen Systems und $A_1, A_2, \ldots, A_m$ irgendwelche, dem nämlichen Rationalitätsbereiche angehörige Formen der Veränderlichen sind. Um diese Frage zu entscheiden, beweisen wir zunächst das folgende für unsere weiteren Untersuchungen grundlegende Theorem:

*) Vgl. die vorläufigen Mittheilungen des Verfassers: „Zur Theorie der algebraischen Gebilde", Nachrichten v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1888 (erste Note) und 1889 (zweite und dritte Note).

Theorem I. *Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \ldots$, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt*

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

bringen lässt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.

Die Ordnungen der einzelnen Formen der vorgelegten Reihe sowie ihre Coefficienten unterliegen keinerlei Beschränkungen. Denken wir uns die letzteren als Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches, so dürfen wir annehmen, dass die Coefficienten der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dem nämlichen Rationalitätsbereiche angehören. Was die Ordnungen der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ betrifft, so müssen dieselben jedenfalls der Bedingung genügen, dass der mit Hülfe dieser Formen gebildete Ausdruck

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

wieder eine homogene Function der n Veränderlichen darstellt und es sei hier zugleich auch für die ferneren Entwickelungen bemerkt, dass in allen Fällen, wo es sich um eine additive Vereinigung oder lineare Combination mehrerer Formen handelt, die Ordnungen der Formen so zu wählen sind, dass die Homogenität der entstehenden Ausdrücke gewahrt bleibt.

In dem einfachsten Falle $n = 1$ besteht eine jede Form der vorgelegten Reihe nur aus einem einzigen Gliede von der Gestalt cx^r, wo c eine Constante bedeutet. Es sei in der vorgelegten Reihe $c_1 x^{r_1}$ die erste Form, für welche der Coefficient c_1 von Null verschieden ist. Wir suchen nun die nächste auf diese Form folgende Form der Reihe, deren Ordnung kleiner ist als r_1; diese Form sei $c_2 x^{r_2}$ und es ist dann wiederum die nächste auf letztere Form folgende Form der Reihe zu bestimmen, deren Ordnung kleiner ist als r_2; diese Form sei $c_3 x^{r_3}$. Fahren wir in solcher Weise fort, so gelangen wir jedenfalls spätestens nach r_1 Schritten zu einer Form F_m der vorgelegten Reihe, auf welche keine Form von niederer Ordnung mehr folgt und da mithin eine jede Form der Reihe durch diese Form F_m theilbar ist, so ist m eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem verlangt.

Auch für den Fall $n = 2$ lässt sich unser Theorem I. auf entsprechendem Wege ohne Schwierigkeit beweisen. Es genüge die folgende kurze Andeutung dieses Beweises. Wenn die binären Formen der vorgelegten Formenreihe sämmtlich die nämliche binäre Form als gemeinsamen Factor enthalten, so schaffen wir zunächst diesen Factor durch Division fort. Es ist sodann stets möglich, aus den Formen der erhaltenen Reihe durch lineare Combination zwei binäre Formen

G und H zu bilden, welche keinen gemeinsamen Factor besitzen. Ist dies geschehen, so lässt sich jede beliebige binäre Form F, deren Ordnung nicht kleiner ist als die Summe r der Ordnungen der Formen G und H in die Gestalt

$$F = AG + BH$$

bringen, wo A und B geeignet zu bestimmende Formen sind. Im Besonderen ist daher auch jede in der Reihe enthaltene Form, deren Ordnung die Zahl r erreicht oder übersteigt, einer linearen Combination der Formen G und H gleich. Was endlich die Formen der Reihe anbetrifft, deren Ordnungen kleiner als die Zahl r sind, so kann man unter diesen jedenfalls eine endliche Anzahl derart auswählen, dass alle anderen Formen der Reihe linearen Combinationen der ausgewählten Formen gleich sind.

Will man in ähnlicher Weise unser Theorem I. für den Fall ternärer Formen beweisen, so würde vor Allem der Noether'sche Fundamentalsatz*) von den Bedingungen der Darstellbarkeit einer ternären Form durch zwei gegebene Formen anzuwenden sein und hierbei wäre dann eine sorgfältige Untersuchung aller möglichen Ausartungen des durch Nullsetzen der beiden gegebenen Formen definirten Werthesystems erforderlich. Da die durch diesen Umstand bedingten Schwierigkeiten mit der Zahl n der Veränderlichen immer stärker zunehmen, so schlagen wir zum Beweise des Theorems einen anderen Weg ein, indem wir allgemein zeigen, wie sich der Fall der Formen von n Veränderlichen auf den Fall von $n-1$ Veränderlichen zurückführen lässt.

Es sei $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die gegebene Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und F_1 sei eine nicht identisch verschwindende Form von der Ordnung r. Wir bestimmen dann zunächst eine lineare Substitution der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche eine von Null verschiedene Determinante besitzt und ausserdem die Form F_1 in eine Form G_1 der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ derart überführt, dass der Coefficient von y_n^r in der Form G_1 einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Vermöge der nämlichen linearen Substitution mögen die Formen $F_2, F_3, \ldots$ beziehungsweise in $G_2, G_3, \ldots$ übergehen. Betrachten wir nun eine Relation von der Gestalt

$$G_s = B_1 G_1 + B_2 G_2 + \cdots + B_m G_m,$$

wo s irgend einen Index bezeichnet und $B_1, B_2, \ldots, B_m$ Formen der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind, so geht dieselbe vermöge der umgekehrten linearen Substitution in eine Relation von der Gestalt

*) Vgl. M. Noether, Math. Ann. Bd. 6 und 30, sowie A. Voss, Math. Ann. Bd. 27 und L. Stickelberger, Math. Ann. Bd. 30.

$$F_s = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

über, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen der ursprünglichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Es folgt daher unser Theorem I. für die ursprünglich vorgelegte Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$, sobald der Beweis des Theorems für die Formenreihe $G_1, G_2, G_3, \ldots$ gelungen ist.

Da der Coefficient von y_n^r in G_1 einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so lässt sich der Grad einer jeden Form G_s der gegebenen Reihe in Bezug auf die Veränderliche y_n dadurch unter die Zahl r herabdrücken, dass man G_1 mit einer geeigneten Form B_s multiplicirt und das erhaltene Product von G_s subtrahirt. Wir setzen dementsprechend für beliebige Indices s

$$G_s = B_s G_1 + g_{s1} y_n^{r-1} + g_{s2} y_n^{r-2} + \cdots + g_{sr},$$

wo B_s eine Form der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ist, während die Formen $g_{s1}, g_{s2}, \ldots, g_{sr}$ nur die $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ enthalten.

Wir nehmen nun an, dass unser Theorem I. für Reihen von Formen mit $n-1$ Veränderlichen bereits bewiesen ist und wenden dasselbe auf die Formenreihe $g_{11}, g_{21}, g_{31}, \ldots$ an. Zufolge des Theorems I. giebt es dann eine Zahl μ von der Art, dass für jeden Werth von s eine Relation von der Gestalt

$$g_{s1} = b_{s1} g_{11} + b_{s2} g_{21} + \cdots + b_{s\mu} g_{\mu 1} = l_s(g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{\mu 1})$$

besteht, wo $b_{s1}, b_{s2}, \ldots, b_{s\mu}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Wir bilden nun die Formen

$$(1) \qquad g_{st}^{(1)} = g_{st} - l_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{\mu t}), \qquad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

woraus sich insbesondere für $t = 1$

$$g_{s1}^{(1)} = 0$$

ergiebt. Wir nehmen hierauf wiederum das Theorem I. für den Fall von $n-1$ Veränderlichen in Anspruch, indem wir dasselbe auf die Formenreihe $g_{12}^{(1)}, g_{22}^{(1)}, g_{32}^{(1)}, \ldots$ anwenden. Zufolge dieses Theorems giebt es dann eine Zahl $\mu^{(1)}$ von der Art, dass für jeden Werth von s eine Relation von der Gestalt

$$g_{s2}^{(1)} = b_{s1}^{(1)} g_{12}^{(1)} + b_{s2}^{(1)} g_{22}^{(1)} + \cdots + b_{s\mu^{(1)}}^{(1)} g_{\mu^{(1)}2}^{(1)} = l_s^{(1)}\left(g_{12}^{(1)}, g_{22}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}2}^{(1)}\right)$$

besteht, wo $b_{s1}^{(1)}, b_{s2}^{(1)}, \ldots, b_{s\mu^{(1)}}^{(1)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Wir setzen nun

$$(2) \qquad g_{st}^{(2)} = g_{st}^{(1)} - l_s^{(1)}\left(g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}\right), \qquad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

woraus sich insbesondere für $t = 1, 2$

$$g_{s1}^{(2)} = 0, \qquad g_{s2}^{(2)} = 0$$

ergiebt. Die Anwendung des Theorems I. auf die Formenreihe $g_{13}^{(2)}, g_{23}^{(2)}, g_{33}^{(2)}, \ldots$ führt zu der Relation

$$g_{s3}^{(2)} = l_s^{(2)}\left(g_{13}^{(2)}, g_{23}^{(2)}, \ldots, g_{\mu^{(2)}3}^{(2)}\right)$$

und setzen wir dann

(3) $\quad g_{st}^{(3)} = g_{st}^{(2)} - l_s^{(2)}\left(g_{1t}^{(2)}, g_{2t}^{(2)}, \ldots, g_{\mu^{(2)}t}^{(2)}\right), \quad (t = 1, 2, \ldots, r)$

so folgt insbesondere

$$g_{s1}^{(3)} = 0, \quad g_{s2}^{(3)} = 0, \quad g_{s3}^{(3)} = 0.$$

Nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens ergeben sich die Relationen

(4) $\quad g_{st}^{(r-1)} = g_{st}^{(r-2)} - l_s^{(r-2)}\left(g_{1t}^{(r-2)}, g_{2t}^{(r-2)}, \ldots, g_{\mu^{(r-2)}t}^{(r-2)}\right), \quad (t = 1, 2, \ldots, r)$

$$g_{s1}^{(r-1)} = 0, \quad g_{s2}^{(r-1)} = 0, \ldots, g_{s,r-1}^{(r-1)} = 0$$

und schliesslich erhält man

$$g_{sr}^{(r-1)} = l_s^{(r-1)}\left(g_{1r}^{(r-1)}, g_{2r}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}r}^{(r-1)}\right),$$

woraus

(5) $\quad 0 = g_{st}^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}\left(g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}\right) \quad (t = 1, 2, \ldots r)$

folgt. Durch Addition der Gleichungen (1), (2), (3), ..., (4), (5) ergiebt sich

$$g_{st} = l_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{\mu t}) + l_s^{(1)}\left(g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}\right) + \cdots$$
$$+ l_s^{(r-1)}\left(g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}\right). \quad (t = 1, 2, \ldots, r).$$

Auf der rechten Seite dieser Formel können wir die Formen

$$g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}, \ldots, g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}$$

in Folge wiederholter Anwendung der Gleichungen (1), (2), (3), ..., (4) durch lineare Combinationen der Formen $g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{mt}$ ersetzen, wo m die grösste von den Zahlen $\mu, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r-1)}$ bezeichnet. Wir erhalten auf diese Weise aus der letzteren Formel ein Gleichungssystem von der Gestalt:

$$g_{st} = c_{s1}g_{1t} + c_{s2}g_{2t} + \cdots + c_{sm}g_{mt} = k_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{mt}),$$
$$(t = 1, 2, \ldots, r)$$

wo $c_{s1}, c_{s2}, \ldots, c_{sm}$ wiederum Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Multipliciren wir die letztere Formel mit y_n^{r-t} und addiren die daraus für $t = 1, 2, \ldots, r$ entstehenden Gleichungen, so folgt wegen

$$g_{s1}y_n^{r-1} + g_{s2}y_n^{r-2} + \cdots + g_{sr} = G_s - B_sG_1$$

die Gleichung

$$G_s - B_s G_1 = k_s(G_1 - B_1 G_1,\ G_2 - B_2 G_1, \ldots, G_m - B_m G_1),$$

oder, wenn C_s eine Form der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bezeichnet

$$G_s = C_s G_1 + k_s(G_1, G_2, \ldots, G_m) = L_s(G_1, G_2, \ldots, G_m),$$

d. h. die Zahl m ist für die Formenreihe $G_1, G_2, G_3, \ldots$ und folglich auch für die ursprünglich vorgelegte Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ eine solche Zahl, wie sie Theorem I. verlangt. Somit gilt unser Theorem I. für den Fall von n Veränderlichen unter der Annahme, dass dasselbe für Formen von $n-1$ Veränderlichen bewiesen ist. Da das Theorem I. für eine Reihe von Formen einer homogenen Veränderlichen oben bereits als richtig erkannt wurde, so gilt dasselbe allgemein.

Vermöge des Theorems I. lässt sich vor Allem diejenige Frage allgemein beantworten, welche zu Anfang dieser Arbeit angeregt wurde. Es sei nämlich ein beliebiges System von unbegrenzt vielen Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, wobei es freigestellt ist, ob diese Formen sich in eine Reihe ordnen lassen oder in nicht abzählbarer Menge vorhanden sind. Um ein solches Formensystem festzulegen, denke man sich ein Gesetz gegeben, vermöge dessen ausnahmslos für eine jede beliebig angenommene Form entschieden werden kann, ob sie zu dem Systeme gehören soll oder nicht. Wir nehmen nun an, es sei nicht möglich, aus dem gegebenen Formensystem eine endliche Zahl von Formen derart auszuwählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann. Dann wählen wir nach Willkür aus dem System eine nicht identisch verschwindende Form aus und bezeichnen dieselbe mit F_1; ferner möge F_2 eine Form des Systems sein, welche nicht einem Producte von der Gestalt $A_1 F_1$ gleich ist, wo A_1 eine beliebige Form der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeutet; F_3 sei eine Form des Systems, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 F_1 + A_2 F_2$ bringen lässt, wo A_1 und A_2 wiederum Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Entsprechend sei F_4 eine Form des Systems, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$ bringen lässt und wenn wir in dieser Weise fortfahren, so gewinnen wir eine Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$, welche zu Folge der gemachten Annahme im Endlichen nicht abbrechen kann und in welcher trotzdem keine Form durch lineare Combination der vorhergehenden Formen erhalten werden kann. Dieses Ergebniss widerspricht unserem Theorem I. und da somit die vorhin gemachte Annahme unzulässig ist, so erhalten wir den Satz:

Aus einem jeden beliebig gegebenen Formensysteme lässt sich stets eine endliche Zahl von Formen derart auswählen, dass jede andere

Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann.

Wir betrachten insbesondere solche Formensysteme, denen die Eigenschaft zukommt, dass jedes Product einer Form des Systems mit einer beliebigen anderen, nicht nothwendig zum System gehörigen Form sowie jede in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ homogene Summe von solchen Producten d. h. jede lineare Combination von Formen des Systems wiederum dem Systeme angehört. Ein solches System von unbegrenzt vielen Formen heisst ein Modul und somit lehnen diese Auseinandersetzungen, soweit sie späterhin die Theorie der Moduln betreffen, an diejenige Bezeichnungsweise und Begriffsbestimmung an, welche L. Kronecker in der von ihm begründeten und neuerdings systematisch ausgebildeten Theorie der Modulsysteme*) anwendet. Doch ist hervorzuheben, dass im Unterschiede zu den von L. Kronecker behandelten Fragen bei unseren Untersuchungen, vor Allem in Abschnitt III und IV dieser Arbeit, die Homogenität der Functionen des Moduls eine wesentliche und nothwendige Voraussetzung bildet. Sprechen wir den vorhin bewiesenen Satz insbesondere für einen Modul aus, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz:

Aus den Formen eines beliebigen Moduls lässt sich stets eine endliche Anzahl von Formen derart auswählen, dass jede andere Form des Moduls durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann.

Um für diesen Satz ein anschauliches Beispiel zu gewinnen, nehmen wir eine algebraische Raumcurve als gegeben an und fragen nach dem vollen Systeme der diese Raumcurve enthaltenden algebraischen Flächen. Da die linken Seiten der Gleichungen dieser Flächen quaternäre Formen sind, welche durch lineare Combination Formen des nämlichen Systems ergeben, so bilden diese Formen einen Modul und der obige Satz erhält mithin für diesen besonderen Fall die folgende Deutung:

Durch eine gegebene algebraische Raumcurve lässt sich eine endliche Zahl m von Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$$

hindurchlegen derart, dass jede andere die Curve enthaltende algebraische Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

*) Vgl. L. Kronecker, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 70—122, Bd. 93, pag. 365—366, Bd. 99, pag. 329—371, Bd. 100, pag. 490—510. Berliner Sitzungsberichte, 1888 pag. 249—258, 263—281, 331—352, 379—396, 615—648; und ferner: R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal, Bd. 92, pag, 181—235, sowie J. Molk, Acta mathematica Bd. 6, pag. 50—165.

dargestellt werden kann, wo unter $A_1, A_2, \ldots, A_m$ quaternäre Formen zu verstehen sind).*

Beispielsweise sei eine cubische Raumcurve durch die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^3, \\ x_2 &= \xi_1^2 \xi_2, \\ x_3 &= \xi_1 \xi_2^2, \\ x_4 &= \xi_2^3 \end{aligned}$$

gegeben, wo x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten ihrer Punkte und ξ_1, ξ_2 die homogenen Parameter sind. Durch diese Raumcurve gehen die 3 Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

hindurch, wo

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 x_3 - x_2^2, \\ F_2 &= x_2 x_3 - x_1 x_4, \\ F_3 &= x_2 x_4 - x_3^2 \end{aligned}$$

quadratische Formen bedeuten, von denen keine durch lineare Combination der beiden anderen erhalten werden kann. Um nun zu zeigen, dass auch jede andere die Raumcurve enthaltende Fläche sich durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = 0$$

darstellen lässt, nehmen wir an, es sei

$$F = \sum C_{r_1 r_2 r_3 r_4} x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} x_4^{r_4}$$

eine Form, welche bei Anwendung der Substitution (6) identisch gleich Null wird. Mit Hülfe der Congruenzen

$$\begin{aligned} x_1 x_3 &\equiv x_2^2, && (F_1, F_2, F_3), \\ x_1 x_4 &\equiv x_2 x_3, && (F_1, F_2, F_3), \\ x_2 x_4 &\equiv x_3^2, && (F_1, F_2, F_3) \end{aligned}$$

können wir setzen

$$(7)\quad F \equiv \sum C_{\varkappa_1 \varkappa_2} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} + \sum C_{\lambda_2 \lambda_3} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} + \sum C_{\mu_3 \mu_4} x_3^{\mu_3} x_4^{\mu_4}, \quad (F_1, F_2, F_3),$$

worin $C_{\varkappa_1 \varkappa_2}$, $C_{\lambda_2 \lambda_3}$, $C_{\mu_3 \mu_4}$ wiederum gewisse Zahlencoefficienten bedeuten. Ausserdem darf angenommen werden, dass keiner der beiden Exponenten λ_2 und λ_3 gleich Null ist, da entgegengesetztenfalls das betreffende Glied sich aus der zweiten Summe entweder in die erste oder

*) Die hier erledigte Frage nach der Endlichkeit der eine Raumcurve enthaltenden Flächen wirft bereits G. Salmon in seinem Lehrbuche auf; vgl. analytische Geometrie des Raumes, Theil II, 79.

in die dritte Summe hineinziehen lässt. Wegen der Homogenität der rechten Seite von (7) ist

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_3 + \mu_4$$

und hieraus folgt

$$3\varkappa_1 + 2\varkappa_2 > 2\lambda_2 + \lambda_3 > \mu_3.$$

Führen wir jetzt vermöge der Gleichungen (6) die Parameter ξ_1, ξ_2 in der rechten Seite von (7) ein, so erkennen wir, dass keines der so entstehenden Glieder $C\xi_1^{\varrho_1}\xi_2^{\varrho_2}$ sich mit einem in der nämlichen oder in einer anderen Summe entstehenden Gliede vereinigen kann und da andererseits der Ausdruck auf der rechten Seite von (7) nach jener Substitution (6) verschwinden soll, so sind nothwendigerweise die Coefficienten $C_{\varkappa_1\varkappa_2}$, $C_{\lambda_2\lambda_3}$, $C_{\mu_3\mu_4}$ sämmtlich gleich Null. Aus der Congruenz (7) erhalten wir somit

$$F \equiv 0 \quad (F_1,\ F_2,\ F_3)$$

oder

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3.$$

Eine anderweitige Verwendung finden unsere allgemeinen Entwickelungen in der Theorie der Gleichungen, wenn man nach denjenigen ganzen homogenen Functionen der Coefficienten einer Gleichung fragt, welche verschwinden, sobald die Gleichung eine gewisse Anzahl vielfacher Wurzeln besitzt. Da das System aller dieser Functionen einen Modul bildet, so erhalten wir den Satz:

Es giebt eine endliche Anzahl von ganzen homogenen Functionen der Coefficienten einer algebraischen Gleichung, welche verschwinden, sobald die Gleichung eine gegebene Zahl vielfacher Wurzeln erhält und aus welchen sich eine jede andere ganze Function von derselben Eigenschaft in linearer Weise zusammensetzen lässt.

Sollen beispielsweise alle diejenigen homogenen Functionen der Coefficienten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 der binären Form 4ter Ordnung

$$\varphi = x_1\xi_1^4 + 4x_2\xi_1^3\xi_2 + 6x_3\xi_1^2\xi_2^2 + 4x_4\xi_1\xi_2^3 + x_5\xi_2^4,$$

angegeben werden, welche verschwinden, sobald die Form φ eine volle 4te Potenz wird, so bedarf es dazu der folgenden 6 quadratischen Formen

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1x_3 - x_2^2,\\
F_2 &= x_1x_4 - x_2x_3,\\
F_3 &= x_1x_5 - x_2x_4,\\
F_4 &= x_1x_5 - x_3^2,\\
F_5 &= x_2x_5 - x_3x_4,\\
F_6 &= x_3x_5 - x_4^2,
\end{aligned}$$

und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit auf dem entsprechenden Wege wie vorhin, dass jede andere Function F von der verlangten Eigenschaft in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_6 F_6$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ homogene Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind.

Will man zweitens alle diejenigen homogenen Functionen der Coefficienten von φ angeben, welche verschwinden, sobald die binäre Form φ ein volles Quadrat wird, so ist es nöthig, die folgenden 7 Functionen zu bilden

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1^2 x_4 - 3x_1 x_2 x_3 + 2x_2^3,\\
F_2 &= x_1^2 x_5 + 2x_1 x_2 x_4 - 9x_1 x_3^2 + 6x_2^2 x_3,\\
F_3 &= x_1 x_2 x_5 - 3x_1 x_3 x_4 + 2x_2^2 x_4,\\
F_4 &= x_1 x_4^2 - x_2^2 x_5,\\
F_5 &= x_1 x_4 x_5 - 3x_2 x_3 x_5 + 2x_2 x_4^2,\\
F_6 &= x_1 x_5^2 + 2x_2 x_4 x_5 - 9x_3^2 x_5 + 6x_3 x_4^2,\\
F_7 &= x_2 x_5^2 - 3x_3 x_4 x_5 + 2x_4^3.
\end{aligned}$$

Diese 7 Functionen stimmen im wesentlichen überein mit den Coefficienten der Covariante 6^{ter} Ordnung und 3^{ten} Grades von φ und hieraus lässt sich durch ein invariantentheoretisches Schlussverfahren zeigen, dass jede andere homogene Function von der verlangten Eigenschaft in die Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_7 F_7$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_7$ wiederum homogene Functionen sind.

Von allgemeinerer Natur und überdies von principieller Bedeutung für die späterhin folgenden Untersuchungen ist der folgende Satz:

Sind $F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}}$ gegebene Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so existirt stets eine endliche Zahl $m^{(2)}$ von Formensystemen

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_{11}, \quad X_2 = X_{21}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}1},\\
X_1 &= X_{12}, \quad X_2 = X_{22}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_1 &= X_{1m^{(2)}}, \ X_2 = X_{2m^{(2)}}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}m^{(2)}},
\end{aligned}$$

welche sämmtlich die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0$$

identisch befriedigen und durch welche jedes andere jener Gleichung genügende Formensystem in der Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_1 X_{11} + A_2 X_{12} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{1m^{(2)}},\\
X_2 &= A_1 X_{21} + A_2 X_{22} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{2m^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{m^{(1)}} &= A_1 X_{m^{(1)}1} + A_2 X_{m^{(1)}2} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{m^{(1)}m^{(2)}},
\end{aligned}$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(2)}}$ *ebenfalls Formen der Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sind.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf unseren allgemeinen Entwickelungen über die Endlichkeit der Formen eines beliebigen Systems. Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ irgend ein Lösungssystem der vorgelegten Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0$$

und in jedem solchen Lösungssysteme werde insbesondere die letzte Form $X_{m^{(1)}}$ ins Auge gefasst. Auf Grund unserer früheren allgemeinen Sätze ist es dann möglich, aus der Gesammtheit dieser Formen $X_{m^{(1)}}$ eine endliche Zahl μ von Formen $X_{m^{(1)}1}, X_{m^{(1)}2}, \ldots, X_{m^{(1)}\mu}$ derart auszuwählen, dass jede andere solche Form in die Gestalt

$$X_{m^{(1)}} = A_1' X_{m^{(1)}1} + A_2' X_{m^{(1)}2} + \cdots + A_\mu' X_{m^{(1)}\mu}$$

gebracht werden kann. Bilden wir nun die Formen

$$X_t' = X_t - A_1' X_{t1} - A_2' X_{t2} - \cdots - A_\mu' X_{t\mu} \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)}),$$

woraus sich insbesondere für $t = m^{(1)}$

$$X'_{m^{(1)}} = 0$$

ergiebt, so erkennen wir, dass jeder Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ der ursprünglich vorgelegten Gleichung eine Lösung $X_1', X_2', \ldots, X'_{m^{(1)}-1}$ der Gleichung

$$F_1 X_1' + F_2 X_2' + \cdots + F_{m^{(1)}-1} X'_{m^{(1)}-1} = 0$$

entspricht und es lässt sich offenbar auch umgekehrt jede Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung durch Combination aus den μ Lösungssystemen

$$X_1 = X_{1s}, \; X_2 = X_{2s}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}s} \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

und aus einem Lösungssystem der eben erhaltenen Gleichung zusammensetzen. Die letztere Gleichung enthält aber nur $m^{(1)} - 1$ zu bestimmende Formen und wenn folglich der oben ausgesprochene Satz für eine solche Gleichung als richtig angenommen wird, so ist derselbe auch für die vorgelegte Gleichung bewiesen. Nun gilt unser Satz für $m^{(1)} = 1$, da die diesem Falle entsprechende Gleichung

$$F_1 X_1 = 0$$

offenbar gar keine Lösung besitzt und damit ist der Beweis allgemein erbracht.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$(x_1 x_4 - x_2^2) X_1 + (x_2 x_3 - x_1 x_4) X_2 + (x_2 x_4 - x_3^2) X_3 = 0,$$

wo als Coefficienten die nämlichen 3 quadratischen Formen auftreten, auf welche wir oben bei Behandlung der cubischen Raumcurve geführt wurden. Wir erkennen leicht, dass aus den beiden Lösungssystemen

$$X_1 = x_3, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_1,$$
$$X_1 = x_4, \quad X_2 = x_3, \quad X_3 = x_2$$

sich jedes andere Lösungssystem jener Gleichung zusammensetzen lässt. Denn bezeichnet X_1, X_2, X_3 irgend ein Lösungssystem, so kann man zunächst mit Hülfe des ersteren der beiden Lösungssysteme alle diejenigen Glieder in der Form X_1 wegschaffen, welche x_3 als Factor enthalten und hierauf lassen sich mit Hülfe des zweiten Lösungssystems alle mit x_4 multiplicirten Glieder in X_1 beseitigen, sodass in dem nun entstandenen Lösungssysteme X_1', X_2', X_3' die Form X_1' von x_3 und x_4 unabhängig ist. Setzen wir jetzt in der identisch erfüllten Relation

$$(x_1x_3 - x_2^2)X_1' + (x_2x_3 - x_1x_4)X_2' + (x_2x_4 - x_3^2)X_3' = 0$$

$x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ ein, so ergiebt sich $X_1' = 0$ und hieraus folgt dann

$$X_2' = A(x_2x_4 - x_3^2), \quad X_3' = A(x_1x_4 - x_2x_3),$$

wo A eine beliebige Form der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 bedeutet. Auch das so erhaltene Lösungssystem ist eine Combination jener beiden vorhin angegebenen Lösungssysteme, wie man erkennt, wenn man das erstere Lösungssystem mit Ax_4, das zweite mit $-Ax_3$ multiplicirt und dann die entsprechenden Formen addirt.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung

$$F_1X_1 + F_2X_2 + \cdots + F_6X_6 = 0,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die oben angegebenen 6 quadratischen Formen der 5 Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bedeuten. Man erhält die folgenden 8 Lösungen

$$\begin{array}{llllll}
X_1=x_3, & X_2=-x_2, & X_3=-x_1, & X_4=x_1, & X_5=0\,, & X_6=0\,,\\
X_1=x_4, & X_2=-x_3, & X_3=-x_2, & X_4=x_2, & X_5=0\,, & X_6=0\,,\\
X_1=x_5, & X_2=0\,, & X_3=-x_3, & X_4=0\,, & X_5=x_2, & X_6=0\,,\\
X_1=0\,, & X_2=x_3, & X_3=0\,, & X_4=-x_2, & X_5=x_1, & X_6=0\,,\\
X_1=0\,, & X_2=x_4, & X_3=-x_3, & X_4=0\,, & X_5=0\,, & X_6=x_1,\\
X_1=0\,, & X_2=x_5, & X_3=-x_4, & X_4=0\,, & X_5=0\,, & X_6=x_2,\\
X_1=0\,, & X_2=0\,, & X_3=x_4, & X_4=-x_1, & X_5=x_3, & X_6=-x_2,\\
X_1=0\,, & X_2=0\,, & X_3=x_5, & X_4=-x_5, & X_5=x_4, & X_6=-x_3,
\end{array}$$

und man zeigt dann in derselben Weise wie in ersterem Beispiele, dass jede andere Lösung durch Combination aus diesen erhalten werden kann.

Wir haben vorhin die Endlichkeit des vollen Systems von Lösungen für den Fall bewiesen, dass es sich um eine einzige Gleichung handelt. Aber die dort benutzte Schlussweise überträgt sich unmittelbar auf den Fall, in welchem mehrere Gleichungen von der in Rede stehenden

Art gleichzeitig zu befriedigen sind. Wir sprechen daher den allgemeineren Satz aus:

Wenn ein System von m Gleichungen

$$F_{t1}X_1 + F_{t2}X_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}} = 0 \quad (t=1,2,\ldots,m)$$

vorgelegt ist, in welchem die Coefficienten $F_{t1}, F_{t2}, \ldots, F_{tm^{(1)}}$ *gegebene Formen von n Veränderlichen und* $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ $m^{(1)}$ *zu bestimmende Formen sind, so besitzt dasselbe stets eine endliche Zahl* $m^{(2)}$ *von Lösungssystemen*

$$X_1 = X_{1s}, \; X_2 = X_{2s}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}s} \quad (s=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

derart, dass jedes andere Lösungssystem in die Gestalt

$$X_l = A_1 X_{l1} + A_2 X_{l2} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{lm^{(2)}} \quad (l=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(2)}}$ *ebenfalls Formen der n Veränderlichen sind*).*

II.

Die Endlichkeit der Formen mit ganzzahligen Coefficienten.

Die sämmtlichen bisher abgeleiteten Sätze beruhen wesentlich auf dem Theoreme I des vorigen Abschnittes. Während wir dort die in den Formen auftretenden Coefficienten als Zahlen eines beliebigen Rationalitätsbereiches annahmen, so wollen wir nunmehr den Fall in Betracht ziehen, dass dieselben durchweg ganze Zahlen sind. Dementsprechend lässt sich jenem Theoreme I eine weitergreifende Fassung geben, welche dasselbe auch für Anwendungen auf zahlentheoretische Untersuchungen geeignet macht und, wie folgt, lautet:

Theorem II. *Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen* $F_1, F_2, F_3, \ldots$ *mit* ganzzahligen *Coefficienten und von beliebigen Ordnungen in den n homogenen Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vorgelegt, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt*

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m$$

bringen lässt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *ganzzahlige Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.*

Wie man sieht, wird hier im Unterschiede zu der früheren Fassung des Theorems verlangt, dass in gleicher Weise wie die gegebenen Formen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ auch die bei der Darstellung zu verwendenden Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen mit ganzzahligen Coefficienten sind.

*) Dieser Satz ist für eine nicht homogene Veränderliche von L. Kronecker in seinem Beweise für die Endlichkeit des Systems der ganzen algebraischen Grössen einer Gattung zur Geltung gebracht; vgl. Crelle's J. Bd. 92, S. 18.

Die zum Beweise des Theorems I angewandte Schlussweise reicht zum Beweise des Theorems II nicht mehr aus. Denn das frühere Verfahren beruht darauf, dass wir die Grade der Formen $F_2, F_3, \ldots$ in Bezug auf die eine Veränderliche x_n durch geeignete Combination mit der Form F_1 unter die Ordnung r von F_1 herabdrückten. Sollen hierbei keine gebrochenen Zahlen eingeführt werden, so muss der Coefficient von x_n^r in F_1 nothwendig gleich der positiven oder negativen Einheit sein, was im Allgemeinen nicht der Fall ist und auch durch lineare ganzzahlige Transformationen der Veränderlichen nicht immer erreicht werden kann. Es bedarf daher zum Beweise des Theorems II einer neuen Schlussweise und durch diese gewinnen wir offenbar zugleich für Theorem I einen zweiten Beweis.

Wir bezeichnen allgemein mit f_s, die von der Veränderlichen x_n freien Glieder der Form F_s; sind dann alle Formen der unendlichen Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identisch Null, so setzen wir

$$F_s^{(1)} = F_s, \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

im anderen Falle sei f_α die erste von Null verschiedene Form der Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$, ferner f_β die erste Form derselben Reihe, welche nicht einem Producte von der Gestalt $a_\alpha f_\alpha$ gleich ist, worin a_α eine ganzzahlige Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeutet; f_γ sei die erste Form jener Reihe, welche sich nicht in die Gesalt $a_\alpha f_\alpha + a_\beta f_\beta$ bringen lässt, wo a_α und b_β wiederum ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind und in dieser Weise fahren wir fort. Wäre nun unser Theorem II für den Fall von $n-1$ homogenen Veränderlichen bereits bewiesen und beachten wir, dass in der gewonnenen Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ keine Form durch lineare Combination aus den vorhergehenden Formen erhalten werden kann, so folgt, dass diese Formenreihe nothwendig im Endlichen abbrechen muss. Es sei demgemäss f_λ die letzte Form dieser Reihe, so dass stets

$$f_s = a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s} f_\lambda = l_s(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

gesetzt werden kann, wo $a_{\alpha s}, a_{\beta s}, \ldots, a_{\lambda s}$ ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$F_s^{(1)} = F_s - l_s(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

so sind dies Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen jede die Veränderliche x_n als Factor enthält. Wir bezeichnen allgemein mit $x_n f_s^{(1)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(1)}$, welche lediglich mit der ersten Potenz von x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Verschwinden diese Formen sämmtlich, so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)}, \quad (s=1,2,3,\ldots).$$

Ist dagegen jede Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ eine lineare Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$, wie folgt

$$f_s^{(1)} = a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

In jedem anderen Falle sei $f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination aus $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ hervorgehende Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$, ferner sei $f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ die erste Form dieser Reihe, welche keiner linearen Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ gleich ist und entsprechend $f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination von $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ hervorgehende Form der nämlichen Reihe. Die so entstehende Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}, \ldots$ bricht unter der vorhin gemachten Annahme nothwendig im Endlichen ab, und wenn $f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$ die letzte Form der Reihe bezeichnet, so finden wir stets

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}\left(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}\right), \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

wo $l_s^{(1)}$ eine lineare homogene Function jener Formen bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}\left(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, F_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}\right),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(2)}$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich den Factor x_n^2. Wir bezeichnen demgemäss allgemein mit $x_n^2 f_s^{(2)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(2)}$, welche lediglich mit der zweiten Potenz der Veränderlichen x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1\ x_2, \ldots, x_{n-1}$. Sind diese Formen nicht sämmtlich Null oder lineare Combinationen der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$, so bezeichne $f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}$ die erste nicht in dieser Weise durch lineare Combination entstehende Form jener Reihe; desgleichen sei $f_{\beta^{(2)}}^{(2)}$ die erste nicht durch $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}$ linear darstellbare Form in derselben Reihe. Das in dieser Weise eingeleitete Verfahren muss wiederum nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen abbrechen, vorausgesetzt, dass unser Theorem II für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Bezeichnet demgemäss $f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$ die letzte durch jenes Verfahren sich ergebende Form, so wird stets

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}\left(f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, f_{\beta^{(2)}}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}\right), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

wo $l_s^{(2)}$ eine lineare homogene Function bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}\Big(x_n^2 F_\alpha, x_n^2 F_\beta, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F_{\alpha(1)}^{(1)}, x_n F_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, x_n F_{\lambda(1)}^{(1)},$$
$$F_{\alpha(2)}^{(2)}, F_{\beta(2)}^{(2)}, \ldots, F_{\lambda(2)}^{(2)}\Big), \quad (s=1,2,3,\ldots),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(3)}$ sämmtlich den Factor x_n^3. Wir bezeichnen wiederum allgemein mit $x_n^3 f_s^{(3)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(3)}$, welche mit keiner höheren als der dritten Potenz von x_n multiplicirt sind und gelangen so zu einer Formenreihe $f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, \ldots$, welche in entsprechender Weise einer weiteren Behandlung zu unterwerfen ist. Es ist klar, wie die fortgesetzte Wiederholung des angegebenen Verfahrens zu der folgenden Formenreihe führt

$$f_{\alpha(\pi)}^{(\pi)}, f_{\beta(\pi)}^{(\pi)}, \ldots, f_{\lambda(\pi)}^{(\pi)}, f_{\alpha(\tau)}^{(\tau)}, f_{\beta(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, f_{\lambda(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, \ldots$$

wo $\pi, \tau, \ldots$ gewisse ganze positive Zahlen bedeuten und keine der auftretenden Formen einer linearen Combination der vorhergehenden Formen gleich ist. In Folge des letzteren Umstandes muss auch jene Reihe im Endlichen abbrechen, vorausgesetzt, dass unser Theorem II für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Wir bezeichnen die letzte Form jener Reihe mit $f_{\lambda(\omega)}^{(\omega)}$ und zeigen nun, dass jede Form in der ursprünglich vorgelegten Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ einer linearen Combination der Formen

$$(8)\quad F_{\alpha(\pi)}^{(\pi)}, F_{\beta(\pi)}^{(\pi)}, \ldots, F_{\lambda(\pi)}^{(\pi)}, F_{\alpha(\tau)}^{(\tau)}, F_{\beta(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, F_{\lambda(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, F_{\alpha(\omega)}^{(\omega)}, F_{\beta(\omega)}^{(\omega)}, \ldots, F_{\lambda(\omega)}^{(\omega)}$$

gleich wird. Ist nämlich F_s irgend eine Form der ursprünglich vorgelegten Formenreihe und r die Ordnung dieser Form in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)}, \\ F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_s^{(1)} &= F_s - l_s, \end{aligned}$$

wo $l_s^{(r)}, l_s^{(r-1)}, \ldots, l_s$ lineare Combinationen der eben vorhin angegebenen Formen (8) sind. Da ferner die Form $F_s^{(r+1)}$ eine homogene Function von der Ordnung r ist und in Folge ihrer Bildungsweise durch x_n^{r+1} theilbar ist, so ist sie nothwendig identisch gleich Null und aus den obigen Gleichungen folgt, dass auch F_s eine lineare Combination der vorhin angegebenen Formen (8) ist. Diese Formen (8) ihrerseits sind nun aus den Formen

$$F_{\alpha(\pi)}, F_{\beta(\pi)}, \ldots, F_{\lambda(\pi)}, F_{\alpha(\tau)}, F_{\beta(\tau)}, \ldots, F_{\lambda(\tau)}, \ldots, F_{\alpha(\omega)}, F_{\beta(\omega)}, \ldots, F_{\lambda(\omega)}$$

durch lineare Combination entstanden und es ist daher offenbar

$m = \lambda^{(\omega)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem II verlangt. Das Theorem II ist mithin für n Veränderliche bewiesen, unter der Voraussetzung, dass dasselbe für $n-1$ Veränderliche gilt.

Es bedarf jetzt noch des Nachweises, dass das Theorem II für Formen ohne Veränderliche d. h. für eine nicht abbrechende Reihe von ganzen Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gilt. Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir an, es sei c_μ die erste von Null verschiedene Zahl der Reihe; es sei ferner $c_{\mu'}$ die nächste Zahl der Reihe, welche nicht durch c_μ theilbar ist. Wir bestimmen dann den grössten gemeinsamen Theiler $c_{\mu\mu'}$ der beiden Zahlen c_μ und $c_{\mu'}$; derselbe ist jedenfalls kleiner als der absolute Werth von c_μ. Wenn es nun noch eine Zahl $c_{\mu''}$ in jener Reihe giebt, welche nicht durch $c_{\mu\mu'}$ theilbar ist, so bestimmen wir den grössten gemeinsamen Theiler $c_{\mu\mu'\mu''}$ der beiden Zahlen $c_{\mu\mu'}$ und $c_{\mu''}$ und es ist dann $c_{\mu\mu'\mu''}$ kleiner als $c_{\mu\mu'}$. Auf diese Weise ergiebt sich die Zahlenreihe $c_\mu, c_{\mu\mu'}, c_{\mu\mu'\mu''}, \ldots$, in welcher jede Zahl kleiner ist als die vorhergehende. Eine solche Reihe bricht nothwendig im Endlichen ab und es sei $c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}}$ die letzte Zahl jener Reihe. Diese Zahl ist der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $c_\mu, c_{\mu'}, \ldots, c_{\mu^{(\varkappa)}}$ und es lassen sich daher ganze positive oder negative Zahlen $a, a', \ldots, a^{(\varkappa)}$ derart finden, dass

$$c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}} = a c_\mu + a' c_{\mu'} + \cdots + a^{(\varkappa)} c_{\mu^{(\varkappa)}}$$

wird. Da andererseits jede Zahl der ursprünglich vorgelegten Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ein Vielfaches der Zahl $c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}}$ ist, so wird $m = \mu^{(\varkappa)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem II verlangt.

Aus dem eben bewiesenen Theoreme lassen sich ohne Schwierigkeit alle diejenigen Sätze entwickeln, welche den in dem ersten Abschnitte aus Theorem I abgeleiteten Sätzen entsprechen. Wir wollen jedoch in dieser Richtung die Untersuchung nicht fortführen, sondern uns im Folgenden lediglich auf die Behandlung solcher Fragen beschränken, welche in den Wirkungskreis des Theorems I fallen.

III.

Die Gleichungen zwischen den Formen beliebiger Formensysteme.

Wir knüpfen an die Entwickelungen in Abschnitt I an und denken uns demgemäss im weiteren Verlaufe der Untersuchung die Coefficienten der in Betracht kommenden Formen nicht speciell als ganze Zahlen, sondern als irgend welche Zahlen eines beliebigen Rationalitätsbereiches.

Ist der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}})$ vorgelegt, so erhalten wir alle übrigen Formen dieses Moduls d. h. alle nach demselben der Null congruenten Formen, wenn wir den Ausdruck

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$$

bilden und die Ordnungen der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ so wählen, dass die Producte $A_1 F_1, A_2 F_2, \ldots, A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$ sämmtlich von der nämlichen Ordnung in den Veränderlichen sind und ihre Summe folglich eine homogene Function darstellt. Es werden nun zwei verschiedene Formensysteme $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ und $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$ die nämliche Form des Moduls liefern, wenn

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}} = B_1 F_1 + B_2 F_2 + \cdots + B_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$$

oder

$$(A_1 - B_1) F_1 + (A_2 - B_2) F_2 + \cdots + (A_{m^{(1)}} - B_{m^{(1)}}) F_{m^{(1)}} = 0$$

wird d. h.: wir erhalten aus dem Formensysteme $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ alle übrigen zu der nämlichen Form des Moduls führenden Systeme $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$ mittelst der Formeln

$$B_1 = A_1 + X_1,\ B_2 = A_2 + X_2, \ldots, B_{m^{(1)}} = A_{m^{(1)}} + X_{m^{(1)}},$$

wo $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ irgend ein Lösungssystem der Gleichung

$$(9) \qquad F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0$$

bedeutet. Um daher eine gründlichere Einsicht in die Structur des vorgelegten Moduls zu erhalten, ist eine Untersuchung der letzteren Gleichung nothwendig, wo dann $F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}}$ als die gegebenen Coefficienten und $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ als die gesuchten Formen zu betrachten sind. Nach den Entwicklungen in Abschnitt I besitzt eine solche Gleichung eine endliche Zahl $m^{(2)}$ von Lösungssystemen

$$X_1 = F_{1s}^{(1)},\ X_2 = F_{2s}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = F_{m^{(1)}s}^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m^{(2)})$$

derart, dass jedes andere Lösungssystem sich in die Gestalt

$$(10)\ X_t = A_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}}^{(1)} F_{t m^{(2)}}^{(1)} \qquad (t = 1, 2, \ldots m^{(1)})$$

bringen lässt, wo $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(2)}}^{(1)}$ Formen der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Unter diesen $m^{(2)}$ Lösungssystemen möge überdies keines vorhanden sein, welches aus den übrigen durch lineare Combination erhalten werden kann. Verändern wir nun in den Formeln (10) die Formen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(2)}}^{(1)}$, so gelangen wir dadurch nicht immer nothwendig zu einem anderen Lösungssystem der Gleichung (9), es werden vielmehr zwei verschiedene Formensysteme $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(2)}}^{(1)}$ und $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{m^{(2)}}^{(1)}$ dann das nämliche Lösungssystem $X_1, X_2, \ldots, X_m$ liefern, wenn

$$A_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)} = B_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + B_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + B_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)}$$
$$(t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

oder

$$\left(A_1^{(1)} - B_1^{(1)}\right) F_{t1}^{(1)} + \left(A_2^{(1)} - B_2^{(1)}\right) F_{t2}^{(1)} + \cdots + \left(A_{m^{(2)}}^{(1)} - B_{m^{(2)}}^{(1)}\right) F_{tm^{(2)}}^{(1)} = 0$$
$$(t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wird und auf diese Weise werden wir auf die Untersuchung des Gleichungsystems

$$(11)\quad F_{t1}^{(1)} X_1^{(1)} + F_{t2}^{(1)} X_2^{(1)} + \cdots + F_{tm^{(2)}}^{(1)} X_{m^{(2)}}^{(1)} = 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

geführt, wo $F_{t1}^{(1)}, F_{t2}^{(1)}, \ldots, F_{tm^{(2)}}^{(1)}$ die gegebenen Coefficienten und $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)}$ die zu bestimmenden Formen sind. Das erhaltene Gleichungssystem (11) heisse das aus (9) „abgeleitete Gleichungssystem“.

Es sei hier besonders hervorgehoben, dass bei der Bildung des abgeleiteten Gleichungssystems ein derartiges volles Formensystem zu Grunde gelegt wird, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann. Die Zahl und die Ordnungen der Lösungen eines solchen Lösungssystems sind, wie man leicht erkennt, vollkommen bestimmte und auch die in den Lösungen auftretenden Formen sind im wesentlichen bestimmte, insofern jedes andere Lösungssystem von der nämlichen Beschaffenheit dadurch entsteht, dass man die Lösungen des anfänglichen Systems mit anderen darin vorkommenden Lösungen von gleichen oder niederen Ordnungen linear combinirt. Zufolge dieses Umstandes ist auch das abgeleitete Gleichungssystem durch das ursprüngliche Gleichungssystem in entsprechendem Sinne ein bestimmtes.

Die Coefficienten des abgeleiteten Gleichungssystems bestehen, wie man sieht, aus den Formen der Lösungssysteme der ursprünglichen Gleichung und wir erhalten somit die zwischen den Lösungen der ursprünglichen Gleichung (9) bestehenden Relationen durch Aufstellung der Lösungen des abgeleiteten Gleichungssystems (11). Wir bestimmen demgemäss für das letztere das volle System von Lösungen

$$X_1^{(1)} = F_{1s}^{(2)},\ X_2^{(1)} = F_{2s}^{(2)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)} = F_{m^{(2)}s}^{(2)}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m^{(3)})$$

derart, dass keine dieser Lösungen durch lineare Combination der übrigen erhalten werden kann und überdies jedes andere Lösungssystem die Gestalt

$$X_t^{(1)} = A_1^{(2)} F_{t1}^{(2)} + A_2^{(2)} F_{t2}^{(2)} + \cdots + A_{m^{(3)}}^{(2)} F_{tm^{(3)}}^{(2)} \qquad (t=1,2,..,m^{(2)})$$

annimmt, wo $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \ldots, A_{m^{(3)}}^{(2)}$ irgend welche Formen sind. Der letztere Ansatz führt auf das Gleichungssystem

$$(12)\quad F_{t1}^{(2)} X_1^{(2)} + F_{t2}^{(2)} X_2^{(2)} + \cdots + F_{tm^{(3)}}^{(2)} X_{m^{(3)}}^{(2)} = 0, \qquad (t=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

wo $F_{t1}^{(2)}, F_{t2}^{(2)}, \ldots, F_{tm^{(3)}}^{(2)}$ die gegebenen Coefficienten und $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{m^{(3)}}^{(2)}$ die zu bestimmenden Formen sind. Dieses dritte Gleichungssystem (12) ist aus dem zweiten Gleichungssysteme (11) in der nämlichen Weise abgeleitet, wie das zweite Gleichungssystem aus der ursprünglichen Gleichung (9). Durch Fortsetzung des eben eingeschlagenen Verfahrens erhalten wir eine Kette von abgeleiteten Gleichungssystemen, in welcher stets die Zahl der zu bestimmenden Formen irgend eines Gleichungssystemes übereinstimmt mit der Zahl der Gleichungen des darauf folgenden Gleichungssystems.

Zur einheitlicheren Darstellung der weiteren Untersuchungen ist es nöthig, an Stelle der einen ursprünglichen Gleichung (9) ein beliebiges Gleichungssystem von der Gestalt

$$(13)\quad F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0 \qquad (t=1,2,..,m)$$

zu setzen. Die Anwendung des oben angegebenen Verfahrens gestaltet sich dann zu einer allgemeinen Theorie solcher Gleichungssysteme, deren Kern in dem folgenden Satze liegt:

Theorem III. *Ist ein Gleichungssystem von der Gestalt* (13) *vorgelegt, so führt die Aufstellung der Relationen zwischen den Lösungen desselben zu einem zweiten Gleichungssysteme von der nämlichen Gestalt; aus diesem zweiten abgeleiteten Gleichungssysteme entspringt in gleicher Weise ein drittes abgeleitetes Gleichungssystem. Das so begonnene Verfahren erreicht bei weiterer Fortsetzung stets ein Ende und zwar ist spätestens das n^{te} Gleichungssystem jener Kette ein solches, welches keine Lösung mehr besitzt.*

Der Beweis dieses Theorems ist nicht mühelos; er ergiebt sich aus den folgenden Schlüssen.

Unter den Gleichungen des vorgelegten Systems könnten einige eine Folge der übrigen sein, indem sie von jedem Formensysteme befriedigt werden, welches diesen letzteren Gleichungen genügt. Nehmen wir an, dass solche Gleichungen bereits ausgeschaltet sind, so ist, wenn überhaupt Lösungen vorhanden sein sollen, nothwendig, die Zahl m der Gleichungen des Systems (13) kleiner als die Zahl $m^{(1)}$ der zu bestimmenden Formen und ausserdem sind die m-reihigen Determinanten

$$D_{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{vmatrix} F_{1i_1} & F_{1i_2} & \cdot & F_{1i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{mi_1} & F_{mi_2} & \cdot & F_{mi_m} \end{vmatrix}$$

wo $i_1, i_2, \dots, i_m$ irgend m von den Zahlen $1, 2, \dots, m^{(1)}$ bedeuten, nicht sämmtlich gleich Null. Es sei etwa $D = D_{12\dots m}$ eine nicht verschwindende Form von der Ordnung r und zwar möge diese Determinante D so ausgewählt sein, dass die Ordnungen der übrigen Determinanten in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ nicht grösser als r sind. Wir denken uns ausserdem eine derartige homogene lineare Substitution der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ausgeführt, dass dadurch der Coefficient von x_n^r in D einen von Null verschiedenen Werth erhält. Das Gleichungssystem (13) besitzt offenbar folgende Lösungen

$$(14)\quad \begin{array}{l} X_1 = D_{m+1,2,\dots,m}, \dots, X_m = D_{1,2,\dots,m-1,m+1}, X_{m+1} = D, X_{m+2} = 0, \dots, X_{m^{(1)}} = 0, \\ X_1 = D_{m+2,2,\dots,m}, \dots, X_m = D_{1,2,\dots,m-1,m+2}, X_{m+1} = 0, X_{m+2} = D, \dots, X_{m^{(1)}} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1 = D_{m^{(1)},2,\dots,m}, \dots, X_m = D_{1,2,\dots,m-1,m^{(1)}}, X_{m+1} = 0, X_{m+2} = 0, \dots, X_{m^{(1)}} = D. \end{array}$$

Ist nun eine Lösung $X_1, X_2, \dots, X_{m^{(1)}}$ des Gleichungssystems (13) vorgelegt, so lässt sich durch Combination mit der ersten Lösung in (14) aus jenem Lösungssystem $X_1, X_2, \dots, X_{m^{(1)}}$ ein anderes ableiten, in welchem an Stelle der Form X_{m+1} eine Form steht, deren Grad in Bezug auf die Veränderliche x_n kleiner ist, als die Ordnung r von D angiebt, während die Formen $X_{m+2}, X_{m+3}, \dots, X_{m^{(1)}}$ ungeändert bleiben. Die so erhaltene Lösung lässt sich wiederum mit dem zweiten Lösungssystem in (14) derart combiniren, dass an Stelle der Form X_{m+2} eine Form tritt, deren Grad in Bezug auf die Veränderliche x_n kleiner als r ist und wir erhalten durch entsprechende Verwendung der übrigen Lösungen in (14) schliesslich eine Lösung $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_{m^{(1)}}$, wo die Formen $\Xi_{m+1}, \Xi_{m+2}, \dots, \Xi_{m^{(1)}}$ in Bezug auf x_n von einem niederen Grade sind als die Zahl r angiebt. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Grade der Formen $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_m$ bezüglich der Veränderlichen x_n kleiner sind als r. Zu dem Zwecke multipliciren wir die Gleichung

$$F_{t1}\Xi_1 + F_{t2}\Xi_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}}\Xi_{m^{(1)}} = 0$$

mit der auf das Element F_{ts} bezüglichen $m-1$ reihigen Unterdeterminante von D und summiren alle auf diese Weise für $t = 1, 2, \dots, m$ entstehenden Gleichungen. Wir erhalten so eine Relation von der Gestalt

$$D\Xi_s + D_{1,2,\dots,m+1,\dots,m}\,\Xi_{m+1} + D_{1,2,\dots,m+2,\dots,m}\,\Xi_{m+2} + D_{1,2,\dots,m^{(1)},\dots,m}\,\Xi_{m^{(1)}} = 0,$$
$$(s = 1, 2, \dots, m)$$

und da die Ordnungen der hier vorkommenden Determinanten nicht grösser sind als die Ordnung r von D, so sind in der That die Grade der Formen Ξ_s in Bezug auf x_n sämmtlich kleiner als r.

Der eben bewiesene Umstand rechtfertigt den Ansatz

$$\Xi_s = \xi_{s1} x_n^{r-1} + \xi_{s2} x_n^{r-2} + \cdots + \xi_{sr}, \quad (s=1,2,\ldots,m^{(1)}) \tag{15}$$

wo $\xi_{s1}, \xi_{s2}, \ldots, \xi_{sr}$ Formen bedeuten, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Wenn wir diese $m^{(1)}$ Ausdrücke $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{m^{(1)}}$ aus (15) beziehungsweise für $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ in die ursprünglichen Gleichungen (13) eintragen, linker Hand nach Potenzen von x_n ordnen und die mit gleichen Potenzen von x_n multiplicirten Ausdrücke einzeln gleich Null setzen, so erhalten wir eine gewisse Anzahl μ von Gleichungen zur Bestimmung der $m^{(1)}r$ Formen $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{m^{(1)}r}$. Bezeichnen wir der Kürze halber die letzteren Formen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mu^{(1)}}$, so erhalten jene μ Gleichungen die Gestalt

$$\varphi_{t1}\xi_1 + \varphi_{t2}\xi_2 + \cdots + \varphi_{t\mu^{(1)}}\xi_{\mu^{(1)}} = 0, \quad (t=1,2,\ldots,\mu) \tag{16}$$

wo die Coefficienten $\varphi_{t1}, \varphi_{t2}, \ldots, \varphi_{t\mu^{(1)}}$ bekannte Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Es sei nun

$$\xi_1 = \varphi_{1s}^{(1)}, \; \xi_2 = \varphi_{2s}^{(1)}, \ldots, \xi_{\mu^{(1)}} = \varphi_{\mu^{(1)}s}^{(1)} \quad (s=1,2,\ldots,\mu^{(2)})$$

ein volles Lösungssystem von (16) und zwar ein solches, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann. Aus einer jeden Lösung dieses Lösungssystems lässt sich vermöge (15) eine Lösung der ursprünglichen Gleichungen (13) zusammensetzen. Die so erhaltenen Lösungen der Gleichungen (13) seien

$$\Xi_1 = \Phi_{1s}^{(1)}, \; \Xi_2 = \Phi_{2s}^{(1)}, \ldots, \Xi_{m^{(1)}} = \Phi_{m^{(1)}s}^{(1)}. \quad (s=1,2,\ldots,\mu^{(2)}) \tag{17}$$

Durch Zusammenfassung der bisher angestellten Ueberlegungen gelangen wir zu dem Ergebniss, dass eine jede Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ der ursprünglichen Gleichung (13) sich in die Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_1^{(1)}\Phi_{11}^{(1)} + a_2^{(1)}\Phi_{12}^{(1)} + \cdots + a_{\mu^{(2)}}^{(1)}\Phi_{1\mu^{(2)}}^{(1)} + A_1^{(1)} D_{m+1,2,\cdots,m} \\
&\qquad + A_2^{(1)} D_{m+2,2,\cdots,m} + \cdots + A_{m^{(1)}-m}^{(1)} D_{m^{(1)},2,\cdots,m}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
X_m &= a_1^{(1)}\Phi_{m1}^{(1)} + a_2^{(1)}\Phi_{m2}^{(1)} + \cdots + a_{\mu^{(2)}}^{(1)}\Phi_{m\mu^{(2)}}^{(1)} + A_1^{(1)} D_{1,2,\cdots,m-1,m+1} \\
&\qquad + A_2^{(1)} D_{1,2,\cdots,m-1,m+2} + \cdots + A_{m^{(1)}-m}^{(1)} D_{1,2,\cdots,m-1,m^{(1)}}, \\
X_{m+1} &= a_1^{(1)}\Phi_{m+1,1}^{(1)} + a_2^{(1)}\Phi_{m+1,2}^{(1)} + \cdots + a_{\mu^{(2)}}^{(1)}\Phi_{m+1,\mu^{(2)}}^{(1)} + A_1^{(1)} D + 0 + \cdots + 0, \\
X_{m+2} &= a_1^{(1)}\Phi_{m+2,1}^{(1)} + a_2^{(1)}\Phi_{m+2,2}^{(1)} + \cdots + a_{\mu^{(2)}}^{(1)}\Phi_{m+2,\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + A_2^{(1)} D + \cdots + 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
X_{m^{(1)}} &= a_1^{(1)}\Phi_{m^{(1)}1}^{(1)} + a_2^{(1)}\Phi_{m^{(1)}2}^{(1)} + \cdots + a_{\mu^{(2)}}^{(1)}\Phi_{m^{(1)}\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + 0 + \cdots + A_{m^{(1)}-m}^{(1)} D
\end{aligned}$$

bringen lässt, wo $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Insbesondere müssen daher auch die Lösungen

$$X_1 = x_n \Phi_{1s}^{(1)}, \ X_2 = x_n \Phi_{2s}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = x_n \Phi_{m^{(1)}s}^{(1)} \qquad (s=1,2,\ldots,\mu^{(2)})$$

in obiger Gestalt darstellbar sein und wir setzen dem entsprechend

$$(18)\quad \begin{aligned}
x_n \Phi_{1s}^{(1)} &= \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{11}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{1\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D_{m+1,2,\ldots,m} + \cdots + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D_{m^{(1)},2,\ldots,m},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n \Phi_{ms}^{(1)} &= \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D_{1,2,\ldots,m-1,m+1} + \cdots\\
&\qquad + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D_{1,2,\ldots,m-1,m^{(1)}};\\
x_n \Phi_{m+1,s}^{(1)} &= \psi_{1s}^{(3)} \Phi_{m+1,1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m+1,\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D + 0 + \cdots + 0,\\
x_n \Phi_{m+2,s}^{(1)} &= \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m+2,1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m+2,\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + \chi_{2s}^{(2)} D + \cdots + 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n \Phi_{m^{(1)}s}^{(1)} &= \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m^{(1)}1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m^{(1)}\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + 0 + \cdots + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D,\\
&\qquad (s=1,2,\ldots,\mu^{(2)})
\end{aligned}$$

wo die Formen $\psi_{1s}^{(2)}, \ldots, \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)}$ und in Folge dessen auch die Formen $\chi_{1s}^{(2)}, \ldots, \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten.

Die Lösungen (14) und (17) bilden zusammengenommen ein volles Lösungssystem der ursprünglich vorgelegten Gleichung (13) und die Aufstellung der zwischen diesen Lösungen bestehenden Relationen führt zu einem Gleichungssystem von der folgenden Gestalt

$$(19)\quad \begin{aligned}
&\Phi_{11}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{1\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D_{m+1,2,\ldots,m} Y_1^{(1)} + \cdots + D_{m^{(1)},2,\ldots,m} Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{m1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D_{1,2,\ldots,m-1,m+1} Y_1^{(1)} + \cdots\\
&\qquad + D_{1,2,\ldots,m-1,m^{(1)}} Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0,\\
&\Phi_{m+1,1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m+1,\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D\, Y_1^{(1)} + 0 + \cdots + 0 = 0,\\
&\Phi_{m+2,1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m+2,\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + D\, Y_2^{(1)} + \cdots + 0 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{m^{(1)}1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m^{(1)}\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + \cdots + D\, Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0,
\end{aligned}$$

wo $X_1^{(1)}, \ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)}, Y_1^{(1)}, \ldots, Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ die zu bestimmenden Formen sind.

Hierbei ist besonders hervorzuheben, dass möglicherweise einige unter den Lösungen (14) und (17) gleich linearen Combinationen der übrigen Lösungen sind und in Folge dessen das Gleichungssystem (19) nicht in dem oben definirten und durch Theorem III geforderten Sinne aus (13) abgeleitet worden ist. Um das Gleichungssystem (19) in das aus (13) abgeleitete Gleichungssystem umzuwandeln, bedarf es also noch einer Reduction des Gleichungssystems (19), welche in der That späterhin ausgeführt werden wird.

Das Gleichungssystem (19) hat, wie aus (18) hervorgeht, die Lösungen

$$(20)\quad \begin{array}{l}
X_1^{(1)}=\psi_{11}^{(2)}-x_n,\ X_2^{(1)}=\psi_{21}^{(2)}\quad ,\ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}1}^{(2)}\quad ,\ Y_1^{(1)}=\chi_{11}^{(2)},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,1}^{(2)},\\
X_1^{(1)}=\psi_{12}^{(2)}\quad ,\ X_2^{(1)}=\psi_{22}^{(2)}-x_n,\ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}2}^{(2)}\quad ,\ Y_1^{(1)}=\chi_{12}^{(2)},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,2}^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_1^{(1)}=\psi_{1\mu^{(2)}}^{(2)}\quad ,\ X_2^{(1)}=\psi_{2\mu^{(2)}}^{(2)}\quad ,\ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}^{(2)}-x_n,\ Y_1^{(1)}=\chi_{1\mu^{(2)}}^{(2)},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad,\ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}^{(2)}.
\end{array}$$

Ist jetzt irgend eine Lösung $X_1^{(1)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)},\ Y_1^{(1)},\ldots,Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ des Gleichungssystems (19) vorgelegt, so lässt sich aus derselben durch Combination mit den Lösungen (20) eine andere Lösung

$$X_1^{(1)}=\xi_1^{(1)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)},\quad Y_1^{(1)}=\mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$$

herstellen, wo $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Setzt man diese Lösung $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)},\mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ in die letzten $m^{(1)}-m$ Gleichungen von (19) ein, so sieht man leicht ein, dass die Formen $\mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ identisch Null sind und wir erhalten somit zur Bestimmung der Formen $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ die folgenden Gleichungen

$$\Phi_{t1}^{(1)}\xi_1^{(1)}+\Phi_{t2}^{(1)}\xi_2^{(1)}+\cdots+\Phi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}=0.\quad (t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

Die Formen $\Phi_{t1}^{(1)},\Phi_{t2}^{(1)},\ldots,\Phi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}$ enthalten die Veränderliche x_n höchstens im Grade $r-1$. Wenn wir daher in den letzteren Gleichungen linker Hand die Coefficienten der Potenzen von x_n einzeln gleich Null setzen, so ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(21)\quad \varphi_{t1}^{(1)}\xi_1^{(1)}+\varphi_{t2}^{(1)}\xi_2^{(1)}+\cdots+\varphi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}=0,\quad (t=1,2,\ldots,\mu^{(1)})$$

wo sowohl die Coefficienten wie die zu bestimmenden Formen lediglich

die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Dieses Gleichungssystem (21) ist, wie man sieht, das aus (16) abgeleitete Gleichungssystem. Es sei nun

$$\xi_1^{(1)} = \varphi_{1s}^{(2)},\quad \xi_2^{(1)} = \varphi_{2s}^{(2)},\ \ldots,\ \xi_{\mu^{(2)}}^{(1)} = \varphi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)})$$

ein volles Lösungssystem von (21) und zwar ein solches, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann.

Fassen wir die letzteren Entwickelungen zusammen, so erkennen wir, dass eine jede Lösung des Gleichungssystems (19) sich in die Gestalt

$$\text{(22)}\quad \begin{aligned}
X_1^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{11}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{1\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}(\psi_{11}^{(2)} - x_n) + A_2^{(2)}\psi_{12}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\psi_{1\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
X_2^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{21}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{2\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}\psi_{21} + A_2^{(2)}(\psi_{22} - x_n) + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\psi_{2\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_{\mu^{(2)}}^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{\mu^{(2)}1}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}\psi_{\mu^{(2)}1}^{(2)} + A_2^{(2)}\psi_{\mu^{(2)}2}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\left(\psi_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}^{(2)} - x_n\right), \\
Y_1^{(1)} &= \ 0 \ + \cdots + \ 0 \ + A_1^{(2)}\chi_{11}^{(2)} + A_2^{(2)}\chi_{12}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\chi_{1\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} &= \ 0 \ + \cdots + \ 0 \ + A_1^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,1}^{(2)} + A_2^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,2}^{(2)} \\
&\qquad + \cdots + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}^{(2)},
\end{aligned}$$

bringen lässt, wo $a_1^{(2)}, \ldots, a_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $A_1^{(2)}, \ldots, A_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Insbesondere müssen daher auch die Lösungen

$$X_1^{(1)} = x_n\varphi_{1s}^{(2)},\ X_2^{(1)} = x_n\varphi_{2s}^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)} = x_n\varphi_{\mu^{(2)}s}^{(2)},\ Y_1^{(1)} = 0, \ldots, Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)})$$

in obiger Gestalt darstellbar sein und wir setzen dementsprechend

$$
\begin{aligned}
x_n\varphi^{(2)}_{1s} &= \psi^{(3)}_{1s}\varphi^{(2)}_{11} + \cdots + \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}\varphi^{(2)}_{1\mu^{(3)}} + \chi^{(3)}_{1s}(\psi^{(2)}_{11} - x_n) + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\psi^{(2)}_{1\mu^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}s} &= \psi^{(3)}_{1s}\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}1} + \cdots + \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}} + \chi^{(3)}_{1s}\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}\\
&\qquad + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}(\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}} - x_n),\\
0 &= 0 + \cdots + 0 + \chi^{(3)}_{1s}\chi^{(2)}_{11} + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\chi^{(2)}_{1\mu^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= 0 + \cdots + 0 + \chi^{(3)}_{1s}\chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,1} + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}},\\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)}),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

wo die Formen $\psi^{(3)}_{1s}, \ldots, \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}$ und folglich auch die Formen $\chi^{(3)}_{1s}, \ldots, \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}$ nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Nach (22) bilden die Lösungen (20) zusammengenommen mit den Lösungen

$$
X^{(1)}_1 = \varphi^{(2)}_{1s},\ X^{(1)}_2 = \varphi^{(2)}_{2s}, \ldots, X^{(1)}_{\mu^{(2)}} = \varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}s},\quad Y^{(1)}_1 = 0, \ldots, Y^{(1)}_{m^{(1)}-m} = 0
$$
$$
(s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)})
$$

ein volles Lösungssystem von (19) und die Aufstellung der zwischen diesen Lösungen bestehenden Relationen führt zu dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(2)}_{11}X^{(2)}_1 + \cdots + \varphi^{(2)}_{1\mu^{(3)}}X^{(2)}_{\mu^{(3)}} + (\psi^{(2)}_{11} - x_n)Y^{(2)}_1 + \cdots + \psi^{(2)}_{1\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}X^{(2)}_1 + \cdots + \varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}X^{(2)}_{\mu^{(3)}} + \psi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}Y^{(2)}_1 + \cdots + (\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}} - x_n)Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&0 + \cdots + 0 + \chi^{(2)}_{11}Y^{(2)}_1 + \cdots + \chi^{(2)}_{1\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&0 + \cdots + 0 + \chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,1}Y^{(2)}_1 + \cdots + \chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

wo $X^{(2)}_1, \ldots, X^{(2)}_{\mu^{(3)}}, Y^{(2)}_1, \ldots, Y^{(2)}_{\mu^{(2)}}$ die zu bestimmenden Formen sind. Dieses Gleichungssystem (24) besitzt, wie aus (23) hervorgeht, die Lösungen

$$
\begin{aligned}
&X^{(2)}_1 = \psi^{(3)}_{11} - x_n, \ldots, X^{(2)}_{\mu^{(3)}} = \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}1},\quad Y^{(2)}_1 = \chi^{(3)}_{11}, \ldots, Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X^{(2)}_1 = \psi^{(3)}_{1\mu^{(3)}}, \ldots, X^{(2)}_{\mu^{(3)}} = \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}\mu^{(3)}} - x_n,\ Y^{(2)}_1 = \chi^{(3)}_{1\mu^{(3)}}, \ldots, Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Ist jetzt irgend eine Lösung $X_1^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(3)}}^{(2)}, Y_1^{(2)}, \ldots, Y_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ des Gleichungssystems (24) vorgelegt, so lässt sich aus derselben durch Combination mit den Lösungen (25) eine andere Lösung $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$, $\mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ ableiten, wo $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Setzt man diese Lösung $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}, \mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ in die ersten $\mu^{(2)}$ Gleichungen von (24) ein, so sieht man leicht, dass die Formen $\mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ identisch Null sind und zur Bestimmung der Formen $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ erhalten wir daher die Gleichungen

$$(26)\quad \varphi_{s1}^{(2)}\xi_1^{(2)} + \varphi_{s2}^{(2)}\xi_2^{(2)} + \cdots \varphi_{s\mu^{(3)}}^{(2)}\xi_{\mu^{(3)}}^{(2)} = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})$$

wo sowohl die Coefficienten, wie die zu bestimmenden Formen lediglich die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Dieses Gleichungssystem (26) ist, wie man sieht, das aus (21) abgeleitete Gleichungssystem.

Das volle System von Lösungen des Gleichungssystems (24) lässt sich zusammensetzen aus den Lösungen (25) und aus Lösungen von der Gestalt

$$X_1^{(2)} = \xi_1^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(3)}}^{(2)} = \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}, \quad Y_1^{(2)} = 0, \ldots, Y_{\mu^{(2)}}^{(2)} = 0,$$

wo $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Lösungen des Gleichungssystems (26) sind.

Denken wir uns das eben beschriebene Verfahren fortgesetzt, so erhalten wir die Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... und ferner zugleich die daneben laufende Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme (16), (21), (26) .... Diese beiden Ketten von Gleichungssystemen stehen zu einander in engster Beziehung, indem das volle System von Lösungen des π^{ten} Gleichungssystems in der Kette (13), (19), (24), ... sich zusammensetzen lässt aus den Lösungen von der Gestalt

$$(27)\quad \begin{array}{l} X_1^{(\pi-1)} = \psi_{11}^{(\pi)} - x_n, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \psi_{\mu^{(\pi)}1}^{(\pi)}, \quad Y_1^{(\pi-1)} = \chi_{11}^{(\pi)}, \ldots, Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = \chi_{\mu^{(\pi-1)}1}^{(\pi)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^{(\pi-1)} = \psi_{1\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \psi_{\mu^{(\pi)}\mu^{(\pi)}}^{(\pi)} - x_n, \quad Y_1^{(\pi-1)} = \chi_{1\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, \\ \qquad\qquad Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = \chi_{\mu^{(\pi-1)}\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \end{array}$$

und den Lösungen von der Gestalt

$$X_1^{(\pi-1)} = \xi_1^{(\pi-1)}, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \xi_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)}, \quad Y_1^{(\pi-1)} = 0, \ldots, Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = 0,$$

wo $\xi_1^{(\pi-1)}, \ldots, \xi_{\mu(\pi)}^{(\pi-1)}$ Lösungen des π^{ten} Gleichungssystems in der Kette (16), (21), (26), ... sind. In dem Lösungssysteme (27) bedeuten $\psi_{11}^{(\pi)}, \ldots, \psi_{\mu(\pi)\mu(\pi)}^{(\pi)}$, $\chi_{11}^{(\pi)}, \ldots, \chi_{\mu(\pi-1)\mu(\pi)}^{(\pi)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und zwischen diesen Lösungen (27) für sich allein besteht, wie man leicht erkennt, keine Relation, d. h. das Gleichungssystem

$$
(28)\qquad
\begin{array}{llllll}
(\psi_{11}^{(\pi)} - x_n) & Y_1^{(\pi)} + \cdots + & \psi_{1\mu(\pi)}^{(\pi)} & Y_{\mu(\pi)}^{(\pi)} = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\psi_{\mu(\pi)1}^{(\pi)} & Y_1^{(\pi)} + \cdots + & \left(\psi_{\mu(\pi)\mu(\pi)}^{(\pi)} - x_n\right) & Y_{\mu(\pi)}^{(\pi)} = 0, \\
\chi_{11}^{(\pi)} & Y_1^{(\pi)} + \cdots + & \chi_{1\mu(\pi)}^{(\pi)} & Y_{\mu(\pi)}^{(\pi)} = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\chi_{\mu(\pi-1)1}^{(\pi)} & Y_1^{(\pi)} + \cdots + & \chi_{\mu(\pi-1)\mu(\pi)}^{(\pi)} & Y_{\mu(\pi)}^{(\pi)} = 0
\end{array}
$$

besitzt keine Lösung.

In den Gleichungssystemen (16), (21), (26), ... der zweiten Kette handelt es sich lediglich um Formen, welche von der Veränderlichen x_n frei sind. Nehmen wir daher an, das zu beweisende Theorem III sei bereits für den Fall von $n-1$ Veränderlichen als richtig erkannt, so folgt, dass in der Kette (16), (21), (26), ... spätestens an $n-1^{\text{ster}}$ Stelle ein Gleichungssystem auftritt, welches keine Lösung besitzt. In Folge dieses Umstandes muss in der Kette (13), (19), (24), ... spätestens an $n-1^{\text{ster}}$ Stelle ein Gleichungssystem auftreten, dessen volles Lösungssystem durch die Lösungen von der Gestalt (27) erschöpft wird; es ist dann das unmittelbar auf dieses folgende Gleichungssystem d. h. spätestens das n^{te} Gleichungssystem der Kette (13), (19), (24), ... von der Gestalt (28) und dieses Gleichungssystem lässt seinerseits keine Lösung mehr zu. Wir haben somit, unter der Annahme der Richtigkeit des Theorems III für $n-1$ Veränderliche, gezeigt, dass die Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... spätestens mit dem n^{ten} Gleichungssysteme abbricht.

In der Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... wird allgemein das π^{te} Gleichungssystem dadurch erhalten, dass man für das $(\pi-1)^{\text{ste}}$ Gleichungssystem in der oben beschriebenen Weise ein volles System von Lösungen bildet und dann die unbestimmten linearen Combinationen dieser Lösungen gleich Null setzt. Da nun im Allgemeinen das bei unserem Verfahren sich ergebende volle Lösungssystem ein solches sein wird, in welchem einige Lösungen lineare Combinationen der übrigen sind, so ist das π^{te} Gleichungssystem der Kette (13), (19), (24), ... nicht nothwendig zugleich dasjenige Gleichungssystem, welches man erhält, wenn man aus dem $(\pi-1)^{\text{sten}}$

Gleichungssysteme in dem von uns definirten und in Theorem III geforderten Sinne das abgeleitete Gleichungssystem bildet. Aber es bietet keine Schwierigkeit aus der gefundenen Kette (13), (19), (24), ... die Kette der aus (13) abgeleiteten Gleichungssysteme zu gewinnen, da wir hierzu offenbar nur nöthig haben, in den Gleichungssystemen der Kette (13), (19), (24), ... alle diejenigen Formensysteme zu unterdrücken oder durch lineare Combinationen der anderen Formensysteme zu ersetzen, welche lediglich durch eben jene überflüssigen Lösungen bedingt sind. Diese Ueberlegung lehrt zugleich, dass die Zahl der Gleichungen und der unbestimmten Formen in den Gleichungssystemen jener Kette (13), (19), (24), ... jedenfalls nicht vermehrt zu werden braucht, damit aus dieser Kette (13), (19), (24), ... die Kette der aus (13) abgeleiteten Gleichungssysteme entstehe und da die Kette (13), (19), (24), ... den obigen Entwickelungen zufolge spätestens mit dem n^{ten} Gleichungssysteme abbricht, so hat die Kette der aus (13) abgeleiteten Gleichungssysteme umsomehr diese Eigenschaft. Damit ist unser Theorem III für Formen von n Veränderlichen bewiesen, unter der Voraussetzung, dass dasselbe für den Fall von $n-1$ Veränderlichen gilt.

Um zu zeigen, dass Theorem III für den Fall $n=2$ richtig ist, nehmen wir an, es sei ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$(29)\quad F_{t1}X_1+F_{t2}X_2+\cdots+F_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}}=0 \qquad (t=1,2,\ldots,m)$$

vorgelegt, wo $F_{t1}, F_{t2}, \ldots, F_{tm^{(1)}}$ binäre Formen der Veränderlichen x_1, x_2 sind und es sei ferner

$$X_1=F^{(1)}_{1s},\quad X_2=F^{(1)}_{2s},\ldots, X_{m^{(1)}}=F^{(1)}_{m^{(1)}s} \qquad (s=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

ein volles Lösungssystem von (29) derart, dass keine in demselben enthaltene Lösung eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist. Das aus (29) abgeleitete Gleichungssystem nimmt dann die Gestalt an

$$(30)\quad F^{(1)}_{t1}X^{(1)}_1+F^{(1)}_{t2}X^{(1)}_2+\cdots+F^{(1)}_{tm^{(2)}}X^{(1)}_{m^{(2)}}=0 \qquad (t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

und es ist zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Zu dem Zwecke nehmen wir das Gegentheil an und verstehen unter $X^{(1)}_1, X^{(2)}_2, \ldots, X^{(1)}_{m^{(2)}}$ binäre Formen beziehungsweise von den Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_{m^{(2)}}$, welche jenes Gleichungssystem (30) befriedigen. Ueberdies mögen diese Formen $X^{(1)}_1, X^{(1)}_2, \ldots, X^{(1)}_{m^{(2)}}$ in eine solche Reihenfolge gebracht sein, dass

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots \leqq r_{m^{(2)}},$$

wird und es sei endlich l eine binäre Linearform, welche nicht in

$x_1 X_1^{(1)}$ als Theiler enthalten ist. Bestimmen wir jetzt die Constanten $c_2, c_3, \ldots, c_{m^{(2)}}$ derart, dass die Formen

$$Y_s^{(1)} = X_s^{(1)} + c_s x_1^{r_s - r_1} X_1^{(1)} \qquad (s = 2, 3, \ldots, m^{(2)})$$

sämmtlich durch l theilbar werden und setzen wir dann

$$(31)\quad G_{t1}^{(1)} = F_{t1}^{(1)} - c_2 x_1^{r_2 - r_1} F_{t2}^{(1)} - c_3 x_1^{r_3 - r_1} F_{t3}^{(1)} - \cdots - c_{m^{(2)}} x^{r_{m^{(2)}} - r_1} F_{t m^{(2)}}^{(1)},$$
$$(t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

so ist

$$G_{t1}^{(1)} X_1^{(1)} + F_{t2}^{(1)} Y_2^{(1)} + F_{t3}^{(1)} Y_3^{(1)} + \cdots + F_{t m^{(2)}}^{(1)} Y_{m^{(2)}}^{(1)} = 0$$
$$(t = 1, 2, \cdots, m^{(1)})$$

und hieraus folgt, dass die Formen $G_{t1}^{(1)}$ sämmtlich durch l theilbar sind. Wir setzen dementsprechend

$$(32)\qquad G_{t1}^{(1)} = l H_{t1}^{(1)}. \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

Es genügen nun die Formen

$$X_1 = G_{11}^{(1)},\ X_2 = G_{21}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = G_{m^{(1)}1}^{(1)}$$

und demnach auch die Formen

$$X_1 = H_{11}^{(1)},\ X_2 = H_{21}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = H_{m^{(1)}1}^{(1)}$$

dem ursprünglich vorgelegten Gleichungssysteme (29), woraus insbesondere folgt, dass auch die letztere Lösung durch lineare Combination der obigen $m^{(2)}$ Lösungen erhalten werden kann und da die Formen $H_{t1}^{(1)}$ beziehungsweise von niederen Ordnungen sind als die Formen $F_{t1}^{(1)}$, so ergeben sich folgende Formeln

$$H_{t1}^{(1)} = A_2 F_{t2}^{(1)} + A_3 F_{t3}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}} F_{t m^{(2)}}, \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wo $A_2, A_3, \ldots, A_{m^{(2)}}$ gewisse binäre Formen bedeuten. Aus diesen Formeln und den Formeln (31) und (32) erhalten wir unmittelbar:

$$F_{t1}^{(1)} = A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + A_3^{(1)} F_{t3}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}}^{(1)} F_{t m^{(2)}}^{(1)}, \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wo $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \ldots, A_{m^2}^{(1)}$ gewisse andere binäre Formen sind d. h. unter jenen $m^{(2)}$ Lösungen ist die erste Lösung eine lineare Combination der übrigen Lösungen. Dieser Umstand ist mit der vorhin gemachten Festsetzung in Widerspruch und unsere Annahme, dass das Gleichungssystem (30) eine Lösung besitze, ist somit als unzulässig erkannt. Damit ist das Theorem III für binäre Formen und folglich auch zugleich allgemein bewiesen.

Es wurde bereits oben dargelegt, inwiefern die Formen eines vollen und keine überflüssigen Lösungen enthaltenden Lösungssystems

durch das gegebene Gleichungssystem festgelegt sind. Offenbar ist in entsprechendem Sinne auch die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme eine wesentlich bestimmte.

Was insbesondere die Untersuchung eines Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ anbetrifft, so legen wir dabei die folgende aus den Formen des Moduls zu bildende Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

als erstes Gleichungssystem zu Grunde und die Aufstellung der Kette der hieraus abgeleiteten Gleichungssysteme gewährt dann, wie später näher ausgeführt werden wird, einen weitreichenden Einblick in das algebraische Gefüge jenes Moduls.

Zur Erläuterung unserer allgemeinen Entwickelungen mögen folgende Beispiele dienen. Der bereits oben in Abschnitt I behandelte aus den 3 quadratischen Formen

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 x_3 - x_2^2, \\ F_2 &= x_2 x_3 - x_1 x_4, \\ F_3 &= x_2 x_4 - x_3^2 \end{aligned}$$

gebildete Modul (F_1, F_2, F_3) führt zu der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0.$$

Wie oben bewiesen wurde, lässt sich eine jede Lösung dieser Gleichung in die Gestalt

$$\begin{aligned} X_1 &= x_3 Y_1 + x_4 Y_2, \\ X_2 &= x_2 Y_1 + x_3 Y_2, \\ X_3 &= x_1 Y_1 + x_2 Y_2 \end{aligned}$$

bringen, wo Y_1, Y_2 quaternäre Formen sind. Es entsteht somit das abgeleitete Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 Y_1 + x_4 Y_2 &= 0, \\ x_2 Y_1 + x_3 Y_2 &= 0, \\ x_1 Y_1 + x_2 Y_2 &= 0, \end{aligned}$$

welches seinerseits keine Lösung mehr zulässt. Die Kette bricht also in diesem Falle bereits bei dem 2^{ten} Gleichungssysteme ab.

Als zweites Beispiel diene der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$, wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die ebenfalls bereits in Abschnitt I behandelten Formen von der zweiten Ordnung in den 5 Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$ bedeuten. Die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_6 X_6 = 0$$

besitzt die dort angegebenen 8 Lösungen und von diesen ist keine gleich einer linearen Combination der übrigen Lösungen, während jede andere Lösung dieser Gleichung sich aus jenen 8 Lösungen zu-

sammensetzen lässt. Die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung ist daher

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_3 Y_1 + x_4 Y_2 + x_5 Y_3\\
X_2 &= -x_2 Y_1 - x_3 Y_2 + x_3 Y_4 + x_4 Y_5 + x_5 Y_6\\
X_3 &= -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - x_3 Y_3 - x_3 Y_5 - x_4 Y_6 + x_4 Y_7 + x_5 Y_8\\
X_4 &= x_1 Y_1 + x_2 Y_2 - x_2 Y_4 - x_4 Y_7 - x_5 Y_8\\
X_5 &= x_2 Y_3 + x_1 Y_4 + x_3 Y_7 + x_4 Y_8\\
X_6 &= x_1 Y_5 + x_2 Y_6 - x_2 Y_7 - x_3 Y_8,
\end{aligned}$$

wo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_8$ beliebige Formen sind. Wir erhalten somit das abgeleitete Gleichungssystem, wenn wir in den eben gewonnenen Formeln die Ausdrücke auf der rechten Seite gleich Null setzen und dieses abgeleitete Gleichungssystem seinerseits besitzt die folgenden 3 Lösungen

$$\begin{array}{llllll}
Y_1 = x_4, & Y_2 = -x_3, & Y_3 = 0, & Y_4 = -x_3, & Y_5 = x_2, & Y_6 = 0,\\
 & & & & Y_7 = x_1, & Y_8 = 0,\\
Y_1 = x_5, & Y_2 = 0, & Y_3 = -x_3, & Y_4 = -x_4, & Y_5 = x_3, & Y_6 = x_2,\\
 & & & & Y_7 = x_2, & Y_8 = x_1,\\
Y_1 = 0, & Y_2 = x_5, & Y_3 = -x_4, & Y_4 = 0, & Y_5 = 0, & Y_6 = x_3,\\
 & & & & Y_7 = 0, & Y_8 = x_2.
\end{array}$$

Aus denselben lässt sich jede andere Lösung jenes abgeleiteten Gleichungssystems zusammensetzen und das nächste abgeleitete Gleichungssystem lautet daher

$$\begin{aligned}
x_4 Z_1 + x_5 Z_2 &= 0,\\
-x_3 Z_1 + x_5 Z_3 &= 0,\\
-x_3 Z_2 - x_4 Z_3 &= 0,\\
-x_3 Z_1 - x_4 Z_2 &= 0,\\
x_2 Z_1 + x_3 Z_2 &= 0,\\
x_2 Z_2 + x_3 Z_3 &= 0,\\
x_1 Z_1 + x_2 Z_2 &= 0,\\
x_1 Z_2 + x_2 Z_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt keine Lösung zu und die aus dem vorgelegten Modul entstehende Kette bricht also bei dem 3ten Gleichungssysteme ab.

Um ein allgemeineres Beispiel zu behandeln, betrachten wir den Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und beweisen für diesen Modul den folgenden Satz:

Wird für die Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0 \tag{33}$$

die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme aufgestellt, so besteht allgemein das s^{te} Gleichungssystem dieser Kette aus $\binom{n}{s-1}$ Gleichungen, während für dasselbe die Zahl der zu bestimmenden Formen gleich $\binom{n}{s}$ und die Zahl der Lösungen des vollen Lösungssystems gleich $\binom{n}{s+1}$ ist. Die Coefficienten der abgeleiteten Gleichungen sind sämmtlich lineare Formen.

Wir können diesen Satz für die niederen Fälle ohne Schwierigkeit durch directe Aufstellung der abgeleiteten Gleichungssysteme bestätigen. Was beispielsweise den Fall $n=4$ anbetrifft, so besitzt das Gleichungssystem

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

die 6 Lösungen

$$\begin{array}{llll}
X_1 = x_2, & X_2 = -x_1, & X_3 = 0, & X_4 = 0, \\
X_1 = x_3, & X_2 = 0, & X_3 = -x_1, & X_4 = 0, \\
X_1 = x_4, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & X_4 = -x_1, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_3, & X_3 = -x_2, & X_4 = 0, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_4, & X_3 = 0, & X_4 = -x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_4, & X_4 = -x_3
\end{array}$$

und das abgeleitete Gleichungssystem lautet daher

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_2 Y_1 & + x_3 Y_2 & + x_4 Y_3 & & & & = 0, \\
-x_1 Y_1 & & & + x_3 Y_4 & + x_4 Y_5 & & = 0, \\
& -x_1 Y_2 & & -x_2 Y_4 & & + x_4 Y_6 & = 0, \\
& & -x_1 Y_3 & & -x_2 Y_5 & -x_3 Y_6 & = 0.
\end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind

$$\begin{array}{llll}
Y_1 = x_3, & Y_2 = -x_2, & Y_3 = 0, & Y_4 = x_1, \\
& & Y_5 = 0, & Y_6 = 0, \\
Y_1 = -x_4, & Y_2 = 0, & Y_3 = x_2, & Y_4 = 0, \\
& & Y_5 = -x_1, & Y_6 = 0, \\
Y_1 = 0, & Y_2 = x_4, & Y_3 = -x_3, & Y_4 = 0, \\
& & Y_5 = 0, & Y_6 = x_1, \\
Y_1 = 0, & Y_2 = 0, & Y_3 = 0, & Y_4 = -x_4, \\
& & Y_5 = x_3, & Y_6 = -x_2.
\end{array}$$

Hieraus ergiebt sich das dritte Gleichungssystem der Kette in der Gestalt

$$\begin{aligned}
x_3 Z_1 - x_4 Z_2 \qquad\qquad\qquad &= 0, \\
-x_2 Z_1 \qquad + x_4 Z_3 \qquad\qquad &= 0, \\
+ x_2 Z_2 - x_3 Z_3 \qquad\qquad &= 0, \\
x_1 Z_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 Z_4 &= 0, \\
- x_1 Z_2 \qquad\qquad - x_3 Z_4 &= 0, \\
+ x_1 Z_3 - x_2 Z_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem nur die eine Lösung

$$Z_1 = x_4, \quad Z_2 = x_3, \quad Z_3 = x_2, \quad Z_4 = x_1$$

besitzt, so erhält das 4te Gleichungssystem der Kette die Gestalt

$$\begin{aligned}
x_4 U_1 &= 0, \\
x_3 U_1 &= 0, \\
x_2 U_1 &= 0, \\
x_1 U_1 &= 0
\end{aligned}$$

und dieses Gleichungssystem lässt offenbar keine Lösung zu. Die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme bricht also erst beim 4ten Gleichungssysteme ab.

Um den Satz allgemein zu beweisen, folgen wir dem Gedankengange, welcher dem Beweise des Theorems III zu Grunde liegt. Die Gleichung (33) lässt insbesondere die folgenden $n-1$ Lösungen zu

$$\begin{array}{lllllll}
X_1 = x_n, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_1, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_n, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_n, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_3, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = x_n, & X_n = -x_{n-1}.
\end{array}$$

Wir nehmen nun eine beliebige Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_n$ der Gleichung (33) an und formen dann dieselbe durch geeignete Combination mit den eben angegebenen $n-1$ besonderen Lösungen derart um, dass an Stelle der Formen $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ solche Formen treten, welche die Veränderliche x_n nicht enthalten. Da in der Gleichung (33) die Form X_n mit der Veränderlichen x_n multiplicirt erscheint, so wird nach dieser Umformung die an Stelle von X_n tretende Form nothwendig identisch gleich Null. Wir nehmen jetzt unseren Satz für den Fall von $n-1$ Veränderlichen als bewiesen an und schliessen aus demselben, dass die Gleichung

$$(34) \qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} = 0$$

genau $\binom{n-1}{2}$ Lösungen besitzt, von denen keine eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist und durch welche jede andere Lösung sich zusammensetzen lässt. Da überdies nach jenem Satze die

Lösungen sämmtlich lineare Formen sein sollen, so erhält die allgemeinste Lösung von (34) die Gestalt

$$
\begin{aligned}
X_1 &= l_{11}\, y_1 + l_{12}\, y_2 + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
X_2 &= l_{21}\, y_1 + l_{22}\, y_2 + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{n-1} &= l_{n-1,1}\, y_1 + l_{n-1,2}\, y_2 + \cdots + l_{n-1\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},
\end{aligned}
$$

wo $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{n-1\binom{n-1}{2}}$ lineare Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ beliebige Formen der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeuten. Aus den bisherigen Ueberlegungen erkennen wir, dass eine jede Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung (33) sich in die Gestalt

$$
\begin{aligned}
X_1 &= x_n Y_1 + 0 + \cdots + l_{11} y_1 + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
X_2 &= 0 + x_n Y_2 + \cdots + l_{21} y_1 + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_n &= -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - \cdots + 0 + \cdots + 0
\end{aligned}
$$

bringen lässt, wo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und wo $y_1, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeuten. Da überdies keine der verwendeten besonderen Lösungen einer linearen Combination der übrigen Lösungen gleich ist, so ist in Uebereinstimmung mit dem obigen Satze die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Lösungen von (33) gleich $n-1+\binom{n-1}{2}$ d. h. gleich $\binom{n}{2}$ und das aus (33) abgeleitete Gleichungssystem erhält die Gestalt

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&x_n Y_1 \quad \cdots + l_{11} Y_n + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}}\, Y_{\binom{n}{2}} = 0,\\
&\quad x_n Y_2 + \cdots + l_{21} Y_n + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}}\, Y_{\binom{n}{2}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - \cdots + 0 + \cdots + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Um das nächste abgeleitete Gleichungssystem aufzustellen, berücksichtigen wir, dass das abgeleitete Gleichungssystem (35) die folgenden Lösungen zulässt

$$
\begin{array}{llll}
Y_1 = l_{11}, & Y_2 = l_{21}, & \ldots, \; Y_{n-1} = l_{n-1,1}, & Y_n = -x_n, \\
 & & Y_{n+1} = 0, \quad \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = 0, \\
Y_1 = l_{12}, & Y_2 = l_{22}, & \ldots, \; Y_{n-1} = l_{n-1,2}, & Y_n = 0, \\
 & & Y_{n+1} = -x_n, \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
Y_1 = l_{1\binom{n-1}{2}}, & Y_2 = l_{2\binom{n-1}{2}}, & \ldots, \; Y_{n-1} = l_{n-1\binom{n-1}{2}}, & Y_n = 0, \\
 & & Y_{n+1} = 0, \quad \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = -x_n.
\end{array}
$$

Auf Grund derjenigen Betrachtungen, wie sie früher beim Beweise des Theorems III angewandt wurden, erkennt man leicht, dass sich eine jede Lösung von (35) aus den eben angegebenen $\binom{n-1}{2}$ Lösungen und aus den Lösungen

$$Y_1 = 0, \ldots, Y_{n-1} = 0, \quad Y_n = y_1, \quad Y_{n+1} = y_2, \ldots, Y_{\binom{n}{2}} = y_{\binom{n-1}{2}}$$

zusammensetzen lässt, wo $y_1, y_2, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ Lösungen des Gleichungssystems

$$l_{s1}y_1 + l_{s2}y_2 + \cdots + l_{s\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sind.

Das letztere Gleichungssystem ist das aus (34) abgeleitete Gleichungssystem und besitzt daher unserem Satze zufolge genau $\binom{n-1}{3}$ Lösungen, von denen keine eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist und aus denen jede andere Lösung sich linear zusammensetzen lässt. Die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Lösungen des aus (33) abgeleiteten Gleichungssystems (35) ist daher gleich $\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$ d. h. gleich $\binom{n}{3}$, was wiederum mit unserem Satze übereinstimmt. Fahren wir mit dieser Schlussweise fort, so folgt die Richtigkeit unseres Satzes für n Veränderliche unter der Voraussetzung, dass derselbe für $n-1$ Veränderliche gilt. Da der Satz für $n = 2$ unmittelbar einleuchtet, so ist derselbe allgemein gültig.

Die eben durchgeführte Untersuchung der Gleichung (33) *ist vornehmlich desshalb von* ***principieller Bedeutung***, *weil dieselbe einen Beleg dafür giebt, dass thatsächlich der Fall vorkommt, wo die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme nicht früher als nach dem n^{ten} Gleichungssysteme abbricht.*

IV.

Die charakteristische Function eines Moduls.

Die Entwickelungen des vorigen Abschnittes ermöglichen die Bestimmung der Anzahl derjenigen Bedingungen, denen die Coefficienten einer Form genügen müssen, damit dieselbe nach einem vorgelegten Modul der Null congruent sei. Um dies einzusehen, betrachten wir den Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ homogene Formen beziehungsweise von den Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ in den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten und fragen zunächst, wie viele linear von einander unabhängige Formen F von der R^{ten} Ordnung es giebt, welche nach jenem Modul der Null congruent sind. Aus dem Ansatze

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m,$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen beziehungsweise von den Ordnungen $R - r_1, R - r_2, \ldots, R - r_m$ sind, und aus den entsprechenden Ausführungen zu Anfang des vorigen Abschnittes erkennen wir, dass jene gesuchte Anzahl gleich ist der Gesammtzahl der Coefficienten der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$, vermindert um die Zahl derjenigen linear unabhängigen Lösungssysteme der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0, \tag{36}$$

für welche $X_1, X_2, \ldots, X_m$ beziehungsweise Formen von den Ordnungen $R - r_1, R - r_2, \ldots, R - r_m$ sind. Nach den Entwickelungen am Schlusse des Abschnittes I setzt sich eine jede Lösung dieser Gleichung (36) aus einer endlichen Anzahl von Lösungen mit Hülfe der Formeln

$$X_t = A_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(1)}}^{(1)} F_{tm^{(1)}}^{(1)} \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

zusammen. Bezeichnen wir die Ordnungen der Formen $F_{11}^{(1)}, F_{12}^{(1)}, \ldots, F_{1m^{(1)}}^{(1)}$ beziehungsweise mit $r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \ldots, r_{m^{(1)}}^{(1)}$, so sind $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}}^{(1)}$ Formen beziehungsweise von den Ordnungen $R - r_1 - r_1^{(1)}, R - r_1 - r_2^{(1)}, \ldots$ $R - r_1 - r_{m^{(1)}}^{(1)}$. Wir erhalten daher die verlangte Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der Gleichung (36), wenn wir die Gesammtzahl der in den Formen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}}^{(1)}$ auftretenden Coefficienten um diejenige Zahl vermindern, welche angiebt, wie viel linear unabhängige Systeme von Formen $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}}^{(1)}$ von den Ordnungen beziehungsweise $R - r_1 - r_1^{(1)}, R - r_1 - r_2^{(1)}, \ldots, R - r_1 - r_{m^{(1)}}^{(1)}$ den Gleichungen

$$X_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + X_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + X_{m^{(1)}}^{(1)} F_{tm^{(1)}}^{(1)} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m) \tag{37}$$

genügen. Zur Bestimmung dieser letzteren Zahl haben wir in entsprechender Weise zu berücksichtigen, dass die sämmtlichen Lösungen von (37) durch lineare Combination einer gewissen endlichen Anzahl derselben erhalten werden können. Es ist daher ersichtlich, dass jene gesuchte Zahl sich ergiebt, wenn man die Anzahl der in den betreffenden Formen auftretenden Coefficienten um die Zahl der linear unabhängigen Lösungen des aus (37) abgeleiteten Gleichungssystems vermindert. Dieses Verfahren hat man in entsprechender Weise fortzusetzen, bis die Kette der aus (36) abgeleiteten Gleichungssysteme abbricht. Ist nun die Ordnung R der Form F so gross gewählt, dass die bei diesem Verfahren auftretenden Zahlen $R-r_1$, $R-r_2,\ldots$, $R-r_m$, $R-r_1-r_1^{(1)}$, $R-r_1-r_2^{(1)}, \ldots$, $R-r_1-r_{m^{(1)}}^{(1)}, \ldots$ sämmtlich positiv bleiben, so lassen sich alle jene Anzahlen mit Hülfe ganzzahliger Coefficienten aus denjenigen Zahlen zusammensetzen, welche angeben, wie viele Glieder die allgemeinen Formen von den Ordnungen $R-r_1$, $R-r_2,\ldots, R-r_m$, $R-r_1-r_1^{(1)}$, $R-r_1-r_2^{(1)},\ldots$ $R-r_1-r_{m^{(1)}}^{(1)}, \ldots$ enthalten. Die letzteren Zahlen werden durch die Ausdrücke

$$\frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)\ldots(R-r_1+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{(R-r_m+1)(R-r_m+2)\ldots(R-r_m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{(R-r_1-r_1^{(1)}+1)(R-r_1-r_1^{(1)}+2)\ldots(R-r_1-r_1^{(1)}+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{\left(R-r_1-r_{m^{(1)}}^{(1)}+1\right)\left(R-r_1-r_{m^{(1)}}^{(1)}+2\right)\ldots\left(R-r_1-r_{m^{(1)}}^{(1)}+n-1\right)}{1.2\ldots(n-1)},$$

. . . .

gegeben und sind daher ganze rationale Functionen vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf R. In Folge dieses Umstandes ist somit auch die Zahl der nach dem vorgelegten Modul der Null congruenten Formen für genügend grosse Werthe von R gleich einer ganzen rationalen Function von R, deren Coefficienten bestimmte, nur von dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ abhängige rationale Zahlen sind. Subtrahiren wir diese Zahl von der Zahl der Glieder einer allgemeinen Form der Ordnung R, so erhalten wir die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welchen die Coefficienten einer Form der R^{ten} Ordnung genügen müssen, damit dieselbe nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei. Die so definirte Zahl ist daher ebenfalls für genügend grosse Werthe von R gleich einer ganzen rationalen Function von R mit rationalen Zahlencoefficienten. Wir bezeichnen diese ganze Function mit $\chi(R)$ und nennen dieselbe die charakteristische

Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. *Der eben geführte Nachweis der Existenz der charakteristischen Function stützt sich auf die Endlichkeit der Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme und beruht daher wesentlich auf dem Theorem III des vorigen Abschnittes.*

Was die Grenze anbetrifft, oberhalb welcher die charakteristische Function $\chi(R)$ die in Rede stehende Anzahl von Bedingungen darstellt, so zeigen die obigen Entwickelungen unmittelbar, wie dieselbe aus den Ordnungen derjenigen Formen zu berechnen ist, welche in der Kette der aus (36) abgeleiteten Gleichungssysteme als Lösungen auftreten.

Das eben gewonnene Ergebniss lässt sich offenbar auch in folgender Weise aussprechen: Wenn wir allgemein mit c_R die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen bezeichnen, denen eine Form von der Ordnung R genügen muss, damit dieselbe nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei, so ist die unendliche Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ von einem gewissen Elemente an eine arithmetische Reihe von einer unterhalb der Zahl n liegenden Ordnung. In der That ist für genügend grosse Werthe von R jederzeit

$$c_R = \chi(R).$$

Die letztere Ueberlegung begründet zugleich eine Eintheilung der Moduln, indem wir alle diejenigen Moduln zu der nämlichen Classe rechnen, für welche jene Zahlenreihen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ elementweise genau übereinstimmen.

Um die allgemeine Gestalt der charakteristischen Function zu ermitteln, setzen wir

$$\chi(R) = \frac{a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_d R^d}{a},$$

wo $a, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d$ ganze positive oder negative Zahlen sind und der Grad d jedenfalls kleiner ist als die Zahl n der in den gegebenen Formen auftretenden Veränderlichen. Gemäss der Bedeutung der charakteristischen Function erhält $\chi(R)$ für alle ganzzahligen oberhalb einer bestimmten Grenze liegenden Argumente R stets ganzzahlige Werthe und hieraus lässt sich beweisen, dass $\chi(R)$ überhaupt für alle ganzzahligen Argumente ganzzahlige Werthe annimmt. Denn gäbe es eine ganze Zahl r, für welche der Ausdruck

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_d r^d$$

nicht durch den Nenner a theilbar wäre, so wäre auch der Ausdruck

$$a_0 + a_1(r + ka) + a_2(r + ka)^2 + \cdots + a_d(r + ka)^d,$$

für beliebige ganzzahlige Werthe von k nicht durch a theilbar und folglich wäre auch $\chi(r + ka)$ eine gebrochene Zahl. Hierin liegt ein Widerspruch, sobald wir k so bestimmt denken, dass $r + ka$ jene

Grenze überschreitet, oberhalb welcher $\chi(R)$ nothwendig eine ganze Zahl wird.

Nachdem dies erkannt ist, setzen wir

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1\binom{R}{1} + \chi_2\binom{R}{2} + \cdots + \chi_d\binom{R}{d},$$

wo in üblicher Weise

$$\binom{R}{s} = \frac{R(R-1)\ldots(R-s+1)}{1.2\ldots s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, d)$$

bedeutet. Da den obigen Ausführungen zufolge $\chi(R)$ insbesondere auch für $R = 0$ eine ganze Zahl ergiebt, so ist χ_0 eine ganze Zahl und in entsprechender Weise erkennen wir der Reihe nach durch Einsetzen der Werthe $R = 1, 2, \ldots, d$, dass auch die anderen Coefficienten $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ ganze Zahlen sind. Da umgekehrt allgemein der Binomialcoefficient $\binom{R}{s}$ für alle ganzzahligen Werthe von R eine ganze Zahl wird, so ist der obige Ausdruck, falls man unter $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ ganze Zahlen versteht, die allgemeinste ganze rationale Function von der Beschaffenheit, dass sie für alle ganzzahligen Argumente selber ganzzahlige Werthe annimmt.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir in dem folgenden Theoreme zusammen:

Theorem IV. *Die Zahl der von einander unabhängigen linearen Bedingungen, denen die Coefficienten einer Form von der Ordnung R genügen müssen, damit dieselbe nach einem vorgelegten Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei, wird, falls R oberhalb einer bestimmten Grenze liegt, durch die Formel*

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1\binom{R}{1} + \chi_2\binom{R}{2} + \cdots + \chi_d\binom{R}{d}$$

dargestellt, wo $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ gewisse dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ eigenthümliche ganze Zahlen bedeuten. Die ganze Function $\chi(R)$ vom Grade d in Bezug auf R heisst die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$.

Die obigen Ausführungen liefern zugleich eine allgemeine Methode zur Bestimmung der charakteristischen Function. Um diese Methode an einigen Beispielen zu erläutern, betrachten wir zunächst den Modul (F_1, F_2, F_3), wo F_1, F_2, F_3 die nämlichen 3 quadratischen Formen der 4 homogenen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 bedeuten, welche bereits in Abschnitt I und III ausführlich behandelt worden sind. Die Zahl der Coefficienten einer quaternären Form von der Ordnung R beträgt $\frac{1}{6}(R+1)(R+2)(R+3)$. Diese Zahl ist um diejenige Zahl zu

vermindern, welche angiebt, wie viel linear unabhängige Formen F von der Ordnung R durch die Formel

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$$

darstellbar sind und die letztere Zahl erhalten wir wiederum dadurch, dass wir die Gesammtzahl der Glieder in den 3 Formen A_1, A_2, A_3 der $R - 2^{\text{ten}}$ Ordnung, nämlich die Zahl $3 \cdot \frac{1}{6}(R-1)R(R+1)$ um die Zahl derjenigen linear unabhängigen Formensysteme X_1, X_2, X_3 von der Ordnung $R - 2$ vermindern, welche der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0$$

genügen. Wie am Schlusse des Abschnittes I gezeigt worden ist, erhält die allgemeinste Lösung dieser Gleichung die Gestalt

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1^{(1)} x_3 + A_2^{(1)} x_4, \\ X_2 &= A_1^{(1)} x_2 + A_2^{(1)} x_3, \\ X_3 &= A_1^{(1)} x_1 + A_2^{(1)} x_2. \end{aligned}$$

Die zuletzt verlangte Zahl ist daher gleich der Gesammtzahl der Glieder in den beiden Formen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ der $R - 3^{\text{ten}}$ Ordnung, nämlich gleich $2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)R$. Da nach den Ausführungen in Abschnitt III das abgeleitete Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 X_1^{(1)} + x_4 X_2^{(1)} &= 0, \\ x_2 X_1^{(1)} + x_3 X_2^{(1)} &= 0, \\ x_1 X_1^{(1)} + x_2 X_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung mehr zulässt, so sind jene $2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)R$ Lösungssysteme sämmtlich linear von einander unabhängig und die ursprünglich gesuchte Zahl wird

$$\begin{aligned} \chi(R) = \frac{1}{6}(R+1)(R+2)(R+3) - 3 \cdot \frac{1}{6}(R-1)R(R+1) \\ + 2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)R \\ = 1 + 3R. \end{aligned}$$

Dieses Ergebniss entspricht der Thatsache, dass eine Fläche R^{ter} Ordnung genau $1 + 3R$ Bedingungen erfüllen muss, damit sie eine gegebene Raumcurve 3^{ter} Ordnung enthalte.

Um ferner die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ zu berechnen, wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die in Abschnitt I angegebenen quadratischen Formen der 5 Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$ sind, benutzen wir die in Abschnitt III für diesen Modul aufgestellte Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme. Aus den Ordnungen der in diesen Gleichungssystemen als Coefficienten auftretenden Formen erhalten wir

für die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \frac{(R+1)(R+2)(R+3)(R+4)}{1.2.3.4} - 6\,\frac{(R-1)R(R+1)(R+2)}{1.2.3.4} \\ &+ 8\,\frac{(R-2)(R-1)R(R+1)}{1.2.3.4} - 3\,\frac{(R-3)(R-2)(R-1)R}{1.2.3.4} \\ &= 1 + 4R.\end{aligned}$$

Behandelt man in gleicher Weise die oben für den Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aufgestellte Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme, so ergiebt sich für die charakteristische Function dieses Moduls der Werth

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \frac{(R+1)(R+2)\ldots(R+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} - \binom{n}{1}\frac{R(R+1)\ldots(R+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} \\ &+ \binom{n}{2}\frac{(R-1)R\ldots(R+n-3)}{1.2\ldots(n-1)} - \ldots \\ &+ (-1)^n\,\frac{(R-n+1)(R-n+2)\ldots(R-1)}{1.2\ldots(n-1)} \\ &= 0;\end{aligned}$$

und in der That ist offenbar jede beliebige Form nach dem Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Null congruent.

Ist ferner F eine beliebige ternäre Form von der Ordnung r, so erhält die charakteristische Function des durch diese Form bestimmten Moduls (F) den Werth

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \frac{(R+1)(R+2)}{1.2} - \frac{(R-r+1)(R-r+2)}{1.2} \\ &= -\frac{1}{2}(r-1)(r-2) + 1 + rR.\end{aligned}$$

Sind F_1, F_2 zwei beliebige ternäre Formen von den Ordnungen r_1, r_2, welche nicht beide die nämliche Form als Factor enthalten, so wird für den Modul (F_1, F_2)

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \frac{(R+1)(R+2)}{1.2} - \frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)}{1.2} \\ &- \frac{(R-r_2+1)(R-r_2+2)}{1.2} \\ &+ \frac{(R-r_1-r_2+1)(R-r_1-r_2+2)}{1.2} \\ &= r_1 r_2.\end{aligned}$$

Bedeuten endlich F_1, F_2 zwei quaternäre Formen der Ordnungen r_1, r_2 ohne gemeinsamen Factor, so ergiebt sich für die charakteristische Function des Moduls (F_1, F_2) der Werth

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)(R+3)}{1.2.3} - \frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)(R-r_1+3)}{1.2.3}$$
$$- \frac{(R-r_2+1)(R-r_2+2)(R-r_2+3)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{(R-r_1-r_2+1)(R-r_1-r_2+2)(R-r_1-r_2+3)}{1.2.3}$$
$$= 2r_1r_2 - \frac{1}{2}r_1r_2(r_1+r_2) + r_1r_2R.$$

Die in diesem und in dem vorigen Abschnitte gewonnenen allgemeinen Principien setzen uns in den Stand, den besonderen Fall eines Moduls von binären Formen im Sinne unserer Theorie vollkommen erschöpfend zu behandeln. Um dies zu zeigen, sei der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ vorgelegt, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ binäre Formen sind, von denen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass sie nicht sämmtlich eine und dieselbe Form als Factor enthalten und dass ferner alle von der nämlichen Ordnung r sind. Wegen der ersteren Voraussetzung ist die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ gleich Null. Denn unter jener Voraussetzung lässt sich eine jede binäre Form F von genügend hoher Ordnung R in die Gestalt

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m$$

bringen, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sämmtlich Formen von der Ordnung $R-r$ sind. Der Beweis dieser Thatsache wurde bereits zu Anfang des Abschnittes I kurz angedeutet. Andererseits berechnen wir die nämliche charakteristische Function nach der oben dargelegten allgemeinen Methode, indem wir für die Gleichung

$$F_1X_1 + F_2X_2 + \cdots + F_mX_m = 0$$

ein volles System von Lösungen aufstellen, in welchem keine durch lineare Combination der anderen Lösungen des Systems erhalten werden kann. Dieses System von Lösungen sei

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms}, \quad (s = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

und wir bezeichnen allgemein die den Formen $G_{1s}, G_{2s}, \ldots, G_{ms}$ gemeinsame Ordnung mit r_s. Zwischen diesen Lösungen besteht keine Relation; denn das aus obiger Gleichung abgeleitete Gleichungssystem

$$G_{t1}X_1^{(1)} + G_{t2}X_2^{(1)} + \cdots + G_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}}^{(1)} = 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

besitzt zufolge von Theorem III des vorigen Abschnittes keine Lösung. Die in Rede stehende charakteristische Function wird daher

$$\chi(R) = R + 1 - m(R-r+1) + \sum^{s}(R-r-r_s+1)$$
$$= R(m^{(1)}-m+1) - (r-1)(m^{(1)}-m+1) + r - \sum^{s} r_s,$$

wo die Summe über $s = 1, 2, \ldots, m^{(1)}$ zu erstrecken ist. Setzen wir auf der rechten Seite den Coefficienten von R und das von R freie Glied einzeln gleich Null, so ergiebt sich

$$m^{(1)} = m - 1,$$
$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{m-1},$$

und hieraus gewinnen wir den Satz:

Besitzen die m binären Formen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ von der Ordnung r nicht sämmtlich einen gemeinsamen Factor, so besteht das volle Lösungssystem der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

stets aus $m - 1$ Lösungen

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

welche durch keine Relation mit einander verknüpft sind, und die Summe der Ordnungen dieser $m - 1$ Lösungen kommt der Zahl r gleich).*

Aus den $m - 1$ Gleichungen

$$G_{1s}F_1 + G_{2s}F_2 + \cdots + G_{ms}F_m = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

folgt

$$F_1 : F_2 : \cdots : F_m = D_1 : D_2 : \cdots : D_m,$$

wo $D_1, D_2, \ldots, D_m$ die entsprechenden $m-1$ reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} & \ldots & G_{m1} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} & \ldots & G_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{1,m-1} & G_{2,m-1} & G_{3,m-1} & \ldots & G_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

bedeuten. Da nach dem eben bewiesenen Satze die Ordnung dieser Determinanten in Bezug auf die binären Veränderlichen x_1, x_2 gleich r ist, so sind jene Formen, abgesehen von einem unwesentlichen Zahlenfactor, den entsprechenden Determinanten jener Matrix gleich und wir setzen demnach

$$F_1 = D_1, \quad F_2 = D_2, \ldots, F_m = D_m.$$

Diese Formeln dienen umgekehrt dazu, um die Formen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ zu ermitteln, wenn die $m - 1$ Lösungssysteme

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

gegeben sind. Auch erkennen wir zugleich, dass die Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ keiner beschränkenden Bedingung unterliegen, abgesehen davon, dass ihre Summe gleich r ist.

---

*) Diesen Satz hat bereits F. Meyer vermuthet und bei seinen Untersuchungen über reducible Functionen als Voraussetzung eingeführt; vgl. Math. Ann., Bd. 30, S. 38.

Die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ bestimmen überdies, wie man leicht einsieht, vollkommen die oben allgemein definirte Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ für den vorgelegten Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und infolge dessen auch die Classe, welcher dieser Modul angehört. Für alle die Zahl $2r-1$ übersteigenden Werthe von R wird $c_R = \chi(R) = 0$. Endlich kann man die beiden vorhin gemachten Voraussetzungen fallen lassen, dass die Formen des vorgelegten Moduls sämmtlich von der nämlichen Ordnung und ohne gemeinsamen Theiler sind und man erkennt leicht, welche Abänderungen dann in den gefundenen Resultaten vorzunehmen sind.

Die eben angestellten Betrachtungen erledigen im Wesentlichen die Theorie der binären Moduln. Die weitere Aufgabe besteht in einer entsprechenden Behandlung der Theorie derjenigen Moduln, welche Formen mit drei und mehr Veränderlichen enthalten. Doch sei hier nur hervorgehoben, dass es zu einer solchen Fortentwickelung der Theorie vor Allem der Verallgemeinerung des Noether'schen Fundamentalsatzes*) für Formen von mehr Veränderlichen sowie einer eingehenden Untersuchung aller hierbei in Betracht kommenden Ausnahmefälle bedarf.

Die in Abschnitt I citirten Untersuchungen über Modulsysteme erörtern eine Reihe weiterer für die Theorie der Moduln fundamentaler Begriffe. Die betreffenden Definitionen sind nach geringfügigen Abänderungen auch für die hier betrachteten Moduln von homogenen Formen gültig. Wir beschäftigen uns insbesondere mit den Begriffen des „kleinsten enthaltenden" und des „grössten gemeinsamen" Moduls**). Sind irgend zwei homogene Moduln $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ vorgelegt, so stelle man zunächst für die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = H_1 Y_1 + H_2 Y_2 + \cdots + H_h Y_h$$

das volle Lösungssystem

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = F_{1s}, \quad X_2 = F_{2s}, \ldots, X_m = F_{ms} \\ Y_1 = H_{1s}, \quad Y_2 = H_{2s}, \ldots, Y_h = H_{hs} \end{array}\right\} \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

auf und bilde dann die Formen

$$K_s = F_1 F_{1s} + F_2 F_{2s} + \cdots + F_m F_{ms} = H_1 H_{1s} + H_2 H_{2s} + \cdots + H_h H_{hs}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, k).$$

Der Modul $(K_1, K_2, \ldots, K_k)$ ist der kleinste enthaltende Modul. Andererseits erhält man durch Zusammenstellung der einzelnen Formen

*) Vgl. M. Noether, Math. Ann. Bd. 6 und 30, sowie A. Voss, Math. Ann. Bd. 27 und L. Stickelberger, Math. Ann. Bd. 30.

**) Vgl. betreffs der Begriffsbestimmung: L. Kronecker, Crelle's Journal Bd. 92, S. 78 sowie R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal Bd. 92, S. 197.

der beiden vorgelegten Moduln den grössten gemeinsamen Modul in der Gestalt

$$(F_1, F_2, \ldots, F_m, H_1, H_2, \ldots, H_h) = (G_1, G_2, \ldots, G_g).$$

Es besteht nun eine sehr einfache Beziehung zwischen den charakteristischen Functionen χ_F und χ_H der beiden vorgelegten Moduln und den charakteristischen Functionen χ_K und χ_G des kleinsten enthaltenden und des grössten gemeinsamen Moduls. Um diese Beziehung herzuleiten, bilden wir zunächst ein System S_F von linear unabhängigen Formen R^{ter} Ordnung, welche sämmtlich nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sind und aus denen sich jede andere Form R^{ter} Ordnung von der nämlichen Beschaffenheit linear zusammensetzen lässt. Wenn R eine gewisse Grenze übersteigt, so ist die Zahl der Formen dieses Systems S_F gleich $\varphi(R) - \chi_F(R)$, wo $\varphi(R)$ die Zahl der Glieder einer allgemeinen Form R^{ter} Ordnung bedeutet. Ferner bilden wir ein volles System S_K von linear unabhängigen Formen der R^{ten} Ordnung, welche sowohl nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ als auch zugleich nach dem Modul $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ der Null congruent sind. Diese Formen sind sämmtlich gleich linearen Combinationen der Formen des Systems S_F. Die Anzahl der Formen des Systems S_K ist für genügend grosse Werthe von R gleich $\varphi(R) - \chi_K(R)$. Endlich bilden wir ein System S von Formen, welche die Formen des Systems S_K zu einem vollen System S_H von linear unabhängigen und nach dem Modul $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ der Null congruenten Formen ergänzen. Die Zahl der Formen des Systems S_H ist $\varphi(R) - \chi_H(R)$ und da die Formen der Systeme S und S_K zusammen die Formen des Systems S_H ergeben, so ist die Zahl der Formen des Systems S gleich

$$\{\varphi(R) - \chi_H(R)\} - \{\varphi(R) - \chi_K(R)\} = \chi_K(R) - \chi_H(R).$$

Nun sind, wie aus der angegebenen Bildungsweise hervorgeht, die Formen der beiden Systeme S_F und S linear von einander unabhängig und andererseits kann man durch lineare Combination der Formen dieser beiden Systeme S_F und S alle Formen herstellen, welche überhaupt lineare Combinationen von Formen der Systeme S_F und S_H sind. Es bilden also die Formen der Systeme S_F und S zusammengenommen ein volles System S_G von linear unabhängigen Formen R^{ter} Ordnung, welche nach dem Modul $(G_1, G_2, \ldots, G_g)$ der Null congruent sind. Den obigen Betrachtungen zufolge ist die Gesammtzahl der Formen in den Systemen S_F und S gleich $\varphi(R) - \chi_F(R) + \chi_K(R) - \chi_H(R)$ und andererseits ist die Zahl der Formen des Systems S_G gleich $\varphi(R) - \chi_G(R)$. Diese beiden Zahlen sind daher einander gleich d. h.

$$\varphi(R) - \chi_F(R) + \chi_K(R) - \chi_H(R) = \varphi(R) - \chi_G(R)$$

oder

$$\chi_F + \chi_H = \chi_K + \chi_G.$$

Wir sprechen dieses Ergebniss in folgendem Satze aus:

Die Summe der charakteristischen Functionen zweier beliebigen Moduln ist gleich der Summe der charakteristischen Functionen für den kleinsten enthaltenden und den grössten gemeinsamen Modul.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch kurz der Weg bezeichnet werden, wie sich die eben gewonnenen allgemeinen Resultate für die Theorie der algebraischen Gebilde verwenden lassen.

Es sei zunächst im drei-dimensionalen Raume eine Curve oder ein System von Curven und Punkten gegeben. Durch dieses Gebilde lässt sich nach einem in Abschnitt I bewiesenen Satze stets eine endliche Zahl von Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$$

solcher Art hindurch legen, das jede andere das Gebilde enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

dargestellt wird. Diese Ueberlegung zeigt, dass jedem algebraischen Gebilde ein Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und durch dessen Vermittelung eine bestimmte charakteristische Function $\chi(R)$ zugehört. Die letztere Function giebt dann an, wie viele von einander unabhängige Bedingungen eine Fläche von der eine gewisse Grenze überschreitenden Ordnung R erfüllen müsse, damit sie das betreffende Gebilde enthalte. So hat die charakteristische Function einer doppelpunktslosen Raumcurve von der Ordnung r und dem Geschlechte p den Werth*)

$$\chi(R) = -p + 1 + rR.$$

Als Beispiel diene die cubische Raumcurve, deren charakteristische Function zufolge der vorhin in diesem Abschnitte ausgeführten Rechnung den Werth $1 + 3R$ erhält.

Für die Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen r_1 und r_2 ergiebt sich der früheren Rechnung zufolge die charakteristische Function

$$\chi(R) = 2r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) + r_1 r_2 R.$$

Um zugleich im Anschluss an die letzteren Betrachtungen die Bedeutung des zuvor abgeleiteten allgemeinen Satzes über die charakteristischen Functionen zu erläutern, wenden wir denselben auf die Lösung einer Aufgabe aus der Theorie der Raumcurven an. Es mögen zwei Raumcurven ohne Doppelpunkte von den Ordnungen ϱ_1, ϱ_2 und beziehungsweise von den Geschlechtern p_1, p_2 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ von den Ordnungen r_1, r_2 bilden. Die den beiden Raumcurven eigenen Moduln

*) Vgl. M. Noether, Crelle's Journal Bd. 93, S. 295.

seien $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$. Der kleinste enthaltende Modul dieser beiden Moduln ist dann (K_1, K_2) und der grösste gemeinsame Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m, H_1, H_2, \ldots, H_h)$ wird geometrisch durch diejenigen Punkte dargestellt, welche beiden Raumcurven gemeinsam sind. Die Zahl dieser Punkte sei ϱ. Die in Betracht kommenden charakteristischen Functionen sind

$$\begin{aligned}
\chi_F(R) &= -p_1 + 1 + \varrho_1 R,\\
\chi_H(R) &= -p_2 + 1 + \varrho_2 R,\\
\chi_K(R) &= \quad 2r_1 r_2 - \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) + r_1 r_2 R,\\
\chi_G(R) &= \quad \varrho
\end{aligned}$$

und die Anwendung unseres Satzes

$$\chi_F + \chi_H = \chi_K + \chi_G$$

ergiebt für die Zahl der den beiden Raumcurven gemeinsamen Punkte den Werth

$$\varrho = -2r_1 r_2 + \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) - p_1 - p_2 + 2.$$

Was die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf Räume von beliebig vielen Dimensionen anbetrifft, so erscheinen noch die folgenden Resultate bemerkenswerth. Es sei in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen ein algebraisches Gebilde gegeben und der zu diesem algebraischen Gebilde zugehörige Modul möge die charakteristische Function

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d}$$

besitzen; *dann giebt der Grad d dieser charakteristischen Function die Dimension und der Coefficient χ_d die Ordnung des algebraischen Gebildes an*, während die übrigen Coefficienten $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{d-1}$ mit den von M. Noether*) definirten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Der allgemeine Beweis hierfür beruht auf dem Schlusse von $n-1$ auf n Veränderliche. Wie man sieht finden sich die eben angegebenen Sätze in dem Falle der Curve im dreidimensionalen Raume in der That bestätigt.

Inwiefern umgekehrt ein Modul durch die Gesammtheit der Werthsysteme bestimmt ist, welche die einzelnen Formen des Moduls gleichzeitig zu Null machen, ist eine Frage, welche erst durch eine systematische und alle möglichen Ausnahmefälle umfassende Untersuchung des Noether'schen Fundamentalsatzes für beliebige Dimensionenzahl eine befriedigende und allgemeingültige Beantwortung finden kann.

---

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 2 und 8.

Endlich sei noch auf die von A. Cayley, G. Salmon, S. Roberts und A. Brill ausgebildete Theorie der sogenannten beschränkten Gleichungssysteme*) hingewiesen, da insbesondere für diesen Zweig der Algebra unser Begriff der charakteristischen Function eine wirksame Fragestellung sowie einen einheitlichen Gesichtspunkt liefert. Ist beispielsweise eine Raumcurve gegeben und betrachten wir irgend drei dieselbe enthaltende Flächen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ beziehungsweise von den Ordnungen r_1, r_2, r_3, so ist die Zahl der Schnittpunkte dieser Flächen, welche ausserhalb jener Raumcurve liegen, offenbar gleich der charakteristischen Function des Moduls (F_1, F_2, F_3), vermindert um die charakteristische Function der Raumcurve. Diese Schlussweise führt in der That zu einem verallgemeinerungsfähigen Beweise für den bekannten Satz, wonach die Zahl der durch eine gemeinsame Raumcurve absorbirten Schnittpunkte jener drei Flächen gleich $\varrho(r_1+r_2+r_3)-\alpha$ ist, wenn ϱ die Ordnung der Raumcurve und α eine andere jener Raumcurve eigene Constante, den sogenannten Rang derselben, bedeutet.

Diese Angaben mögen genügen, um zu zeigen, wie die in diesem Abschnitte entwickelte Theorie der charakteristischen Function zu einer einheitlichen und übersichtlichen Behandlung der einem algebraischen Gebilde eigenthümlichen Zahlen (Dimension, Ordnung, Geschlechter, Rang u. s. w.) führt. Die weitere Aufgabe der Theorie wäre nunmehr die wirkliche Durchführung der diesen Anzahlbestimmungen zu Grunde liegenden algebraischen Processe.

V.

Die Theorie der algebraischen Invarianten.

Die in Abschnitt I entwickelten Principien bewähren ihre Kraft insbesondere auch in demjenigen Theile der Algebra, welcher von den bei linearen Substitutionen der Veränderlichen invariant bleibenden Formen handelt. Bekanntlich hat zuerst P. Gordan**) bewiesen, dass die Invarianten eines Systems von binären Grundformen mit einer Veränderlichenreihe x_1, x_2 sämmtlich ganze und rationale Functionen einer endlichen Anzahl derselben sind. Die zu diesem Beweise benutzten Methoden reichen jedoch nicht aus, wenn es sich um den Nachweis des entsprechenden Satzes für Formen von mehr Veränderlichen handelt, oder wenn die Grundformen mehrere Reihen von Veränderlichen enthalten, welche theilweise verschiedenen linearen Trans-

*) Vgl. G. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Vorlesung 22 und 23, sowie den bezüglichen Litteraturnachweis.

**) Vgl. Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II, S. 231. Andere Beweise sind gegeben worden von F. Mertens in Crelle's Journal Bd. 100, S. 223 und vom Verfasser in den Math. Ann. Bd. 33, S. 223.

formationen unterliegen. Es sollen im Folgenden die Mittel dargelegt werden, deren es zur Erledigung der eben gekennzeichneten allgemeineren Fragen bedarf.

Um in dem Beweise die wesentlichen Gedanken möglichst klar hervortreten zu lassen, betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer einzigen binären Grundform f mit nur einer Veränderlichenreihe x_1, x_2.

Nach einem in Abschnitt I bewiesenen Satze lässt sich aus einem jeden beliebig gegebenen Formensysteme stets eine endliche Zahl von Formen derart auswählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann. Wir betrachten insbesondere das System aller Invarianten der binären Grundform f und es muss dann nach dem angeführten Satze nothwendigerweise eine endliche Zahl m von Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ geben von der Art, dass eine jede andere Invariante i der Grundform f in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m \tag{38}$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundform f sind. Doch kann dieses Ergebniss offenbar auch direct aus Theorem I in Abschnitt I abgeleitet werden. Um dies kurz zu zeigen, wählen wir zunächst nach Willkür aus der Gesammtheit der Invarianten der gegebenen Grundform f eine Invariante aus und bezeichnen dieselbe mit i_1; ferner möge i_2 eine Invariante der Grundform f sein, welche nicht einem Producte von der Gestalt $A_1 i_1$ gleich ist, wo A_1 eine ganze homogene Function der Coefficienten der Grundform f ist; i_3 sei nun eine Invariante, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 i_1 + A_2 i_2$ bringen lässt, wo A_1 und A_2 wiederum ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundform f sind. Entsprechend sei i_4 eine Invariante der Grundform, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$ bringen lässt und wenn wir in dieser Weise fortfahren, so gewinnen wir eine Formenreihe $i_1, i_2, i_3, \ldots$, in welcher keine Form durch lineare Combination der vorhergehenden Formen erhalten werden kann. Aus Theorem I in Abschnitt I folgt, dass eine solche Reihe nothwendig im Endlichen abbricht. Bezeichnen wir die letzte Form jener Reihe mit i_m, so ist eine jede Invariante der gegebenen Grundform f gleich einer linearen Combination der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Das so gewonnene Ergebniss bezeichnet den ersten Schritt, welcher zum Beweise der Endlichkeit des vollen Invariantensystems erforderlich ist.

Der zweite Schritt besteht darin, zu zeigen, dass in dem Ausdrucke $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$ die Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ stets durch Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ ersetzt werden können, ohne, dass sich dabei der Werth i jenes Ausdrucks ändert. Dieser zweite Schritt lässt sich in dem hier zunächst betrachteten Falle einer binären Grund-

form mit nur einer Veränderlichenreihe in besonders einfacher Weise ausführen, wenn wir uns des folgenden in der Inauguraldissertation*) des Verfassers bewiesenen Satzes bedienen:

Jede homogene und isobare (d. h. nur aus Gliedern von dem nämlichen Gewichte bestehende) Function der Coefficienten einer binären Form

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

vom Grade r in den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und vom Gewichte $p = \frac{nr}{2}$ geht nach Anwendung des Differentiationsprocesses

$$\begin{aligned}[\ ] &= 1 - \frac{\Delta D}{1!2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!4!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{D\Delta}{1!2!} + \frac{D^2\Delta^2}{2!3!} - \frac{D^3\Delta^3}{3!4!} + \cdots,\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} D &= a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots \\ \Delta &= n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots \end{aligned}$$

zu setzen ist, in eine Invariante jener Grundform über.

Wir bezeichnen nun die Gewichte der Invarianten $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ beziehungsweise mit $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ und fassen ferner allgemein unter der Bezeichnung B_s alle diejenigen Glieder des Ausdruckes A_s zusammen, welche vom Gewichte $p - p_s$ sind. Da in der Formel (38) auf der linken Seite nur Glieder vom Gewichte p vorhanden sind, so dürfen wir auf der rechten Seite der nämlichen Formel alle Glieder der Producte $A_s i_s$ unterdrücken, deren Gewichte kleiner oder grösser als p sind, und wir erhalten dadurch für i den Ausdruck

(39) $$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m,$$

wo $B_1, B_2, \ldots, B_m$ eben jene homogenen und isobaren Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Beachten wir nun, dass eine Invariante bei Anwendung des Differentiationsprocesses D sowie bei Anwendung des Differentiationsprocesses Δ identisch verschwindet und dass die homogenen und isobaren Functionen B_s dem obigen Satze zufolge bei Anwendung des Differentiationsprocesses [ ] in gewisse Invarianten J_s der binären Grundform f übergehen, so folgt

$$\begin{aligned} [i] &= i, \\ [B_s i_s] &= [B_s] i_s = J_s i_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

*) Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Königsberg i. Pr. 1885, sowie: Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete, Math. Ann. Bd. 30, S. 15.

und, wenn wir auf jedes Glied in (39) den Process [ ] anwenden, so entsteht die Gleichung

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m.$$

Die Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i und indem wir nun diese Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ der nämlichen Behandlung unterwerfen, wie vorhin die Invariante i, erhalten wir schliesslich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Die letzteren m Invarianten bilden daher das volle System der Invarianten für die vorgelegte binäre Grundform f.

Der zweite Schritt in diesem Beweise bestand darin, dass wir zeigten, wie in dem ursprünglichen Ausdrucke (38) für i die Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ selber durch Invarianten zu ersetzen sind. Wenn es sich nun um Grundformen von mehreren Veränderlichen handelt, so kann dieser zweite Schritt nicht genau in der nämlichen Weise wie vorhin ausgeführt werden, weil diejenigen Sätze noch nicht bekannt sind, welche in der Invariantentheorie der Formen mit mehr Veränderlichen dem vorhin für das binäre Formengebiet ausgesprochenen Satze entsprechen. Aber in jenem allgemeineren Falle leistet den gleichen Dienst ein Satz, welcher im wesentlichen mit einem von P. Gordan*) und F. Mertens**) bewiesenen Satze übereinstimmt und für ternäre Formen, wie folgt, lautet:

Es sei ein System von ternären Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mit den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 vorgelegt; die Formen dieses Systems mögen vermittelst der linearen Substitution der Veränderlichen

$$(40)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

übergehen beziehungsweise in $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$. Es sei ferner $F(f_a)$ irgend eine ganze Function der Coefficienten dieser transformirten Formen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form homogen ist. Multipliciren wir diese Function $F(f_a)$ mit a^q, wo a die Substitutionsdeterminante und q eine beliebige nicht negative ganze Zahl bedeutet, und wenden wir dann auf das Product $a^q F(f_a)$ den Differentiationsprocess

---

*) Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, § 9; vgl. auch A. Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle's Journal Bd. 59.

**) Ueber invariante Gebilde ternärer Formen, Sitzungsb. der kais. Akad. der Wiss. zu Wien, Bd. 95.

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{23}\,\partial a_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\,\partial a_{23}\,\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\,\partial a_{21}\,\partial a_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{21}\,\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{22}\,\partial a_{31}}$$

so oft an, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ freier Ausdruck ergiebt, so ist der so entstehende Ausdruck eine Invariante des Formensystems $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Eigenschaft der Unveränderlichkeit der Invarianten bei linearer Transformation. Um dies zu zeigen, denken wir uns die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ in den Veränderlichen y_1, y_2, y_3 geschrieben und wenden dann auf die letzteren Veränderlichen die lineare Transformation

$$(41)\qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3, \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3, \\ y_3 &= b_{31}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3, \end{aligned} \qquad b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

an. Hierdurch mögen die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ beziehungsweise in $f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}$ übergehen. Endlich setzen wir die beiden linearen Substitutionen (40) und (41) zusammen zu der linearen Substitution

$$(42)\qquad \begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3, \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3, \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3, \end{aligned} \qquad c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = ab,$$

wo $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$ die bekannten bilinearen Verbindungen der Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ und $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{33}$ sind. Die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mögen bei Anwendung der zusammengesetzten Substitution (42) in $f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}$ übergehen. Zu der Substitution (41) gehört der Differentiationsprocess

$$\Omega_b = \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\,\partial b_{22}\,\partial b_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\,\partial b_{23}\,\partial b_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\,\partial b_{23}\,\partial b_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\,\partial b_{21}\,\partial b_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\,\partial b_{21}\,\partial b_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\,\partial b_{22}\,\partial b_{31}}$$

und zu der zusammengesetzten Substitution (42) gehört der Differentiationsprocess

$$\Omega_c = \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{22}\partial c_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{23}\partial c_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{23}\partial c_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{21}\partial c_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{21}\partial c_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{22}\partial c_{31}}.$$

Bezeichnen wir mit p die Zahl, welche angiebt, nach wie vielmaliger Anwendung von Ω_a der Ausdruck $a^q F(f_a)$ von den Substitutions-

coefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ frei wird, so besteht unsere Aufgabe darin, zu zeigen, dass der Ausdruck

$$J(f) = \Omega_a^p \{a^q F(f_a)\}$$

ein Invariante der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ ist. Da der Ausdruck rechter Hand von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ frei sein soll, so ist auch

$$J(f) = \Omega_b^p \{b^q F(f_b)\}.$$

In dieser Formel setzen wir für die Coefficienten der Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Formen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ ein. Dadurch gehen die Coefficienten der Formen $f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}$ in die Coefficienten der Formen $f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}$ über und wir erhalten

$$J(f_a) = \Omega_b^p \{b^q F(f_c)\}$$

oder

$$a^q J(f_a) = \Omega_b^p \{c^q F(f_c)\}. \tag{43}$$

Der Ausdruck $c^q F(f_c)$ hängt von den Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ und von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$, $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{33}$ ab; er enthält jedoch diese Substitutionscoefficienten lediglich in den bilinearen Verbindungen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$. Es gilt nun für eine jede Function G dieser bilinearen Verbindungen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$ wie aus dem Multiplicationssatze der Determinanten leicht erkannt wird, die Beziehung

$$\Omega_b G = a \Omega_c G$$

und durch p-malige Anwendung derselben erhalten wir

$$\Omega_b^p \{c^q F(f_c)\} = a^p \Omega_c^p \{c^q F(f_c)\}. \tag{44}$$

Es ist nun andererseits

$$J(f) = \Omega_c^p \{c^q F(f_c)\}$$

und folglich wegen (43) und (44)

$$J(f_a) = a^{p-q} J(f).$$

Diese Formel zeigt, dass dem Ausdrucke $J(f)$ die Invarianteneigenschaft zukommt.

Der eben bewiesene Satz ermöglicht die Aufstellung von beliebig vielen Invarianten des vorgelegten Formensystems. Um zu zeigen, dass durch dieses Verfahren sämmtliche Invarianten gefunden werden können, betrachten wir den Ausdruck $\Omega_a^p a^p$. Das Differentiationssymbol Ω_a geht aus der Determinante a hervor, wenn wir allgemein

in jedem Gliede $\pm a_{11'}a_{22'}a_{33'}$ der letzteren für das Product $a_{11'}a_{22'}a_{33'}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^3}{\partial a_{11'}\,\partial a_{22'}\,\partial a_{33'}}$ einsetzen, wo 1′, 2′, 3′ die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Entsprechend erhalten wir das Differentiationssymbol Ω_a^p aus a^p, wenn wir in dem entwickelten Ausdruck für a^p allgemein an Stelle von $a_{11}^{p_{11}}a_{12}^{p_{12}}\dots a_{33}^{p_{33}}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^{3p}}{\partial a_{11}^{p_{11}}\,\partial a_{12}^{p_{12}}\dots\partial a_{33}^{p_{33}}}$ einsetzen, wo $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{33}$ gewisse Exponenten bedeuten, deren Summe gleich $3p$ ist. Hieraus folgt insbesondere, dass das Vorzeichen von $a_{11}^{p_{11}}a_{12}^{p_{12}}\dots a_{33}^{p_{33}}$ in a^p übereinstimmt mit dem Vorzeichen von $\frac{\partial^{3p}}{\partial a_{11}^{p_{11}}\,\partial a_{12}^{p_{12}}\dots\partial a_{33}^{p_{33}}}$ in Ω_a^p; wenden wir daher Ω_a^p auf a^p an, so ergiebt sich eine Summe von lauter positiven Zahlen: d. h. $\Omega_a^p a^p$ ist eine von Null verschiedene Zahl*); diese Zahl werde mit N_p bezeichnet.

Es sei nun $J(f)$ eine beliebig vorgelegte Invariante, und dieselbe ändere sich bei der Transformation um die p^{te} Potenz der Substitutionsdeterminante. Die Relation

$$\Omega_a^p\left\{\frac{1}{N_p}J(f_a)\right\}=\frac{1}{N_p}J(f)\Omega_a^p a^p=J(f)$$

zeigt dann, wie die Invariante $J(f)$ durch das angegebene Verfahren erhalten wird und somit folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Auf diese Betrachtungen gründet sich der erstrebte Beweis für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems im ternären Formengebiete. Der erste zu diesem Beweise führende Schritt ist der nämliche, wie vorhin im Falle der binären Formen und wir nehmen demgemäss wiederum an, es seien aus der Gesammtheit der Invarianten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$ die m Invarianten $i_1, i_2, \dots, i_m$ derart ausgewählt, dass eine jede andere Invariante J jener Grundformen in der Gestalt

(45) $$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \dots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundformen sind.

Der zweite Schritt besteht darin, zu zeigen, dass in dem Ausdrucke $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$ die Functionen $A_1, A_2, \dots, A_m$ stets durch Invarianten ersetzt werden können, ohne dass sich dabei der Werth i des Ausdruckes ändert. Zunächst beachten wir, dass eine Invariante ihrer Definition nach in den Coefficienten einer jeden einzelnen Grundform homogen ist. Es seien die Invarianten $i, i_1, i_2, \dots, i_m$ in

*) Vgl. A. Clebsch, l. c. S. 12, wo die letztere Thatsache im Wesentlichen auf dem nämlichen Wege bewiesen worden ist.

den Coefficienten der ersten Grundform $f^{(1)}$ beziehungsweise vom Grade $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$. Da die linke Seite in Formel (45) demnach nur Glieder vom Grade r in den Coefficienten von $f^{(1)}$ enthält, so dürfen wir auf der rechten Seite der nämlichen Formel allgemein in den Functionen A_s alle diejenigen Glieder unterdrücken, deren Grad in den Coefficienten von $f^{(1)}$ kleiner oder grösser als $r - r_s$ ist. Wenn wir in gleicher Weise die Grade in Bezug auf die Coefficienten der übrigen Grundformen reduciren, so gelangen wir schliesslich zu der Gleichung

$$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m$$

wo die Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen sind. In dieser Gleichung setzen wir an Stelle der Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ ein und benutzen dann die Invarianteneigenschaft von $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$; dadurch ergiebt sich

$$a^p i = a^{p_1} B_1(f_a) i_1 + a^{p_2} B_2(f_a) i_2 + \cdots + a^{p_m} B_m(f_a) i_m,$$

wo p, p_s die Gewichte der Invarianten i, i_s und wo $B_s(f_a)$ die entsprechenden Functionen der Coefficienten der transformirten Grundformen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ sind. Wenden wir auf die erhaltene Relation p mal das Differentiationssymbol Ω_a an, so folgt

$$\Omega_a^p \left\{a^p\right\} \cdot i = \Omega_a^p \left\{a^{p_1} B_1(f_a)\right\} \cdot i_1 + \Omega_a^p \left\{a^{p_2} B_2(f_a)\right\} \cdot i_2 + \cdots$$
$$+ \Omega_a^p \left\{a^{p_m} B_m(f_a)\right\} \cdot i_m$$

und, wenn wir durch die von Null verschiedene Zahl $N_p = \Omega_a^p \left\{a^p\right\}$ auf beiden Seiten dividiren, entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo unserem vorhin bewiesenen Satze zufolge die Ausdrücke

$$J_s = \frac{1}{N_p} \Omega_a^p \left\{a^{p_s} B_s(f_a)\right\} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

Invarianten der vorgelegten Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ sind.

Unterwerfen wir diese Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ der nämlichen Behandlung, wie vorhin die Invariante i, so folgt, dass auch diese Invarianten durch lineare Combination aus $i_1, i_2, \ldots, i_m$ erhalten werden können, wobei die als Coefficienten in der linearen Combination auftretenden Functionen wiederum Invarianten sind. Da sich aber bei jedesmaliger Wiederholung dieses Verfahrens die Gewichte der darzustellenden Invarianten vermindern, so bricht das Verfahren ab, und wir erhalten schliesslich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Damit ist der

erstrebte Beweis für ternäre Grundformen mit einer Veränderlichenreihe erbracht.

Aber es geschah lediglich im Interesse einer kürzeren Darstellung, wenn wir uns im Vorhergehenden auf diesen Fall beschränkten und wir sehen nachträglich leicht ein, dass unsere Schlüsse sich ohne Weiteres auf den Fall von Grundformen mit n Veränderlichen übertragen lassen. An Stelle des vorhin benutzten Differentiationsprocesses tritt dann der allgemeine Differentiationsprocess

$$\Omega_a = \Sigma \pm \frac{\partial^n}{\partial a_{11'} \partial a_{22'} \ldots, \partial a_{nn'}}, \quad (1', 2', \ldots, n' = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ die n^2 Coefficienten der linearen Substitution der n Veränderlichen bedeuten.

Enthalten ferner die Grundformen mehrere Veränderlichenreihen, welche sämmtlich der nämlichen linearen Transformation unterliegen, so bleibt das obige Verfahren ebenfalls genau das gleiche und selbst in dem Falle, wo mehrere Veränderlichenreihen in den Grundformen auftreten, welche theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterworfen sind, bedarf es nur eines kurzen Hinweises, in welcher Art die obige Schlussweise zu verallgemeinern ist.

Es sei ein System von Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mit einer ternären Veränderlichenreihe x_1, x_2, x_3 und mit einer binären Veränderlichenreihe ξ_1, ξ_2 vorgelegt, welche gleichzeitig und zwar mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{12}\eta_2, \\ \xi_2 &= \alpha_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2, \end{aligned} \qquad \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

zu transformiren sind. Nach Ausführung dieser Transformation gehen die Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ über in die Formen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$, deren Coefficienten sowohl die Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ als auch die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ enthalten. Unter einer Invariante in Bezug auf diese Transformationen verstehen wir dann einen in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogenen Ausdruck, welcher sich nur um Potenzen der Substitutionsdeterminanten a und α ändert, wenn wir in demselben für die Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$ einsetzen. Unserem oben bewiesenen Satze entspricht dann im vorliegenden Falle der folgende Satz:

Es sei $F(f_{a\alpha})$ irgend eine ganze Function der Coefficienten der transformirten Formen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form homogen ist. Multipliciren wir diese Function $F(f_{a\alpha})$ mit $a^q \alpha^\varkappa$, wo q und $\varkappa$ beliebige nicht negative ganze Zahlen sind und wenden wir dann auf das Product $a^q \alpha^\varkappa F(f_{a\alpha})$ jeden der beiden Processe

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{23}\partial a_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{23}\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{21}\partial a_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{21}\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{22}\partial a_{31}}$$

und

$$\Omega_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{11}\partial \alpha_{22}} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{12}\partial \alpha_{21}}$$

so oft an, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$, $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ freier Ausdruck ergiebt, so ist der entstehende Ausdruck eine Invariante der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ in dem verlangten Sinne.

Der Beweis dieses Satzes entspricht vollkommen dem vorhin für Formen mit einer ternären Veränderlichenreihe ausführlich dargelegten Beweise und ebenso erkennt man ohne Schwierigkeit, dass auch umgekehrt jede Invariante erhalten werden kann, indem man auf eine geeignet gewählte Function der Coefficienten der transformirten Formen die Differentiationsprocesse Ω_a und Ω_α in der durch den obigen Satz vorgeschriebenen Weise anwendet.

Um nun die Endlichkeit des vollen Systems der in Rede stehenden Invarianten darzuthun, nehmen wir wiederum an, es seien die m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ derart ausgewählt, dass jede andere Invariante i in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundformen sind. Aus dieser Relation erhalten wir auf dem nämlichen Wege wie vorhin eine Relation von der Gestalt

$$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m$$

wo die Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen sind. Setzen wir in dieser Gleichung an Stelle der Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$ ein, so folgt

$$a^p \alpha^\pi i = a^{p_1} \alpha^{\pi_1} B_1(f_{a\alpha}) i_1 + \cdots + a^{p_m} \alpha^{\pi_m} B_m(f_{a\alpha}) i_m.$$

Die Anwendung des Differentiationsprocesses $\Omega_a^p \Omega_\alpha^\pi$ und die Division durch die von Null verschiedene Zahl

$$\Omega_a^p \Omega_\alpha^\pi \{a^p \alpha^\pi\} = N_p \mathsf{N}_\pi$$

führt schliesslich zu einer Gleichung von der Gestalt

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo $J_1, J_2, \ldots, J_m$ Invarianten der Grundformen in dem verlangten Sinne sind. Diese Formel führt nach wiederholter Anwendung zu einer ganzen rationalen Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Auch in dem eben behandelten Falle sehen wir nachträglich leicht ein, dass die angewandte Schlussweise sich ohne Weiteres auf den Fall übertragen lässt, wo die gegebenen Grundformen beliebig viele, den nämlichen oder verschiedenen Transformationen unterliegende Veränderlichenreihen enthält. Wir sprechen daher den allgemeinen Satz aus:

Theorem V. *Ist ein System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichenreihen gegeben, welche in vorgeschriebener Weise den nämlichen oder verschiedenen linearen Transformationen unterliegen, so giebt es für dasselbe stets eine endliche Zahl von ganzen und rationalen Invarianten, durch welche sich jede andere ganze und rationale Invariante in ganzer und rationaler Weise ausdrücken lässt.*

Was die sogenannten Covarianten und Combinanten von Formensystemen bestrifft, so fallen diese Bildungen sämmtlich als specielle Fälle unter den oben behandelten Begriff der Invariante. Für diese invarianten Bildungen folgt also ebenfalls aus Theorem V die Endlichkeit der vollen Systeme. Das Gleiche gilt von den sogenannten Contravarianten und allen anderen invarianten Bildungen, bei welchen gewisse aus mehreren Reihen von Veränderlichen zusammengesetzte Determinanten ihrerseits als Veränderliche eintreten*). Diese Bildungen kann man dadurch unter den oben zu Grunde gelegten Invariantenbegriff fassen, dass man geeignete Formen mit mehreren Veränderlichenreihen zu den schon vorhandenen Grundformen hinzufügt. Wenn dies geschehen ist, lassen sich die bisherigen Ueberlegungen unmittelbar übertragen und es folgt daher insbesondere auch für alle solchen invarianten Bildungen die Endlichkeit des vollen Systems. Als Beispiel für diesen Fall diene ein System von Grundformen, in welchen die 6 Liniencoordinaten p_{ik} die Veränderlichen sind.

Anders verhält es sich jedoch, sobald wir die Verallgemeinerung des Invariantenbegriffes in einer Richtung vornehmen, wie sie durch die Untersuchungen von F. Klein**) und S. Lie***) bezeichnet ist.

---

*) Vgl. E. Study, Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen, Berichte der kgl. sächs. Ges. der Wiss. 1887. S. 142.

**) Vgl. die Programmschrift: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen." Erlangen 1872.

***) Vgl. die Vorrede des Werkes: „Theorie der Transformationsgruppen." Leipzig 1888.

Bisher nämlich hatten wir die Invariante definirt als eine ganze homogene Function der Coefficienten der Grundformen, welche gegenüber allen linearen Transformationen der Veränderlichen die Invarianteneigenschaft besitzt. Wir wählen nunmehr, jener allgemeineren Begriffsbildung folgend, eine bestimmte Untergruppe der allgemeinen Gruppe der linearen Transformationen aus und fragen nach denjenigen ganzen homogenen Functionen der Coefficienten der Grundformen, denen nur mit Rücksicht auf die Substitutionen der ausgewählten Untergruppe die Invarianteneigenschaft zukommt. Obwohl unter diesen Invarianten offenbar alle Invarianten im früheren Sinne enthalten sind, so folgt doch aus unseren bisherigen Sätzen über die Endlichkeit der vollen Invariantensysteme noch nicht, dass auch unter den Invarianten im erweiterten Sinne sich jederzeit eine endliche Anzahl auswählen lässt, durch welche jede andere Invariante der nämlichen Art ganz und rational ausgedrückt werden kann.

Die bisherigen Entwickelungen und Ergebnisse lassen sich auf die Theorie der Invarianten in dem erweiterten Sinne allemal dann unmittelbar übertragen, wenn die Coefficienten der die Gruppe bestimmenden Substitutionen ganze und rationale Functionen einer gewissen Anzahl von Parametern sind derart, dass durch Zusammensetzung zweier beliebigen Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Functionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und wenn es zugleich einen Differentiationsprocess giebt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden lässt, wie der Differentiationsprocess Ω im Falle der zur allgemeinen linearen Gruppe gehörigen Invarianten. Für solche Substitutionengruppen ergiebt sich stets durch unser Schlussverfahren die Endlichkeit des zur Gruppe gehörigen Invariantensystems.

Um kurz zu zeigen, wie der Beweis in solchen Fällen zu führen ist, betrachten wir die Gruppe der ternären orthogonalen Substitutionen d. h. die Gruppe aller derjenigen linearen Substitutionen von drei homogenen Veränderlichen, bei deren Ausführung die Summe der Quadrate der Veränderlichen ungeändert bleibt. Die Transformationsformeln für diese Substitutionen sind bekanntlich

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)y_1 - 2(a_1a_3+a_2a_4)y_2 - 2(a_1a_4-a_2a_3)y_3,\\
x_2 &= 2(a_1a_3-a_2a_4)y_1 + (a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2)y_2 - 2(a_1a_2+a_3a_4)y_3,\\
x_3 &= 2(a_1a_4+a_2a_3)y_1 + 2(a_1a_2-a_3a_4)y_2 + (a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2)y_3,
\end{aligned}
$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 die 4 homogenen Parameter der Substitutionengruppe bedeuten. Die Gruppeneigenschaft dieser Substitutionen bestätigt sich leicht, wenn man in den eben angegebenen Formeln an Stelle der Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 andere Grössen einträgt und die so erhaltene Substitution mit der ursprünglichen zusammensetzt. Was die zu dieser Substitutionengruppe gehörigen Invarianten betrifft, so gilt der folgende Satz:

Wenn man ein System von ternären Grundformen vermöge der angegebenen Substitutionsformeln linear transformirt und auf eine beliebige homogene Function der Coefficienten der transformirten Grundformen das Differentiationssymbol

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_4^2}$$

so oft anwendet, bis sich ein von den Parametern a_1, a_2, a_3, a_4 freier Ausdruck ergiebt, so besitzt dieser Ausdruck die Invarianteneigenschaft gegenüber der durch jene Formeln definirten Substitutionengruppe. Das gleiche gilt, wenn jene homogene Function der transformirten Coefficienten noch zuvor mit einer beliebigen ganzen Potenz des Ausdruckes $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ multiplicirt wird.

Die Anwendung dieses Satzes ermöglicht den gesuchten Beweis der Endlichkeit des vollen Invariantensystems, wie man leicht erkennt, wenn man die Entwickelungen des früheren Beweises auf den vorliegenden Fall überträgt.

Ein anderes Beispiel liefert diejenige Gruppe, welche die folgenden quaternären Substitutionen enthält

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1^3 \; y_1 + 3a_1^2 a_2 \; y_2 + 3a_1 a_2^2 \; y_3 + a_2^3 \; y_4,\\
x_2 &= a_1^2 a_3 y_1 + (a_1^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3) y_2 + (2a_1 a_2 a_4 + a_2^2 a_3) y_3 + a_2^2 a_4 y_4,\\
x_3 &= a_1 a_3^2 y_1 + (2a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2) y_2 + (a_1 a_4^2 + 2a_2 a_3 a_4) y_3 + a_2 a_4^2 y_4,\\
x_4 &= a_3^3 \; y_1 + 3a_3^2 a_4 \; y_2 + 3a_3 a_4^2 \; y_3 + a_4^3 \; y_4.
\end{aligned}$$

Deuten wir die Veränderlichen als homogene Coordinaten der Punkte des Raumes, so stellen diese Formeln mit den veränderlichen Parametern a_1, a_2, a_3, a_4 alle linearen Transformationen des Raumes dar, bei welchen eine gewisse Raumcurve dritter Ordnung ungeändert bleibt. Durch die entsprechenden Betrachtungen wie vorhin folgt auch für diesen Fall die Endlichkeit des vollen Invariantensystems.

Nachdem für ein vorgelegtes System von Grundformen die Invarianten sämmtlich aufgestellt worden sind, entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Invarianten dieses endlichen Systems. Für eine derartige Untersuchung dienen wiederum die Theoreme I und III als Grundlage. Wenn wir nämlich in den dort auftretenden Formen eine der n homogenen Veränderlichen der Einheit

gleich setzen, so erkennen wir unmittelbar, dass jene beiden Theoreme auch für nicht homogene Functionen gültig sind und es ist somit insbesondere die Anwendung derselben auf die zwischen den Invarianten bestehenden Relationen gestattet. Verstehen wir nun in üblicher Ausdrucksweise unter einer irreduciblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten des Grundformensystems, deren linke Seite nicht durch lineare Combination von Syzygien niederer Grade erhalten werden kann, so folgt aus Theorem I der Satz:

Ein endliches System von Invarianten besitzt nur eine endliche Zahl von irreduciblen Syzygien.

Als Beispiel diene das volle Invariantensystem von 3 binären quadratischen Grundformen, welches bekanntlich aus 7 Invarianten und 6 Covarianten besteht. Es lässt sich zeigen, dass es für dieses Invariantensystem 14 irreducible Syzygien giebt, aus denen jede andere Syzygie durch lineare Combination erhalten werden kann.

Die Aufstellung des vollen Systems der irreduciblen Syzygien ist aber nur der erste Schritt auf dem Wege, welcher gemäss den oben in den Abschnitten I, III und IV allgemein entwickelten Principien zur vollen Erkenntniss der gegenseitigen Abhängigkeit der Invarianten führt. Denn zwischen den Syzygien ihrerseits bestehen gleichfalls im Allgemeinen lineare Relationen, sogenannte Syzygien zweiter Art, deren Coefficienten Invarianten sind und welche wiederum selber durch lineare Relationen, sogenannte Syzygien dritter Art, verbunden sind. Was die Fortsetzung des hiedurch eingeleiteten Verfahrens anbetrifft, so muss dasselbe nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen nothwendig abbrechen, wie unser Theorem III lehrt, wenn man dasselbe in der vorhin angedeuteten Weise auf nicht homogene Functionen überträgt. Wir gewinnen somit den Satz;

Die Systeme der irreduciblen Syzygien erster Art, zweiter Art u. s. f. bilden eine Kette abgeleiteter Gleichungssysteme. Diese Syzygienkette bricht im Endlichen ab und zwar giebt es keinenfalls Syzygien von höherer als der $m+1^{ten}$ Art, wenn m die Zahl der Invarianten des vollen Systems bezeichnet.

Zur vollständigen Untersuchung eines Invariantensystems bedarf es in jedem besonderen Falle der Aufstellung der ganzen Kette von Syzygien. Nach den Erörterungen des Abschnittes IV sind wir dann in der Lage, die linear unabhängigen Invarianten von vorgeschriebenen Graden anzugeben, und zwar ausgedrückt als ganze rationale Functionen der Invarianten des vollen Systems.

Königsberg in Pr. den 15. Februar 1890.

Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

Franz London in Breslau.

Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Problem der Darstellung einer cubischen ternären Form als Summe von Cuben linearer Formen, sowie mit der gleichzeitigen Darstellung mehrerer cubischer ternärer Formen als Summe derselben Cuben linearer Formen; es wird darin gezeigt, auf welche Weise und in welcher Anzahl sich die linearen Formen bestimmen lassen, aus deren Cuben die ternäre cubische Form linear zusammengesetzt wird, und es wird ferner die kleinste Anzahl linearer Formen bestimmt, aus deren Cuben mehrere cubische ternäre Formen gleichzeitig zusammengesetzt werden können. Obwohl jedoch die hier aufgeworfene Frage eine rein algebraische ist, so tragen doch die folgenden Untersuchungen einen vorwiegend geometrischen Charakter. Soll nämlich eine cubische ternäre Form

$$f(xxx) = \sum_{(i,k,l)} a_{ikl} x_i x_k x_l \quad (i, k, l = 1, 2, 3),$$

wobei

$$a_{ikl} = a_{ilk} = a_{kil} = a_{kli} = a_{lik} = a_{lki},$$

aus den Cuben von p linearen Formen

$$a_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

linear zusammengesetzt werden, so dass also p Constanten

$$k_i \ (i = 1, 2, \ldots, p)$$

so bestimmbar sind, dass:

$$f(xxx) = \sum_1^p {}^i k_i a_i(x)^3$$

wird, so werden die p Geraden, deren Gleichungen

$$a_i(x) = 0 \quad (i = 1 \ldots p)$$

sind, ein p-Seit bilden, welches in bestimmter Lagenbeziehung zu der durch die Gleichung $f(xxx) = 0$ dargestellten ebenen Curve dritter

Ordnung C^3 steht. Man pflegt ein solches p-Seit in Analogie mit der bei den Kegelschnitten üblichen Bezeichnung ein Polar-p-Seit der Curve dritter Ordnung C^3 zu nennen*), und unsere Aufgabe, die cubischen ternären Formen als Summe von Cuben linearer Formen darzustellen, lautet also geometrisch interpretirt: Die Polarfiguren einer oder mehrerer Curven dritter Ordnung aufzufinden und zu construiren. Es sollen daher im Folgenden die Eigenschaften der Polar-p-Seite einer oder mehrerer Curven dritter Ordnung einer eingehenden Untersuchung unterworfen werden, sowie die Constructionen dieser Polarfiguren ausgeführt werden. Die Polarfigur von kleinster Seitenanzahl ist bei einer Curve dritter Ordnung C^3 das Polarvierseit. Wir werden jedoch erkennen, dass dasselbe eigentlich noch den Polarfiguren der Kegelschnitte zuzurechnen ist, so dass wir nicht weiter auf dasselbe einzugehen haben werden. Es werden daher zunächst die Polarfünfseite untersucht und Constructionen derselben angegeben. Hieran schliesst sich die Betrachtung der gemeinsamen Polarfünfseite zweier C^3, wobei sich herausstellt, dass, obwohl nach der Abzählung eine endliche Anzahl gemeinsamer Polarfünfseite existiren müssten, doch zwei allgemeine C^3 kein gemeinschaftliches Polarfünfseit besitzen, sondern dass dazu nothwendig aber auch hinreichend das Verschwinden einer simultanen Invariante ist. In einem zweiten Abschnitte werden die Polarsechsseite einer eingehenden Behandlung unterworfen, sodann wird gezeigt, dass zwei C^3 gemeinsame Polarsechsseite in vierfacher Mannigfaltigkeit besitzen. Hieran schliesst sich die Untersuchung der gemeinsamen Polarsechsseite eines Curvennetzes dritter Ordnung, welche das bemerkenswerthe Resultat liefert, dass jedes allgemeine Curvennetz dritter Ordnung genau 2 Polarsechsseite besitzt, deren Construction ausgeführt wird. Zum Schlusse werden die Polarfiguren von grösserer Seitenanzahl behandelt, jedoch schien hier, um häufige Wiederholungen zu vermeiden, eine grössere Kürze der Darstellung am Platze zu sein. Eine unmittelbar sich anschliessende Arbeit verwendet die erlangten Principien zu einer Anzahl äusserst einfacher Constructionen des neunten Schnittpunkts zweier Curven dritter Ordnung, welche einen Beitrag für die Fruchtbarkeit jener Untersuchungen bieten mögen. —

Die angewandte Methode ist zum grossen Theil der Theorie conjugirter und apolarer Curven entlehnt, wie sie vorwiegend von den Herren Rosanes**) und Reye***) ausgebildet ist. Eine Zusammenstellung der aus dieser Theorie erforderlichen Hülfssätze ist der Unter-

---

*) cf. Johnson, Quaterly Journal Febr. 1887; ferner O. Schlesinger: Math. Ann. Bd. 30, p. 454.

**) cf. Rosanes: Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen. Cr. Journ. Bd. 76.

***) cf. Reye: Cr. Journ. Bd. 72, 77, 78, 79, 82.

suchung vorangeschickt worden. — Die geometrische Beziehung des Conjugirtseins und der Apolarität für Curven dritter Ordnung in ihrem Zusammenhang mit den Polarfiguren der C^3 ist neuerdings von Herrn O. Schlesinger in zwei Abhandlungen*) untersucht worden. Die vielfachen Berührungspunkte mit diesen Arbeiten werden es rechtfertigen, dass verschiedene sich daselbst vorfindende Definitionen und Resultate hier nochmals aufgeführt sind. Auch bin ich Herrn Schlesinger für verschiedene briefliche Mittheilungen zu lebhaftem Danke verpflichtet.

§ 1.

Zusammenstellung der aus der Theorie conjugirter und apolarer Curven erforderlichen Hülfssätze.

1. Eine Curve dritter Ordnung C^3 mit der Gleichung

$$f(xxx) = \sum_{i,k,l} a_{ikl} x_i x_k x_l = 0 \quad (i, k, l, = 1, 2, 3)$$

nennen wir zu einer Curve dritter Classe K^3:

$$\varphi(uuu) = \sum_{i,k,l} \alpha_{ikl} u_i u_k u_l = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

conjugirt, wenn die simultane bilineare Invariante

$$f(\varphi) = \sum_{i,k,l} a_{ikl}\, \alpha_{ikl}$$

verschwindet**).

2. Alle K^3, welche zu p $C^3 (p < 10)$ conjugirt sind, bilden eine $(9 - p)$-fache lineare Mannigfaltigkeit; aus $(10 - p)$ linear unabhängigen derselben lassen sich alle übrigen linear und homogen zusammensetzen, so dass alle zu p C^3 conjugirten K^3 eine $(10 - p)$-gliedrige Gruppe bilden**).

3. Jeder auf C^3 liegende Punkt α stellt als degenerirte K^3:

$$u(\alpha)^3 = (u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3)^3 = 0$$

aufgefasst eine zu C^3 conjugirte K^3 dar, da $\sum a_{ikl}\alpha_i\alpha_k\alpha_l = 0$. Ferner bilden alle zu C^3 conjugirten Dreiecke α, β, γ in 3 Punkte degenerirte, zu C^3 conjugirte $K^3 : u(\alpha)\, u(\beta)\, u(\gamma)$. —

4. *Die Polargerade einer Curve zweiter Classe in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung.* Eine Curve dritter Classe K^3, welche in eine Curve zweiter Classe: K^2 mit der Gleichung:

*) cf. Schlesinger: Math. Ann. Bd. 30, 31.

**) cf. Rosanes l. c.

$$\varphi(uu) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

und einen Punkt α zerfällt, also die Gleichung:

$$\varphi(uu)\, u(\alpha) = \sum_{i,k,l=1}^{3} \alpha_{ik} \alpha_l u_i u_k u_l = 0$$

besitzt, ist dann und nur dann zu einer C^3:

$$f = \sum a_{ikl} x_i x_k x_l = 0$$

conjugirt, wenn:

$$\sum a_{ikl} \alpha_{ik} \alpha_l = 0$$

ist, d. h. wenn die $K^2 : \varphi(uu) = 0$ conjugirt ist der C^2:

$$\sum a_{ikl} \alpha_l x_i x_k = f(\alpha x x) = 0$$

d. h. der conischen Polaren von α in Bezug auf f; oder wenn der Punkt α auf der Geraden:

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl} \alpha_{ik} x_l = 0$$

liegt. Diese Gerade heisst nach Herrn Reye*) die *Polargerade* der $K^2 : \varphi = 0$ in Bezug auf die $C^3 : f = 0$. Die Polargerade einer $K^2 : \varphi = 0$ in Bezug auf eine $C^3 : f = 0$ enthält demnach alle Punkte α, welche mit φ zusammen eine zu f conjugirte K^3 bilden. Zu jeder K^2 gehört im Allgemeinen nur eine Polargerade, andererseits gehört zu jeder Geraden a eine viergliedrige Gruppe von K^2 derart, dass a Polargerade aller K^2 jener Gruppe ist. Diese viergliedrige Gruppe ist die zu dem Polarkegelschnittbüschel von a conjugirte viergliedrige Gruppe von Curven zweiter Classe. Denn jede K^2 dieser Gruppe ist conjugirt zu dem Polarkegelschnitte eines jeden Punktes von a, bildet also mit jedem dieser Punkte je eine zu f conjugirte K^3, so dass nach dem Vorigen a Polargerade unserer K^2 ist. Man gelangt folgendermassen zu der Polargeraden einer gegebenen K^2: Die zu K^2 conjugirte 5-gliedrige Gruppe von Curven zweiter Ordnung hat mit dem Polarkegelschnittnetz der C^3 im Allgemeinen einen Büschel gemein; dieser Büschel ist Polarkegelschnittbüschel einer bestimmten Geraden a und diese Gerade a ist die gesuchte Polargerade von K^2, da K^2 dem Polarkegelschnittbüschel von a conjugirt ist. —

5. Die Polargerade:

$$\sum a_{ikl} \alpha_{ik} x_l = 0$$

einer K^2:

$$\varphi = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0$$

*) cf. Reye; Cr. Journ. Bd. 78.

wird unbestimmt, wenn $\sum a_{ikl}\,\alpha_{ik}\,x_l$ identisch für jeden Werth von x_1, x_2, x_3 verschwindet; dazu muss:

$$\sum_{i,k} a_{ikl}\,\alpha_{ik} = 0$$

sein für $l = 1, 2, 3$, dann aber ist φ conjugirt den 3 Polarkegelschnitten:

$$f_l = \sum_{i,k} a_{ikl}\,x_i\,x_k = 0$$

für $l = 1, 2, 3$, also dem ganzen Polarennetze von $f = 0$. Andererseits wird die Polargerade einer jeden K^2, welche der zu dem Polarennetz von f conjugirten dreigliedrigen K^2-Gruppe angehört, unbestimmt, so dass wir erkennen, dass eine lineare zweifache Mannigfaltigkeit von K^2 existirt, welche keine bestimmte Polargerade in Bezug auf $f = 0$ besitzen. Wir nennen mit Herrn Reye*) eine K^2, welche in Bezug auf die $C^3 : f = 0$ keine bestimmte Polargerade besitzt, zu $f = 0$ *„apolar"*. Jede C^3 besitzt daher ein Netz zu ihr apolarer Curven zweiter Classe. Jede zu $f = 0$ apolare $K^2 : \varphi = 0$ bildet mit jedem beliebigen Punkte α der Ebene eine zerfallende K^3:

$$\varphi(uu)\,u(\alpha) = 0,$$

welche zu $f = 0$ conjugirt ist. Man kann also die zu $f = 0$ apolaren K^2 auch definiren als diejenigen K^2, welche mit jedem Punkte der Ebene eine zu $f = 0$ conjugirte K^3 bilden. —

6. Unter einem *Polar-p-Seit* einer $C^3 : f = 0$ verstehen wir**) p Geraden $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ mit den Gleichungen

$$a_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0 \quad (i = 1 \ldots p)$$

von der Beschaffenheit, dass sich die linke Seite f der Curvengleichung linear und homogen aus den p Cuben $a_i(x)^3$ zusammensetzen lässt; es müssen sich also p Constanten $k_1, k_2, \ldots, k_p$ so bestimmen lassen, dass:

$$f(xxx) = \sum_1^p{}_i\, k_i a_i(x)^3$$

wird. Diese Definition hat nur für $p < 10$ eine Bedeutung, da zwischen 11 cubischen ternären Formen stets eine lineare Identität besteht, also sich aus beliebigen 10 Cuben linearer Formen jede cubische ternäre Form f zusammensetzen lässt, also jedes Zehnseit Polarzehnseit von $f = 0$ ist.

7. Jede $K^3 : \varphi = 0$, welche einem Polar-p-Seit einer $C^3 : f = 0$ eingeschrieben ist, ist zu $f = 0$ conjugirt**). Denn ist

*) Reye: Cr. Journ. Bd. 78.

**) cf. Schlesinger, Math. Ann. Bd. 30, p. 454 ff.

$$f = \sum_1^p {}^{\varrho} k_\varrho a_\varrho(x)^3 \quad \text{und} \quad \varphi(a_\varrho a_\varrho a_\varrho) = 0,$$

so ist nothwendig:

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl} \alpha_{ikl} = \sum_1^p {}^{\varrho} k_\varrho \varphi(a_\varrho a_\varrho a_\varrho) = 0. —$$

Aber es gilt auch umgekehrt*): Jedes p-Seit, welchem $(10 - p)$ linear unabhängige zu C^3 conjugirte K^3 eingeschrieben sind, ist Polar-p-Seit von C^3. Denn es sind die $(p + 1)$ C^3:

$$f = 0, \quad a_i(x)^3 = 0 \quad (i = 1 \ldots p)$$

sämmtlich zu den $(10 - p)$ dem p-Seit eingeschriebenen K^3 conjugirt; alle zu $(10 - p)$ linear unabhängigen K^3 conjugirten C^3 bilden aber eine p-gliedrige Gruppe, also ist:

$$f = \sum_1^p {}^{i} k_i a_i(x)^3. —$$

8. Zwischen den Cuben von 8 linearen Formen $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ besteht dann und nur dann eine lineare Relation:

$$\sum_1^8 {}^{i} k_i a_i(x)^3 = 0,$$

wenn die 8 Geraden a_i einen Kegelschnitt berühren; denn 8 Tangenten a_i einer $K^2 : \varphi(uu) = 0$, sind stets so beschaffen, dass $a_i(x)^3$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ conjugirt sind, zu den 3 linear unabhängigen K^3:

$$\varphi(uu)\, u(\alpha) = 0, \quad \varphi(uu)\, u(\beta) = 0, \quad \varphi(uu)\, u(\gamma) = 0,$$

wo α, β, γ drei ganz willkürliche Punkte der Ebene bedeuten. Die zu 3 K^3 conjugirten C^3 bilden aber nach (2) eine 7-gliedrige Gruppe, also besteht zwischen den 8 $K^3 : a_i(x)^3$ dieser Gruppe eine lineare Identität. Umgekehrt folgt auch unmittelbar, dass, falls jene Relation besteht, die 8 Geraden denselben Kegelschnitt berühren, wie man leicht durch Polarenbildung erkennt. —

Zwischen 9 Cuben linearer Formen $a_i(x)^3$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ besteht dann und nur dann eine lineare Identität, wenn die 9 Geraden a_i die 9 gemeinsamen Tangenten zweier Curven dritter Classe sind. Denn für 9 gemeinsame Tangenten zweier K^3, die mit $a_1 \ldots a_9$ bezeichnet sein mögen, ist:

$$\sum_1^9 {}^{i} k_i a_i(x)^3 = 0,$$

da die 9 $C^3 : a_i(x)^3 = 0$ $(i = 1 \ldots 9)$ conjugirt zu den beiden K^3

*) cf. Schlesinger: Math. Ann. Bd. 30, p. 454 ff.

sind und demnach einer achtgliedrigen Gruppe angehören. — Umgekehrt bilden 9 Geraden a_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, für welche

$$\sum_1^9 k_i\, a_i(x)^3 = 0$$

ist, das gemeinsame Tangentensystem zweier K^3; denn betrachten wir $2K^3$, welche 8 Geraden $a_1, \ldots, a_8$ berühren, so sind dieselben conjugirt zu $a_1(x)^3, \ldots, a_8(x)^3$, folglich sind sie auch zu $a_9(x)^3$ conjugirt, d. h. a_9 berührt ebenfalls beide K^3. — Analog beweist man: Zwischen 10 Cuben linearer Formen $a_i(x)^3$ $(i = 1 \ldots 10)$ besteht dann und nur dann eine lineare Identität, wenn die 10 Geraden a_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ eine K^3 berühren. —

9. Eine allgemeine $C^3 : f = \sum a_{ikl}\, x_i\, x_k\, x_l = 0$ d. h. eine solche, deren Coordinaten a_{ikl} Unbestimmte sind, besitzt als Polar-p-Seite von niedrigster Seitenanzahl: Polarvierseite. Denn eine C^3, welche sich aus weniger als 4 Cuben linearer Formen linear zusammensetzen lässt, ist von specieller Natur; es ist nämlich die C^3 von der Gleichungsform $a(x)^3 = 0$ eine dreifach zählende Gerade; eine C^3 von der Gleichungsform: $k_1\, a_1(x)^3 + k_2\, a_2(x)^3 = 0$ stellt drei Gerade durch einen Punkt dar, während eine C^3 mit der Gleichung:

$$k_1\, a_1(x)^3 + k_2\, a_2(x)^3 + k_3\, a_3(x)^3 = 0$$

eine äquianharmonische C^3 ist, also für sie die Invariante S verschwindet*). Andererseits ist jede ternäre cubische Form aus 4 Cuben linearer Formen zusammensetzbar**), so dass eine allgemeine C^3: Polar-4, 5, 6, 7, 8, 9-Seite besitzt. Die folgenden Untersuchungen stellen sich die Aufgabe, die Eigenschaften dieser Polarfiguren zu untersuchen und dieselben wirklich zu construiren. —

10. *Polarvierseite.* Ein Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ wird nach (6) Polarvierseit der C^3: $f = 0$ sein, wenn

$$f = \sum_{i=1}^4 k_i\, a_i(x)^3.$$

Wir wollen zeigen, dass die Polarvierseite der Curven dritter Ordnung eigentlich noch den Polarfiguren der Kegelschnitte zugehören, indem wir den Satz beweisen: Jedes Polarvierseit einer Curve dritter Ordnung C^3 ist Polarvierseit ihres Polarkegelschnittnetzes und jedes Polarvierseit dieses Polarennetzes ist Polarvierseit der C^3. Dieser Satz führt die Polarvierseite einer C^3 auf die bekannten***) Polarvierseite

*) cf. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie p. 553, 554.

**) cf. Rosanes l. c. p. 328.

***) cf. Rosanes: Math. Ann. Bd. 6, sowie Reye: Geometrie der Lage Bd. I, p. 209 ff.

eines Kegelschnittnetzes zurück. Der erste Theil unseres Satzes folgt unmittelbar durch Polarisirung, denn diese giebt:

$$f(yxx) = \sum_{i=1}^{4} k_i a_i(y)\, a_i(x)^2$$

d. h. $a_1 a_2 a_3 a_4$ ist Polarvierseit eines beliebigen Kegelschnittes des Polarennetzes. Ist andererseits $a_1 a_2 a_3 a_4$ Polarvierseit des Polarennetzes, so ist jedes Gegeneckenpaar z. B. a_{12}, a_{34} ein Paar conjugirter Pole der Hesse'schen Curve von f, also eine zerfallende zu f apolare K^2. Betrachten wir 2 dieser zu C^3 apolaren K^2:

$$(ua^1a^2)(ua^3a^4) = 0, \quad (ua^1a^3)(ua^2a^4) = 0,$$

so sind die 6 K^3:

$$\begin{aligned}
&(ua^1a^2)(ua^3a^4)\,u(\alpha) = 0, \quad && (ua^1a^3)(ua^2a^4)\,u(\delta) = 0,\\
&(ua^1a^2)(ua^3a^4)\,u(\beta) = 0, && (ua^1a^3)(ua^2a^4)\,u(\varepsilon) = 0,\\
&(ua^1a^2)(ua^3a^4)\,u(\gamma) = 0, && (ua^1a^3)(ua^2a^4)\,u(\zeta) = 0,
\end{aligned}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ 6 ganz beliebige Punkte der Ebene bedeuten, 6 zu f conjugirte linear unabhängige K^3; denn bestände zwischen ihnen eine lineare Identität, so gäbe es zwei Punkte $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ derart, dass:

$$k_1(ua^1a^2)(ua^3a^4)\,u(\bar{\alpha}) = k_2(ua^1a^3)(ua^2a^4)\,u(\bar{\beta}),$$

dann aber müssten nothwendig drei der 4 Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 durch einen Punkt gehen. Es ist also das Vierseit a_1, a_2, a_3, a_4 6 zu f conjugirten linear unabhängigen K^3 umschrieben, also nach (7) Polarvierseit von f. Die Theorie der Polarvierseite gehört daher einer niedrigeren Stufe an und ist daher als bereits erledigt zu betrachten. — Wir fügen noch folgende Sätze über Polarvierseite hinzu:

Die K^2-Schaar, welche einem Polarvierseite von C^3 einschreibbar ist, ist zu C^3 apolar. Denn jede K^2 derselben bildet nach (7) mit jedem Punkte der Ebene eine zu C^3 conjugirte K^3, und eine K^2, welche mit jedem Punkte der Ebene eine zu C^3 conjugirte K^3 bildet, ist nach (5) zu C^3 apolar. — Umgekehrt ist ebenso jedes einer Schaar zu C^3 apolarer K^2 umschriebene Vierseit, Polarvierseit von f*), da es nach dem Obigen 6 independenten zu f conjugirten K^3 umschrieben ist. Zu jeder Schaar apolarer K^2 gehört also ein Polarvierseit von C^3, und zu jedem Polarvierseit eine ihm eingeschriebene apolare K^2-Schaar. Die Polarvierseite von C^3 sind also den Schaaren zu C^3 apolarer K^2 eindeutig zugeordnet, so dass wir erkennen, dass es eine zweifache Mannigfaltigkeit von Polarvierseiten einer C^3 giebt. Jede Gerade a_1 der Ebene ist eindeutig zu einem Polarvierseit von C^3 ergänzbar, denn es existirt genau eine einzige Schaar des Netzes

*) cf. Schlesinger: l. c. p. 456.

apolarer K^2, welche a_1 berührt, und deren drei weitere gemeinsame Tangenten a_2, a_3, a_4 die Gerade a_1 zu einem Polarvierseit von f ergänzen. Damit ein Vierseit Polarvierseit einer gegebenen C^3 sei, müssen 6 independente, ihm eingeschriebene K^3 zu f conjugirt sein (nach 7), so dass das Vierseit 6 Bedingungen zu erfüllen hat; da man einem Vierseit im Ganzen 8 Bedingungen auferlegen kann, so lehrt auch die Abzählung, dass eine zweifache Mannigfaltigkeit von Polarvierseiten einer C^3 vorhanden sind.

§ 2.

Die Polarfünfseite einer Curve dritter Ordnung.

Ein Fünfseit a mit den Seiten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ist nach (§ 1, 6) ein Polarfünfseit einer $C^3 : f = 0$, wenn sich 5 Constante k_i:

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

so bestimmen lassen, dass:

$$f(xxx) = \sum_{i=1}^{5} k_i a_i(x)^3,$$

wobei

$$a_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = 0$$

die Gleichung der Geraden a_i bedeutet. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden a_i und a_k $(i \neq k,\ i,\ k = 1, 2, 3, 4, 5)$ mit a_{ik}, nennen wir a_{ik} und a_{lm} ein Eckenpaar*), wenn

$$i \neq k \neq l \neq m; \quad i,\ k,\ l,\ m = 1, 2, 3, 4, 5$$

ist, also a_{ik}, a_{lm} 4 Seiten des Fünfseits a enthalten und sei die fünfte übrig bleibende Seite a_n des Fünfseits als die Gegenseite*) des Eckenpaares a_{ik}, a_{lm} bezeichnet, so dass i, k, l, m, n eine Permutation der 5 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bilden, dann ist die gemischte Polare eines jeden Eckenpaares z. B. von a_{12}, a_{34} mit dessen Gegenseite a_5 identisch. Denn, wenn wir die gemischte Polare des Punktepaares y, z in Bezug auf $f(xxx) = 0$ mit

$$f(xyz) = \sum_{i,k,l} a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \quad (i,\ k,\ l = 1, 2, 3)$$

bezeichnen, so ist:

$$f(a_{12}, a_{34}, x) = \sum a_{ikl} (a_1 a_2)_i (a_3 a_4)_k x_l = k_5 (a_1 a_2 a_5)(a_3 a_4 a_5) a_5(x) = 0.$$

Es gilt also*):

1. *In jedem Polarfünfseit einer C^3 hat jedes Eckenpaar die Gegenseite zur gemischten Polaren*, oder: Jedes Eckenpaar bildet mit irgend

---

*) cf. Schlesinger, l. c. p. 456, 457.

einem Punkte der Gegenseite ein conjugirtes Dreieck der C^3. Solche 3 Punkte enthalten sämmtliche 5 Seiten des Fünfseits und bilden daher eine dem Fünfseit eingeschriebene zerfallende K^3, welche (nach § 1, 7) zu C^3 conjugirt ist. Sind andererseits 5 *independente* derartige Punkttripel des Fünfseits zu f conjugirt, so ist (nach § 1, 7) das Fünfseit Polarfünfseit von f. Dass in der That 5 derartige *independente* Punkttripel auffindbar sind, hat Herr Schlesinger*) gezeigt, so dass wir erkennen, dass genau 5 Bedingungen von einem Fünfseit zu erfüllen sind, damit es Polarfünfseit einer gegebenen C^3 sei; da die ganze Ebene eine 10-fache Mannigfaltigkeit von Fünfseiten besitzt, so lehrt die Abzählung:

2. *Jede Curve dritter Ordnung besitzt eine 5-fache Mannigfaltigkeit von Polarfünfseiten*, ein Resultat, das wir durch die wirkliche Construction dieser Figuren noch direct bestätigen werden. —

Bilden wir die conische Polare irgend eines Punktes y in Bezug auf die C^3:

$$f=\sum_{i=1}^{5} k_i a_i(x)^3=0,$$

so ist dieselbe:

$$f(yxx)=\sum_{i=1}^{5} k_i a_i(y)\, a_i(x)^2,$$

so dass das Fünfseit a Polarfünfseit dieser und somit aller conischen Polaren ist. Ist y im Besonderen irgend ein Punkt einer der Seiten des Fünfseits z. B. von a_1, so ist

$$f(yxx)=\sum_{\varrho=2}^{5} k_\varrho a_\varrho(y)\, a_\varrho(x)^2,$$

so dass wir erkennen, dass das Vierseit $a_2 a_3 a_4 a_5$ Polarvierseit der conischen Polaren aller Punkte von a_1 ist d. h. Polarvierseit des zu a_1 gehörigen Polarkegelschnittbüschels. Ist endlich y irgend eine Ecke z. B. a_{12} des Fünfseits a, so ist seine conische Polare:

$$f(a_{12},\, xx)=\sum_{\sigma=3}^{5} k_\sigma(a_\sigma a_1 a_2)\, a_\sigma(x)^2,$$

d. h. das Dreiseit a_3, a_4, a_5 ist Polardreiseit der conischen Polaren der Ecke a_{12}. Nennen wir jedes Dreiseit eines Fünfseits „*complementär*“ zu derjenigen Ecke, welche die beiden übrigen im Dreiseit nicht enthaltenen Seiten des Fünfseits enthält; und ebenso jedes Vierseit des Fünfseits complementär zu der 5ten Seite, dann gilt:

*) Schlesinger: l. c. p. 457.

3. *Ein Polarfünfseit einer C^3 ist gleichzeitig Polarfünfseit des Polarennetzes von C^3; jedes Vierseit eines Polarfünfseits ist Polarvierseit des Polarkegelschnittbüschels der complementären Seite, jedes Dreiseit desselben ist Polardreiseit der conischen Polare der complementären Ecke.* — Aus dem ersten Theil dieses Satzes folgt unmittelbar:

4. *Die einem Polarfünfseit von C^3 eingeschriebene K^2 ist zu C^3 apolar*)*; dies ergiebt sich auch direct aus dem Umstande, dass diese K^2 mit jedem Punkte der Ebene (nach § 1, 7) eine zu C^3 conjugirte K^3 bildet. — Da nach Satz (3) jedes Vierseit von a z. B. $a_1 a_2 a_3 a_4$ Polarvierseit des Polarkegelschnittbüschels der complementären Seite a_5 ist, so sind die 3 Gegeneckenpaare (a_{12}, a_{34}), (a_{13}, a_{24}), (a_{14}, a_{23}) correspondirende Punktepaare derjenigen Steiner'schen Verwandtschaft, welche durch das Polarkegelschnittbüschel vermittelt wird. Also gilt:

5. *Ist eine Seite a_5 und eine Ecke a_{12} eines Polarfünfseits von C^3, gegeben, so ist dadurch die Ecke a_{34}, welche mit a_{12} zusammen dasjenige Eckenpaar bildet, von welchem a_5 Gegenseite ist, eindeutig bestimmt als correspondirender Punkt von a_{12} in derjenigen Steiner'schen Verwandtschaft, welche das Polarkegelschnittbüschel von a_5 vermittelt.* — Es gilt ferner:

6. *Ist ein Fünfseit a einer zu C^3 apolaren $K^2 : \varphi(uu) = 0$ und zwei beliebigen zu C^3 conjugirten $K^3 : \Phi = 0$, $\Psi = 0$ umschrieben, so ist das Fünfseit Polarfünfseit von C^3.* Denn das Fünfseit ist dann folgenden 5 zu C^3 conjugirten K^3 umschrieben, wobei α, β, γ drei beliebige Punkte der Ebene bedeuten:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \varphi(uu)\,u(\alpha) = 0, \quad \varphi(uu)\,u(\beta) = 0, \quad \varphi(uu)\,u(\gamma) = 0.$$

Diese 5 K^3 sind linear independent, denn sonst wären 5 Grössen $k_1, \ldots, k_5$ so bestimmbar, dass:

$$\varphi(uu)\,\{k_1 u(\alpha) + k_2 u(\beta) + k_3 u(\gamma)\} = k_5 \Phi + k_6 \Psi;$$

in der Curvenschaar dritter Classe (Φ, Ψ) existirt aber im Allgemeinen d. h. wenn Φ, Ψ beliebige zu C^3 conjugirte K^3 sind, keine in eine K^2 und einen Punkt zerfallende K^3, so dass die obige Identität nicht statthaben kann. Demnach sind unsere 5 dem Fünfseit a eingeschriebenen K^3 independent und demnach (nach § 1, 7) das Fünfseit Polarfünfseit der C^3. Im Besonderen gilt:

7. *Ist ein Fünfseit a irgend einer zu C^3 apolaren K^2 umschrieben und hat ein Eckenpaar (a_{12}, a_{34}) seine Gegenseite a_5 zur gemischten Polaren in Bezug auf C^3, so ist a Polarfünfseit der C^3.* Denn dann ist a folgenden 5 zu C^3 conjugirten K^3 umschrieben:

---

*) cf. Schlesinger: l. c. 457.

$$\varphi(uu)\,u(\alpha),\quad \varphi(uu)\,u(\beta),\quad \varphi(uu)\,u(\gamma),\quad (ua^1a^2)\,(ua^3a^4)\,(ua^5a^1),$$
$$(ua^1a^2)\,(ua^3a^4)\,(ua^5a^2),$$

(wobei wieder α, β, γ völlig willkürliche Punkte sind). Diese 5 K_3 sind linear unabhängig, denn sonst wäre:

$$\varphi(uu)\left\{k_1 u(\alpha) + k_2 u(\beta) + k_3 u(\gamma)\right\}$$
$$= (ua^1a^2)\,(ua^3a^4)\left\{k_4(ua^5a^1) + k_5(ua^5a^2)\right\} = 0,$$

d. h. $\varphi(uu)$ wäre das Product zweier Linearfactoren, was wir allgemein nicht annehmen dürfen. —

8. Ist eine Ecke z. B. a_{12} eines Polarfünfseits gegeben, so ist nach (3) das complementäre Dreiseit a_{345} Polardreiseit der conischen Polare $f(a_{12}xx) = 0$ in Bezug auf die C^3. Wählen wir irgend ein Polardreiseit von $f(a_{12}xx)$ willkürlich, so wird dadurch über drei Unbestimmtheiten disponirt; dadurch dass wir bereits eine Ecke a_{12} willkürlich annahmen, war bereits über eine zweifache Unbestimmtheit disponirt worden, so dass im Ganzen jetzt über 5 Willkürlichkeiten bei unserem Fünfseit disponirt ist. Wir werden zeigen, dass sich diese Stücke durch ein eindeutig durch a_{12} gelegtes Geradenpaar zu einem Polarfünfseit der $C^3 : f = 0$ ergänzen lassen, so dass wir in der That erkennen, dass wir bei der Auffindung eines Polarfünfseits einer gegebenen C^3 genau über eine fünffache Mannigfaltigkeit disponiren dürfen. Betrachten wir nämlich diejenige eindeutig bestimmte zu C^3 apolare K^2, welche 2 Seiten des Dreiseits a_{345} berührt, so berührt diese auch die dritte Seite, denn diese K^2 ist conjugirt zu jeder C^2 des Polarennetzes, also auch zu $f(a_{12}xx) = 0$; berührt aber eine zu einer C^2 conjugirte K^2 zwei Seiten eines Polardreiseits von C^2, so berührt sie auch die dritte. Die beiden von a_{12} an diese apolare K^2 möglichen Tangenten a_1, a_2 ergänzen nun eindeutig das Dreiseit a_{345} zu einem Polarfünfseit von C^3. In der That ist a_{12345} Polarfünfseit der $C^3 : f = 0$, denn es ist einer zu f apolaren K^2 umschrieben und die Seite a_5 z. B. ist gemischte Polare des Gegeneckenpaares (a_{12}, a_{34}), da a_5 als Seite eines Polardreiseits a_{345} von $f(a^{12}xx) = 0$ Polare von a_{34} in Bezug auf die conische Polare von a_{12} ist. Also gilt: *Nimmt man einen Punkt a_{12} und ein Polardreiseit a_{345} seiner conischen Polaren in Bezug auf eine C^3 willkürlich an, so lässt sich ein Geradenpaar a_1, a_2 durch a_{12} eindeutig so hinzufinden, dass $a_1a_2a_3a_4a_5$ Polarfünfseit der C^3 ist.* — Wir erkennen also hier die Richtigkeit unseres durch Abzählung gewonnenen Satzes (3), dass jede C^3 eine 5-fache Mannigfaltigkeit von Polarfünfseiten besitzt, da wir erkennen, dass man noch über 5 Willkürlichkeiten disponiren kann bei einem Fünfseit, das Polarfünfseit einer gegebenen C^3 werden soll. —

9. *Jedes einer zu C^3 apolaren K^2 umschriebene Dreiseit $a_3a_4a_5$ lässt sich eindeutig zu einem Polarfünfseit von C^3 ergänzen.* Es giebt

bekanntlich in jedem Kegelschnittnetze genau einen Kegelschnitt, welcher einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade zu Pol und Polaren hat; also existirt auch im Polarkegelschnittnetz von C^3 eine C^2, für welche a_{34} und a_5 Pol und Polare sind; ist a_{12} derjenige Punkt, dessen conische Polare unsere C^2 ist, so ergänzen die beiden Tangenten von a_{12} an K_2 das Dreiseit a_{345} zu einem Polarfünfseit der C^3. Denn das so entstehende Fünfseit a ist einer zu C^3 apolaren K^2 umgeschrieben und es ist a_5 die gemischte Polare seines Gegeneckenpaares $a_{12}a_{34}$, also ist nach (7) a Polarfünfseit von C^3. Der Punkt a_{12} ist auch als correspondirender Punkt von a_{34} in der durch das Polarkegelschnittbüschel von a_5 vermittelten Steiner'schen Verwandtschaft nach (5) eindeutig bestimmt. Wir erkennen hieraus, dass man zwei Seiten eines Polarfünfseits willkürlich annehmen kann, denn dann giebt es eine einzige zu C^3 apolare K^2, welche diese beiden Seiten berührt; nimmt man noch eine Tangente dieser K^2 willkürlich an, so erkennt man, dass dann eindeutig ein Geradenpaar gefunden werden kann, welches jene drei Geraden zu einem Polarfünfseit ergänzt. Auch hier ist genau über 5 Willkürlichkeiten verfügt worden, indem wir zwei Geraden willkürlich annehmen und dann eine dritte auf einer bestimmten K^2 beliebig wählten. —

10. *Hält man ein Geradenpaar (z. B. a_1, a_2) eines Polarfünfseits einer C^3 fest, so ist das zu a_{12} complementäre Dreieck a_{345} einem bestimmten Kegelschnitt C^2 einbeschrieben.* Denn es ist a_{345} Polardreiseit der conischen Polaren von a_{12} und gleichzeitig der eindeutig bestimmten apolaren K^2, welche a_1 und a_2 berührt, umgeschrieben. Alle Polardreiseite eines Kegelschnitts, welche einer bestimmten conjugirten K^2 umgeschrieben sind, sind aber einer ganz bestimmten C^2 eingeschrieben*) also sind alle Dreiseite, welche ein Geradenpaar $a_1 a_2$ zu einem Polarfünfseit ergänzen, einer bestimmten allein von a_1, a_2 abhängigen C^2 eingeschrieben. Diese ist aber nichts anderes als der correspondirende Kegelschnitt der Geraden a_1 (oder a_2) in derjenigen Steiner'schen Verwandtschaft, welche das Polarkegelschnittbüschel von a_2 (resp. a_1) vermittelt. Denn es sind die Ecken a_{34}, a_{35}, a_{45} resp. die correspondirenden Punkte von a_{25}, a_{24}, a_{23} in der Steiner'schen Verwandtschaft von a_1, also ist a_{345} dem correspondirenden Kegelschnitt von a_2 eingeschrieben. Man nennt aber den zu einem Geradenpaar gehörigen Kegelschnitt, welcher correspondirender Kegelschnitt der einen Geraden in Bezug auf die Steiner'sche Verwandtschaft der andern ist, *„die gemischte Polokonik des Geradenpaars"*.**) Also gilt: *Ist ein Geradenpaar ge-*

*) cf. Salmon-Fiedler: Kegelschnitte, 4. Aufl, p. 518.

**) cf. Cremona: Curve piane 134; Durège: Curven dritter Ordnung p. 187—189.

geben, so liegen alle Dreiseite, welche dasselbe zu einem Polarfünfseit einer gegebenen C^3 ergänzen, auf der gemischten Polokonik des Geradenpaars in Bezug auf die C^3. — Nimmt man einen Punkt a_{34} dieser gemischten Polokonik von a_1, a_2 willkürlich an, so existirt ein bestimmter Punkt auf $a_1 : a_{15}$, welcher correspondirender Punkt von a_{34} in der zu a_2 gehörigen Steiner'schen Verwandtschaft ist. Zieht man von a_{34} die beiden Tangenten a_3, a_4 und von a_{15} die eine noch übrige Tangente a_5 an die a_1, a_2 berührende apolare K^2, so ist $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ ein Polarfünfseit von C^3 nach (7), denn dieses Fünfseit ist einer apolaren K^2 umgeschrieben und es ist a_2 gemischte Polare von a_{34}, a_{15}. —

11. *Die 10 Seiten zweier Polarfünfseite* (a) *und* (b) *derselben C^3 berühren eine Curve dritter Classe.* Denn es ist:

$$f = \sum_{i=1}^{5} k_i a_i(x)^3 = \sum_{i=1}^{5} l_i b_i(x)^3,$$

also ist für $l_i = - k_{5+i}$:

$$\sum_1^{10} {}^{\varrho}\, k_\varrho a_\varrho(x)^3 = 0,$$

also berühren (nach § 1, 8) die 10 Geraden a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) ein und dieselbe Curve dritter Classe. — *Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ zwei Polarfünfseite derselben $C^3 : f = 0$, welche eine Seite a_5 gemein haben, so bilden die 9 Geraden das gemeinsame Tangentensystem zweier Curven dritter Classe.* Denn aus:

$$f = \sum_1^5 {}^{i}\, k_i a_i(x)^3 = \sum_5^9 {}^{k}\, l_k a_k(x)^3$$

folgt für: $k_5 - l_5 = \bar{k}_5$, $k_i = \bar{k}_i$ ($i = 1 \ldots 4$), $l_k = - \bar{k}_k$ ($k = 6, 7, 8, 9$)

$$\sum_1^9 {}^{\varrho}\, \bar{k}_\varrho a_\varrho(x)^3 = 0,$$

d. h. $a_1, \ldots, a_9$ sind die 9 gemeinsamen Tangenten zweier K^3 nach § 1, 8. — Analog folgt:

Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, $a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ zwei Polarfünfseite derselben C^3, welche ein Seitenpaar gemeinsam haben, so berühren die 8 Geraden $a_1 \ldots a_8$ denselben Kegelschnitt. — Ferner:

Sind $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, $a_5\, a_6\, a_7\, a_8$ zwei Polarvierseite derselben Curve dritter Ordnung f, so berühren ihre 8 Seiten denselben Kegelschnitt, während ihre 12 Ecken auf einer C^3, der Hesse'schen Curve, von f liegen. — Es gilt aber auch: *Wenn die 8 Seiten zweier Vierseite einen Kegelschnitt berühren, so liegen die 12 Ecken derselben auf einer*

Curve dritter Ordnung. Denn seien $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_5 a_6 a_7 a_8$ die Seiten der beiden Vierseite, so besteht nach § 1, 8 die lineare Relation:

$$\sum_1^8{}^i k_i a_i(x)^3 = 0,$$

also ist:

$$f(xxx) = \sum_1^4{}^i k_i a_i(x)^3 = -\sum_5^8{}^i k_i a_i(x)^3$$

d. h. $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_5 a_6 a_7 a_8$ sind Polarvierseite derselben $C^3 : f = 0$, ihre Ecken liegen daher auf einer Curve dritter Ordnung, der Hesse'schen Curve von $f = 0$. —

Die 9 Geraden, welche die Seiten eines Polarvierseits und eines Polarfünfseits derselben $C^3 : f = 0$ bilden, bilden das gemeinsame Tangentensystem zweier Curven dritter Classe. Nach (§ 1, 8), denn zwischen den Cuben der 9 linearen Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichungen unserer 9 Geraden darstellen, besteht eine lineare Identität.

Aus dem letzten Satze ergeben sich höchst einfache Constructionen der 9ten gemeinsamen Tangente zweier K^3 — also, mittels des Princips der Dualität, auch des 9ten Schnittpunkts zweier C^3 —, welche in einem unmittelbar sich anschliessenden Aufsatze ausgeführt werden sollen.

12. *Gemeinsame Polarfünfseite zweier Curven dritter Ordnung.* Damit ein Fünfseit a_{12345} Polarfünfseit einer gegebenen Curve dritter Ordnung sei, waren von demselben nach 2 p. 544 fünf Bedingungen zu erfüllen, so dass die Abzählung ergiebt, dass genau 10 Bedingungen zu erfüllen sind, damit ein Fünfseit a gemeinsames Polarfünfseit *zweier* Curven dritter Ordnung C^3 und C'^3 mit den resp. Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$ sei. Da in der Ebene eine genau zehnfache Mannigfaltigkeit von Fünfseiten existirt, man also im Allgemeinen einem Fünfseit 10 Bedingungen auferlegen kann, so lässt hier die Abzählung erwarten, dass es eine endliche Anzahl gemeinsamer Polarfünfseite zweier Curven dritter Ordnung geben wird. Es tritt jedoch auch hier einer der in der Geometrie so häufigen Fälle ein, dass das von der Abzählung vorausgesagte Resultat sich nicht bestätigt. In unserem Falle wird es sich nämlich herausstellen, dass, obwohl das Problem als ein vollständig bestimmtes erscheint, zwei Curven dritter Ordnung im Allgemeinen *kein* gemeinsames Polarfünfseit besitzen, sondern dass dazu nothwendig, aber auch hinreichend das Verschwinden einer gewissen simultanen Invariante ist. Verschwindet diese Invariante, so existirt eine einfache Mannigfaltigkeit der gewünschten Polarfünfseite. —

Damit a_{12345} gemeinsames Polarfünfseit von $f = 0$, $f' = 0$ sei, muss nach 4. p. 545 die K^2, welche a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 berührt, zu

$f=0$ und $f'=0$ apolar sein. Es müsste also diese K^2 gleichzeitig zwei K^2-Netzen angehören. Zwei K^2-Netze haben aber im Allgemeinen kein gemeinsames Element, sondern dazu ist das Verschwinden einer Invariante nothwendig. Damit nämlich eine K^2:

$$\varphi(uu)=\sum_{i,k}\alpha_{ik}u_i u_k=0 \quad (i,k=1,2,3)$$

zu:

$$f=\sum_{i,k,l}a_{ikl}x_i x_k x_l=0$$

und

$$f'=\sum_{i,k,l}a'_{ikl}x_i x_k x_l=0 \quad (i,k,l=1,2,3)$$

apolar sei, ist nothwendig und hinreichend (nach § 1, 5):

$$\left.\begin{array}{lll}\sum_{i,k}a_{ik1}\alpha_{ik}=0, & \sum_{i,k}a_{ik2}\alpha_{ik}=0, & \sum_{i,k}a_{ik3}\alpha_{ik}=0\\ \sum_{i,k}a'_{ik1}\alpha_{ik}=0, & \sum_{i,k}a'_{ik2}\alpha_{ik}=0, & \sum_{i,k}a'_{ik3}\alpha_{ik}=0\end{array}\right\}(i,k=1,2,3).$$

Damit aber 6 Grössen α_{ik} $(i,k=1,2,3,\ \alpha_{ik}=\alpha_{ki})$ existiren, welche diese 6 Gleichungen befriedigen, ist nothwendig und hinreichend, dass die Invariante:

$$P=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{221} & a_{331} & a_{231} & a_{311} & a_{121}\\ a_{112} & a_{222} & a_{332} & a_{232} & a_{312} & a_{122}\\ a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{233} & a_{313} & a_{123}\\ a'_{111} & a'_{221} & a'_{331} & a'_{231} & a'_{311} & a'_{121}\\ a'_{112} & a'_{222} & a'_{332} & a'_{232} & a'_{312} & a'_{122}\\ a'_{113} & a'_{223} & a'_{333} & a'_{233} & a'_{313} & a'_{123}\end{vmatrix}$$

verschwindet. Ist diese Determinante Null, so sind die Grössen α_{ik} im Allgemeinen eindeutig bestimmbar, und es giebt daher, wenn $P=0$, eine einzige zu $f=0$ und $f'=0$ gemeinsame apolare K^2. Damit also 2 Curven dritter Ordnung ein gemeinsames Polarfünfseit besitzen, ist das Verschwinden der simultanen Invariante P erforderlich. Also gilt: *Zwei allgemeine Curven dritter Ordnung besitzen kein gemeinsames Polarfünfseit.* —

Wir zeigen nun, dass die Bedingung $P=0$ für die Existenz eines gemeinsamen Polarfünfseits zweier C^3 auch ausreicht, und dass sogar für zwei C^3, für welche $P=0$ ist, eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarfünfseite existirt. Damit ist auch gleichzeitig eine geometrische Interpretation für das Verschwinden der Invariante P erlangt. Ist also $P=0$, so erkennen wir, dass dann eine einzige zu $f=0$, $f'=0$ gemeinsame apolare K^2 existirt, dieser muss ein eventuell

existirendes gemeinsames Polarfünfseit von $f=0$ und $f'=0$ umgeschrieben sein. Wählen wir nun eine Tangente a_1 dieser K^2 beliebig, so werden die Gegeneckenpaare $(a_{23}a_{45}, a_{24}a_{35}, a_{25}a_{34})$ desjenigen Vierseits, welches a_1 zu dem gesuchten Polarfünfseit ergänzt, correspondirende Punktepaare sein derjenigen beiden Steiner'schen Verwandtschaften (nach 5, p. 545), welche vermittelt werden durch die beiden zu a_1 in Bezug auf $f=0$ und $f'=0$ zugehörigen Polarkegelschnittbüschel; sie werden also in Bezug auf 4 Kegelschnitte conjugirte Punktepaare sein. Vier Kegelschnitte besitzen aber genau 3 Paare gemeinsamer conjugirter Punkte, welche die Gegeneckenpaare eines Vierseits sind, nämlich des einzigen den 4 Kegelschnitten gemeinsamen Polarvierseits. Jenes Vierseit wird a_1 zu dem gesuchten gemeinsamen Polarfünfseit von $f=0$, $f'=0$ ergänzen. Denn zieht man von einem Gegeneckenpaare desselben z. B. von a_{23}, a_{45} die 4 Tangenten a_3, a_4, a_5, a_6 an unsere zu $f=0$, $f'=0$ apolare K^2, so wird das so entstehende Fünfseit $a_1a_2a_3a_4a_5$ ein gemeinsames Polarfünfseit von $f=0$, $f'=0$ sein. Denn da a_{23}, a_{45} ein in Bezug auf die beiden Polarkegelschnittbüschel von a_1 conjugirtes Punktepaar ist, so ist a_1 sowohl in Bezug auf $f=0$, als auf $f'=0$ die gemischte Polare von a_{23}, a_{45}; ferner ist das Fünfseit a der zu $f=0$ und $f'=0$ apolaren K^2 umgeschrieben, folglich ist (nach 7, p. 545) unser Fünfseit Polarfünfseit von $f=0$ und auch von $f'=0$. Es sind folglich auch $a_{24}a_{35}$ und $a_{25}a_{34}$ correspondirende Punktepaare der beiden zu a_1 gehörigen Steiner'schen Verwandtschaften; wir sahen, es giebt solcher Paare im Ganzen überhaupt nur drei, welche die Gegeneckenpaare des den beiden zu a_1 gehörigen Polarkegelschnittbüscheln gemeinsamen Polarvierseits bilden, folglich ist das gefundene Vierseit a_{2345} nothwendig dieses gemeinsame Polarvierseit der beiden zu a_1 gehörigen Polarkegelschnittbüschel. Dieses gemeinsame Polarvierseit ergänzt also eindeutig die Gerade a_1 zu einem gemeinsamen Polarfünfseit von $f=0$ und $f'=0$. Dass dieses Polarvierseit unserer zu $f=0$, $f'=0$ apolaren K^2 umgeschrieben ist, geht daraus hervor, dass es der K^2-Schaar umgeschrieben ist, welche zu den beiden Polarkegelschnittbüscheln von a_1 conjugirt ist; dieser Schaar gehört aber nothwendig unsere apolare K^2 an, denn diese ist conjugirt zu allen Polarkegelschnitten von $f=0$ und $f'=0$, mithin ist das gemeinsame Polarvierseit der apolaren K^2 umgeschrieben. Wir sind also zu folgenden Resultaten gelangt:

Ist die simultane Invariante P zweier $C^3: f=0$, $f'=0$ gleich Null, so existirt eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarfünfseite von $f=0$, $f'=0$, welche sämmtlich der in diesem Falle vorhandenen gleichzeitig zu $f=0$ und $f'=0$ apolaren K^2 umgeschrieben sind. Zu jeder Tangente dieser K^2 gehört ein eindeutig bestimmbares

Vierseit, welches jene Tangente zu einem gemeinsamen Polarfünfseit von $f = 0$, $f' = 0$ ergänzt. Dieses Vierseit ist das gemeinsame Polarvierseit der beiden zu jener Tangente gehörigen Polarkegelschnittbüschel. Daraus ergiebt sich:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz gemeinsamer Polarfünfseite zweier Curven dritter Ordnung ist das Verschwinden der simultanen Invariante P. —

Aus dem eben bewiesenen geht hervor, dass es unmöglich ist einen beliebigen Punkt der Ebene als Ecke eines gemeinsamen Polarfünfseits zweier C^3 mit $P = 0$ zu wählen. Denn da ein solches stets der zu $f = 0$, $f' = 0$ apolaren K^2 umgeschrieben ist, so wären bei beliebiger Annahme einer Ecke die beiden von dieser an K^2 gezogenen Tangenten sicher Seiten des gesuchten Polarfünfseits. Nach unserer Construction liegen aber auf jeder Tangente von K^2 genau 4 Punkte, welche Ecken des einzigen möglichen Polarfünfseits sind, welches jene Tangente zur Seite hat, so dass sicher nicht jeder beliebige Punkt dieser Tangente, sondern eben nur jene 4 ganz bestimmten Punkte, Ecken eines gemeinsamen Polarfünfseits sein können. Daraus folgt, dass ein Punkt, um Ecke eines gemeinsamen Polarfünfseits sein zu können, eine specielle Lage haben muss, dass also jene einfache Mannigfaltigkeit von Ecken gemeinsamer Polarfünfseite auf einer bestimmten Curve liegen muss. Diese Curve wird von der vierten Ordnung sein, denn auf jeder Tangente der apolaren K^2 liegen genau 4 Punkte dieser Curve. Lässt man eine Gerade u alle Tangenten dieser K^2 durchlaufen, so werden bei jeder Lage von u stets 4 Punkte auf u fixirt werden, die Ecken unserer gemeinsamen Polarfünfseite, die so die obige C^4 beschreiben. Daraus ergiebt sich:

Die einfache Mannigfaltigkeit der gemeinsamen Polarfünfseite zweier C^3 mit $P = 0$ ist einer K^2 umgeschrieben und gleichzeitig einer Curve vierter Ordnung eingeschrieben.

§ 3.

Die Polarsechsseite einer Curve dritter Ordnung.

Sind $a_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ die Gleichungen der 6 Geraden a_i $(i = 1, \ldots, 6)$, so wird das von diesen 6 Geraden gebildete Sechsseit a ein Polarsechsseit der C^3:

$$f(xxx) = \sum_{(i,k,l=1,2,3)} a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$$

sein, wenn sich 6 Grössen k_i $(i = 1, \ldots, 6)$ so auffinden lassen, dass:

$$f(xxx) = \sum_{1}^{6}{}_i\, k_i\, a_i(x)^3$$

wird. Wir wollen jede Seite (z. B. a_1) zu demjenigen Fünfseit (a_{23456}) des Sechsseits *„complementär“* nennen, welches jene Seite zu dem Sechsseit a ergänzt; ebenso jede Ecke (z. B. a_{12}) *complementär* zu demjenigen Vierseit (a_{3456}), welches von den 4 jene Ecke nicht enthaltenden Seiten gebildet wird. Schliesslich sollen 3 Ecken a_{ik}, a_{lm}, a_{no} ein *„Eckentripel“* heissen, wenn von den 6 Indices i, k, l, m, n, o keine zwei einander gleich sind (z. B. $a_{14} a_{23} a_{56}$). Nun gilt:

1) *Ist a ein Polarsechsseit der $C^3: f=0$, so bildet jedes Eckentripel ein conjugirtes Dreieck von $f=0$.* Denn jedes Eckentripel lässt sich als eine in 3 Punkte ausgeartete, dem Sechsseit a eingeschriebene K^3 auffassen, welche nach § 1, 7 zu f conjugirt ist, so dass nach § 1, 3 das Eckentripel ein zu f conjugirtes Dreieck bildet.

2) Sind demnach nach (1) *alle* 15 Eckentripel eines Polarsechsseits von C^3 conjugirte Dreiecke der C^3, so *genügt* es jedoch schon, wenn 4 unabhängige Eckentripel in Bezug auf die C^3 conjugirt sind, um für die übrigen das Gleiche zu folgern. Denn die 6 unabhängigen $C^3: a_i(x)^3$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$ bilden eine 6-gliedrige Gruppe, die sämmtlichen ihnen conjugirten K^3 bilden also nach (§ 1, 3) eine 4-gliedrige Gruppe, dieser gehören die sämmtlichen Eckentripel, als zerfallende K^3 aufgefasst an, so dass, sobald 4 linear unabhängige Eckentripel in Bezug auf eine C^3 conjugirt sind, auch die übrigen conjugirt sind; es ergiebt sich demnach: *Sämmtliche Eckentripel eines Sechsseits bilden conjugirte Dreiecke einer C^3, sobald 4 linear unabhängige dies thun.* Dieser Satz bildet das Analogon zu dem bekannten Satze von Hesse, dass in einem Vierseit, in welchem 2 Paar Gegenecken in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt sind, auch das dritte Gegeneckenpaar conjugirt ist.

Dass es bei einem Sechsseit, bei welchem nie 3 Seiten durch einen Punkt gehen, wirklich stets 4 unabhängige Eckentripel giebt, beweisen wir, indem wir 4 solche wirklich angeben. Betrachten wir nämlich z. B. die 4 Eckentripel: (a_{12}, a_{34}, a_{56}), (a_{12}, a_{35}, a_{46}), (a_{13}, a_{24}, a_{56}), (a_{13}, a_{25}, a_{46}), so müssten im Falle ihrer linearen Abhängigkeit k_1, k_2, k_3, k_4 sich so bestimmen lassen, dass:

$$k_1(u a_1 a_2)(u a_3 a_4)(u a_5 a_6) + k_2(u a_1 a_2)(u a_3 a_5)(u a_4 a_6)$$
$$+ k_3(u a_1 a_3)(u a_2 a_4)(u a_5 a_6) + k_4(u a_1 a_3)(u a_2 a_5)(u a_4 a_6) = 0$$

wird für jeden Werth von u_1, u_2, u_3. Setzen wir für u_1, u_2, u_3 die Coordinaten der Geraden, welche a_{12} und a_{56} verbindet, so müssen entweder: a_{12}, a_{56}, a_{13} oder a_{12}, a_{56}, a_{25} oder a_{12}, a_{56}, a_{46} in gerader Linie liegen. Der erste Fall kann nicht eintreten, da die Verbindungslinie von a_{12} mit a_{13}, d. i. die Gerade a_1, die Ecke a_{56} nicht enthalten kann, da sonst gegen die Voraussetzung die 3 Seiten a_1, a_5, a_6 des Sechsseits durch einen Punkt gingen. Analoges gilt für die beiden

andern Möglichkeiten, also muss $k_4 = 0$ sein, dann ist aber auch $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ d. h. die 4 Eckentripel sind linear unabhängig. Jede C^3, welche diese 4 Eckentripel zu conjugirten Dreiecken hat, hat auch alle übrigen zu conjugirten Dreiecken. Dass nicht immer 4 Eckentripel des Sechsseits linear unabhängig sind, erkennen wir daraus, dass z. B. zwischen 3 Eckentripeln, welche gebildet werden von den 3 Gegeneckenpaaren eines Vierseits des Sechsseits und der complementären Ecke des Vierseits, also z. B. (a_{12}, a_{34}, a_{56}), (a_{13}, a_{24}, a_{56}), (a_{14}, a_{23}, a_{56}), offenbar eine lineare Identität besteht. —

3) *Ein gegebenes Sechsseit a ist Polarsechsseit einer gegebenen Curve dritter Ordnung $f = 0$, wenn 4 unabhängige Eckentripel conjugirte Dreiecke der Curve sind.* Denn diese 4 Eckentripel liefern 4 linear unabhängige, nach § 1, 3 zu f conjugirte, dem Sechsseit eingeschriebene K^3, (welche in 3 Punkte ausgeartet sind), mithin ist nach § 1, 7 das Sechsseit Polarsechsseit von $f = 0$.

4) Damit ein Sechsseit Polarsechsseit einer C^3 sei, muss dasselbe 4 Bedingungen erfüllen, da 4 independente Eckentripel desselben — und solcher giebt es nach (2) stets — conjugirte Dreiecke der C^3 sein müssen. Da die Ebene im Ganzen eine 12-fache Mannigfaltigkeit von Sechsseiten besitzt, so lehrt demnach die Abzählung, *dass jede C^3 eine genau achtfache Mannigfaltigkeit von Polarsechsseiten besitzt*, ein Resultat, das wir unten durch directe Construction derselben bestätigen werden.

5) In analoger Weise, wie beim Polarfünfseit, folgt durch Polarenbildung: *Jedes Vierseit eines Polarsechsseits ist Polarvierseit der conischen Polaren der complementären Ecke. Jedes Fünfseit eines Polarsechsseits ist Polarfünfseit des Polarkegelschnittbüschels der complementären Seite*, d. h. die diesem Fünfseit eingeschriebene K^2 ist jenem Polarenbüschel conjugirt. —

6) Die Abzählung lehrte, dass eine gegebene C^3 eine achtfache Mannigfaltigkeit von Polarsechsseiten besitzt, wir werden daher an ein Sechsseit, welches Polarsechsseit einer gegebenen C^3 werden soll, noch acht weitere Forderungen stellen dürfen. Nehmen wir z. B. ein Vierseit a_1, a_2, a_3, a_4 des Sechsseits beliebig gegeben an, so ist genau über eine achtfache Mannigfaltigkeit disponirt, und wir suchen nun ein Geradenpaar, welches dieses Vierseit zu einem Polarsechsseit der C^3 ergänzt. Wir werden erkennen, dass dieses Geradenpaar nur auf eine Weise gefunden werden kann, dass sich also ein gegebenes Vierseit *eindeutig* zu einem Polarsechsseit von C^3 ergänzen lässt. Zunächst ist der Schnittpunkt a_{56} (nach 1, § 3) des gesuchten Geradenpaares a_5, a_6 derjenige Punkt, in welchem die gemischten Polaren der 3 Gegeneckenpaare des Vierseits sich schneiden. In der That schneiden sich die 3 gemischten Polaren der 3 Gegeneckenpaare eines Vierseits

stets in einem Punkte, da der Schnittpunkt von zweien derselben nach dem Hesse'schen Satze auch mit dem dritten Paare ein conjugirtes Dreieck bildet, also auf der gemischten Polaren desselben liegt. Zu jedem Vierseit gehört daher stets ein ganz bestimmter Punkt, der Schnittpunkt der gemischten Polaren der 3 Gegeneckenpaare. Im Allgemeinen wird dieser Punkt auf keiner der 4 Seiten des Vierseits liegen, sondern es wird, damit dies eintrete, das Vierseit eine besondere Lage besitzen, da eine bestimmte Bedingung dazu erfüllt sein muss. Wir wollen von vornherein unser Vierseit so gewählt denken, dass der obige Schnittpunkt der 3 gemischten Polaren der 3 Gegeneckenpaare in keine der Seiten des Vierseits fällt; sonst nämlich würden wir kein eigentliches Sechsseit erhalten, in welchem keine drei Seiten durch einen Punkt gehen. — Betrachten wir nun die Ecke a_{12}, so ist ihr complementäres Vierseit a_{3456} (nach 5) a. v. S.) Polarvierseit der conischen Polare von a_{12}, welche uns bekannt ist. Von diesem Vierseit a_{3456} ist uns gegeben das Seitenpaar a_3, a_4 und die Gegenecke a_{56}. Nun gilt aber: Alle Geradenpaare a_5, a_6 durch a_{56}, welche ein gegebenes Geradenpaar a_3, a_4 zu einem Polarvierseit eines gegebenen Kegelschnitts ergänzen, bilden die Geradenpaare einer Involution. (Der Beweis dieses Hülfssatzes folgt am Schlusse dieser Deduction.) Das gesuchte Geradenpaar a_5, a_6 gehört also einer gegebenen Involution durch a_{56} an; denn es ist uns diese Involution vollständig bekannt, da wir beliebig viele Geradenpaare derselben construiren können. — Betrachten wir nun das Vierseit a_{2456}, so ist dasselbe Polarvierseit der uns bekannten conischen Polaren von a_{13}; von diesem sind uns ebenfalls 2 Seiten a_2, a_4 und die Gegenecke a_{56} ihres Schnittpunktes bekannt. Es bilden demnach alle Geradenpaare durch a_{56}, welche a_{24} zu einem Polarvierseit der conischen Polaren von a_{13} ergänzen, die Strahlenpaare einer bekannten zweiten Involution durch a_{56}. Es sind daher die gesuchten Geraden a_5, a_6 auch ein Strahlenpaar dieser zweiten bekannten Involution. Das gesuchte Geradenpaar ist also diesen beiden bekannten Involutionen gemeinsam. 2 concentrische Strahleninvolutionen besitzen aber bekanntlich genau *ein* gemeinsames Strahlenpaar. Dasselbe sei mit a_5, a_6 bezeichnet, es ergänzt in der That das gegebene Vierseit zum Polarsechsseit von $C_3{}^3$. Denn in dem so entstehenden Sechsseite, sind die 4 Eckentripel:

$$(a_{12}, a_{34}, a_{56}),\ (a_{12}, a_{35}, a_{46}),\ (a_{13}, a_{24}, a_{56}),\ (a_{13}, a_{25}, a_{46})$$

conjugirte Dreiecke der C^3; diese 4 Tripel sind aber linear unabhängig, wie wir bereits p. 553 bewiesen haben. Folglich ist nach 3. p. 554 das erhaltene Sechsseit Polarsechsseit der C^3, damit ist bewiesen: *Jedes Vierseit lässt sich durch ein eindeutig bestimmtes Geradenpaar zu einem Polarsechsseit einer gegebenen C^3 ergänzen.* Hiermit ist auch

direct die in 4. p. 554 durch Abzählung gefundene Thatsache bestätigt, dass eine C^3 eine genau 8-fache Mannigfaltigkeit von Polarsechsseiten besitzt. —

Es bleibt noch übrig den bei unserer Construction benutzten Hülfssatz nachzuweisen, dass jedes Geradenpaar $a_3\,a_4$, welches ein gegebenes Geradenpaar $a_1\,a_2$ zu einem Polarvierseit eines gegebenen Kegelschnitts ergänzt, und dessen Schnittpunkt a_{34} ein ganz bestimmter zu a_{12} conjugirter Punkt ist, einer bestimmten Involution angehört. Denn sind a_3, a_4 und a_3', a_4' zwei Geradenpaare durch den zu a_{12} in Bezug auf den Kegelschnitt $F(xx) = 0$ conjugirten Punkt a_{34}, welche mit a_1, a_2 zusammen je ein Polarvierseit von $F = 0$ bilden, so ist:

$$F(xx) = k_1 a_1(x)^2 + k_2 a_2(x)^2 + k_3 a_3(x)^2 + k_4 a_4(x)^2$$
$$= l_1 a_1(x)^2 + l_2 a_2(x)^2 + l_3 a_3'(x)^2 + l_4 a_4'(x)^2,$$

also:

$$(1) \qquad (k_1 - l_1)\, a_1(x)^2 + (k_2 - l_2)\, a_2(x)^2$$
$$= l_3 a_3'(x)^2 + l_4 a_4'(x)^2 - k_3 a_3(x)^2 - k_4 a_4(x)^2;$$

durch Polarisation folgt:

$$(k_1 - l_1)\, a_1(x)\, a_1(y) + (k_2 - l_2)\, a_2(x)\, a_2(y)$$
$$= l_3 a_3'(x)\, a_3'(y) + l_4 a_4'(x)\, a_4'(y) - k_3 a_3(x)\, a_3(y) - k_4 a_4(x)\, a_4(y).$$

Für y_1, y_2, y_3 setzen wir die Subdeterminanten von $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$, das sind die Coordinaten des auf a_3, a_4, a_3', a_4' liegenden Punktes a_{34}, dann wird:

$$(k_1 - l_1)\,(a_1 a_3 a_4)\, a_1(x) + (k_2 - l_2)\,(a_2 a_3 a_4)\, a_2(x) = 0,$$

also:

$$(k_1 - l_1)\,(a_1 a_3 a_4) = 0, \qquad (k_2 - l_2)\,(a_2 a_3 a_4) = 0,$$

und da

$$(a_1 a_3 a_4) \neq 0, \qquad (a_2 a_3 a_4) \neq 0,$$

so folgt:

$$k_1 = l_1, \quad k_2 = l_2.$$

Also wird (1) zu:

$$(2) \qquad k_3 a_3(x)^2 + k_4 a_4(x)^2 = l_3 a_3'(x)^2 + l_4 a_4'(x)^2,$$

und dies gilt für jedes weitere Strahlenpaar a_3'', a_4'' durch a_{34}, welches a_1, a_2 zu einem Polarvierseit von $F = 0$ ergänzt, also ist:

$$k_3 a_3(x)^2 + k_4 a_4(x)^2 = l_3 a_3'(x)^2 + l_4 a_4'(x)^2 = m_3 a_3''(x)^2 + m_4 a_4''(x)^2 = \cdots$$

d. h. (a_3, a_4), (a_3', a_4'), (a_3'', a_4''), … sind Strahlenpaare einer Involution. —

7) *Sind zwei Vierseite eines Sechsseits, welche 3 Seiten gemeinsam haben, Polarvierseite der conischen Polaren ihrer rsp. Gegenecken in Bezug auf eine C^3, so ist das Sechsseit Polarsechsseit der C^3.* Der Beweis folgt aus der vorausgehenden Construction. —

8) Betrachten wir die einem Fünfseit eines Polarsechsseits von $f=0$ eingeschriebene K^2, so bildet dieselbe mit jedem Punkte der complementären Seite des Fünfseits eine K^3, welche dem Polarsechsseit eingeschrieben ist, und daher (nach § 1, 7) zu $f=0$ conjugirt ist. Die einem Fünfseit eines Polarsechsseits einer C^3 eingeschriebene K^2 bildet daher mit allen Punkten der complementären Seite des Fünfseits eine zu C^3 conjugirte K^3; also ist (nach § 1, 4) diese complementäre Seite die Polargerade der dem zugehörigen Fünfseit eingeschriebenen K^2. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus dem Umstand, dass das Fünfseit (nach 5, p. 554) Polarfünfseit des Polarkegelschnittbüschels der complementären Seite ist, also ist die dem Fünfseit eingeschriebene K^2 dem Büschel conjugirt, demnach ist nach (§ 1, 4) die complementäre Seite die Polargerade von K^2. Also gilt:

In jedem Polarsechsseit ist jede Seite die Polargerade der dem complementären Fünfseit eingeschriebenen K^2. Diese K^2 soll in der Folge die zu jener Seite *„complementäre* K^2*“* heissen. —

Hieraus resultirt eine sehr übersichtliche Construction eines Polarsechsseits a von C^3, von welchem vier Seiten a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sind. Da nämlich a_1 die Polargerade der dem complementären Fünfseit $a_2a_3a_4a_5a_6$ eingeschriebenen K^2 ist, so ist diese K^2 der dem Polarkegelschnittbüschel von a_1 conjugirten viergliedrigen K^2-Gruppe angehörig; und da sie 3 bekannte Gerade a_2, a_3, a_4 berührt, so ist diese K^2 eindeutig bestimmt; das gesuchte Geradenpaar liegt also auf einer bekannten K^2. Andererseits ist ebenso die dem Fünfseit $a_1a_3a_4a_5a_6$ eingeschriebene K^2 bekannt, denn diese gehört der dem Polarkegelschnittbüschel von a_2 conjugirten 4-gliedrigen K^2-Gruppe an und berührt die 3 bekannten Geraden a_1, a_3, a_4; auch auf dieser bekannten K^2 müssen a_5, a_6 liegen, es sind daher a_5, a_6 diejenigen beiden gemeinsamen Tangenten der beiden bekannten K^2, welche von a_3, a_4 verschieden sind. Man erkennt also auch hier, dass sich zu jedem Vierseit eindeutig ein Geradenpaar bestimmen lässt, welches das Vierseit zu einem Polarsechsseit einer gegebenen C^3 ergänzt. Dass in der That das entstandene Sechsseit Polarsechsseit der gegebenen C^3 ist, ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

9) *Sind in einem beliebigen Sechsseit zwei Geraden (z. B.* a_1, a_2*) die Polargeraden der den rsp. complementären Fünfseiten eingeschriebenen* K^2 *in Bezug auf eine gegebene* C^3*, so ist auch für die 4 übrigen Geraden dasselbe der Fall, und das Sechsseit ist Polarsechsseit der Curve III. Ordnung.* Denn in diesem Falle sind, wenn α^1, β^1 und α^2, β^2 zwei beliebige Punktepaare auf rsp. a_1, a_2 bedeuten, die 4 speciellen K^3:

$$\varphi(uu)\,u(\alpha^1),\quad \varphi(uu)\,u(\beta^1),\quad \psi(uu)\,u(\alpha^2),\quad \psi(uu)\,u(\beta^2),$$

wo $\varphi(uu)=0$, $\psi(uu)=0$ die Gleichungen der den zu rsp. a_1, a_2

complementären Fünfseiten eingeschriebenen K^2 bedeuten, dem Sechsseit eingeschrieben. Diese $4K^3$ sind aber linear unabhängig, denn wäre:

$$k_1\varphi(uu)\,u(\alpha^1) + k_2\varphi(uu)\,u(\beta^1) + k_3\psi(uu)\,u(\alpha^2) + k_4\psi(uu)\,u(\beta^2) = 0,$$

so wäre:

$$\varphi(uu)\{k_1 u(\alpha^1) + k_2 u(\beta^1)\} = \psi(uu)\{-k_3 u(\alpha^2) - k_4 u(\beta^2)\},$$

also müsste $\varphi(uu) = \psi(uu)$ sein d. h. die 6 Seiten a_i $(i = 1 \ldots 6)$ wären einer K^2 umgeschrieben, was wir bei einem allgemeinen Sechsseit nicht voraussetzen dürfen. Also ist nothwendig

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

die 4 K^3 sind linear unabhängig; dieselben sind aber dem Sechsseit eingeschrieben, also ist nach § 1, 7 das Sechsseit ein Polarsechsseit der C^3. —

10) Unsere in (8) gegebene Construction desjenigen Geradenpaares, welches ein gegebenes Vierseit zu einem Polarsechsseit von C^3 ergänzt, wird also nur dann versagen, wenn die beiden von uns benutzten K^2: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche rsp. a_2, a_3, a_4 und a_1, a_3, a_4 berührten, identisch werden; dann aber muss diese K^2 durch a_1, a_2, a_3, a_4 gehen und zu C^3 *apolar* sein, da sie den beiden viergliedrigen K^2-Gruppen, welche den Polarkegelschnittbüscheln von a_1 und a_2 conjugirt sind, gleichzeitig angehört, und alle diesen beiden Gruppen gemeinsamen K^2 zu C^3 apolar sind. Wählen wir also unser Vierseit a_1, a_2, a_3, a_4 so, dass keine der ihm eingeschriebenen K^2 zu C^3 apolar ist — was also bei einem allgemeinen Vierseit stets der Fall ist —, so wird die von uns angegebene Construction stets ausführbar sein. —

Ist hingegen das Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ so gewählt, dass es einer zu C^3 apolaren K^2 umgeschrieben ist, so ist jedes Polarsechsseit, zu welchem sich dasselbe ergänzen lässt, dieser K^2 umgeschrieben*), und

---

*) Denn ergänzt z. B. a_5, a_6 dieses Vierseit zu einem Polarsechsseit von $f = 0$, so dass

$$f = \sum_1^6 {}_i\, k_i a_i(x)^3,$$

so ist, da $\varphi = 0$ apolar zu f (nach § 1, 5):

$$k_1\varphi(a_1a_1)a_{1l} + k_2\varphi(a_2a_2)a_{2l} + k_3\varphi(a_3a_3)\,a_{3l} + k_4\varphi(a_4a_4)\,a_{4l} + k_5\varphi(a_5a_5)\,a_{5l}$$
$$+ k_6\varphi(a_6a_6)\,a_{6l} = 0, \qquad (l = 1, 2, 3)$$

und da a_1, a_2, a_3, a_4 die $K^2 : \varphi = 0$ berühren, so ist:

$$\varphi(a_1a_1) = \varphi(a_2a_2) = \varphi(a_3a_3) = \varphi(a_4a_4) = 0,$$

also ist:

$$k_5 a_{51}\varphi(a_5a_5) + k_6 a_{61}\varphi(a_6a_6) = 0, \qquad k_5 a_{52}\varphi(a_5a_5) + k_6 a_{62}\varphi(a_6a_6) = 0,$$
$$k_5 a_{53}\varphi(a_5a_5) + k_6 a_{63}\varphi(a_6a_6) = 0,$$

und da $a_{51} : a_{52} : a_{53} \neq a_{61} : a_{62} : a_{63}$, so ist nothwendig: $\varphi(a_5a_5) = 0$, $\varphi(a_6a_6) = 0$, d. h. das Sechsseit ist der $K^2 : \varphi = 0$ umgeschrieben.

es existirt in diesem Falle eine einfache Mannigfaltigkeit von Geradenpaaren a_5, a_6, welche das Vierseit zu einem Polarsechsseit von C^3 ergänzen. Nimmt man nämlich noch eine weitere Tangente a_5 unserer K^2 willkürlich an, so schneidet die gemischte Polare eines Gegeneckenpaares z. B. von a_{12}, a_{34} des Vierseits die Gerade a_5 in einem Punkte a_{56}, dessen zweite an K^2 gezogene Tangente a_6 die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 zu einem Polarsechsseit von C^3 ergänzt. Denn dem so entstandenen Sechsseit a sind folgende vier zu C^3 conjugirte K^3 eingeschrieben, (α, β, γ bedeuten 3 willkürliche Punkte, $\varphi = 0$ ist die Gleichung unserer apolaren K^2):

$$\varphi(uu)\, u(\alpha),\quad \varphi(uu)\, u(\beta),\quad \varphi(uu)\, u(\gamma),\quad (ua_1a_2)\,(ua_3a_4)\,(ua_5a_6);$$

diese $4 K^3$ sind offenbar linear unabhängig, wenn φ nicht das Product zweier Linearfactoren ist, was wir stets vermeiden können, also ist (nach § 1, 7) das Sechsseit a Polarsechsseit der C^3. Wir sind somit zu dem von Herrn F. Meyer bewiesenen Satze gelangt*): *Fünf beliebige Tangenten einer zu C^3 apolaren K^2 lassen sich eindeutig zu einem Polarsechsseit von C^3 ergänzen.* — Herr F. Meyer giebt a. a. O. auch eine weitere Ausführung der auf Polarsechsseite, die einer apolaren K^2 umgeschrieben sind, bezüglichen Sätze.

§ 4.

Die gemeinsamen Polarsechsseite zweier Curven dritter Ordnung.

Seien gegeben zwei Curven dritter Ordnung C^3 und C'^3 mit den Gleichungen

$$f = \sum_{i,k,l} a_{ikl}\, x_i\, x_k\, x_l = 0, \qquad f' = \sum_{i,k,l} a'_{ikl}\, x_i\, x_k\, x_l = 0,$$
$$(i, k, l = 1, 2, 3),$$

es soll untersucht werden, ob Sechsseite $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ existiren, welche gleichzeitig Polarsechsseite von $f = 0$ und $f' = 0$ sind, so dass also:

$$f = \sum_1^6{}^i\, k_i a_i(x)^3, \qquad f' = \sum_1^6{}^i\, k'_i\, a_i(x)^3.$$

Damit ein Sechsseit a Polarsechsseit einer gegebenen C^3 sei, musste dasselbe 4 Bedingungen erfüllen; damit es gemeinsames Polarsechsseit zweier C^3 werde, sind demnach 8 Bedingungen zu erfüllen nöthig, wodurch aus der 12-fachen Mannigfaltigkeit von Sechsseiten, die in der Ebene vorhanden sind, eine vierfache Mannigfaltigkeit herausgehoben wird. Nimmt man daher 2 Seiten a_1, a_2 des Sechsseits willkürlich an, so ist dadurch über eine vierfache Mannigfaltigkeit ver-

*) cf. F. Meyer: Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883, p. 227.

fügt, und die Abzählung giebt uns demnach an, dass zu diesem Geradenpaare in endlicher Anzahl Vierseite gefunden werden können, welche a_1, a_2 zu einem gemeinsamen Polarsechsseit von C^3 und C'^3 ergänzen. Wir werden zeigen, dass uns die Abzählung in der That richtig gewiesen hat, und dass sich ein gegebenes Geradenpaar a_1, a_2 sogar *eindeutig* zu einem gemeinsamen Polarsechsseit von C^3 und C'^3 ergänzen lässt. Damit a_1 und a_2 Seiten eines gemeinsamen Polarsechsseits von C^3 und C'^3 seien, müssen a_1 und a_2 die Polargeraden der den rsp. complementären Fünfseiten a_{23456} und a_{13456} eingeschriebenen K^2 in Bezug auf C^3 *und* C'^3 sein. Zu jeder Geraden a existirt aber eine K^2-Schaar, deren Elemente die Gerade a zur Polargeraden haben gleichzeitig in Bezug auf C^3 *und* auf C'^3. Denn in Bezug auf C^3 ist die Gerade a Polargerade aller K^2 einer bestimmten viergliedrigen K^2-Gruppe (nach § 1, 4), in Bezug auf C'^3 ist das nämliche der Fall; zwei viergliedrige K^2-Gruppen haben aber im Allgemeinen eine 2-gliedrige K^2-Gruppe, eine K^2-Schaar, gemeinsam, so dass die K^2 dieser Schaar sowohl in Bezug auf C^3, wie auf C'^3 die Gerade a zur Polargeraden haben. *Zu jeder Geraden a existirt demnach eine bestimmte K^2-Schaar, deren K^2 die Gerade a in Bezug auf C^3 und C'^3 als Polargerade haben.* Zu allen zweifach unendlich vielen Geraden der Ebene gehört daher eine zweifache Mannigfaltigkeit von K^2-Schaaren, welche demnach eine dreifache Mannigfaltigkeit von K^2 enthält. Jede K^2 dieser dreifachen Mannigfaltigkeit besitzt in Bezug auf die beiden Curven C^3 und C'^3 dieselbe Polargerade. —

Betrachten wir nun das zu a_1 complementäre Fünfseit a_{23456} des gesuchten gemeinsamen Polarsechsseits a, so hat die diesem eingeschriebene K^2 die Gerade a_1 zur Polargeraden in Bezug auf C^3 und C'^3, gehört also der K^2-Schaar an, welche alle K^2 enthält, die in Bezug auf $f=0$, wie $f'=0$ die Gerade a_1 zur Polargeraden haben. Diese K^2 berührt nun aber die gegebene Gerade a_2, und da in einer zweigliedrigen K^2-Gruppe genau eine einzige K^2 existirt, welche eine gegebene Gerade a_2 berührt, so ist damit die dem Fünfseit a_{23456} eingeschriebene K^2 eindeutig bestimmt. In genau derselben Weise können wir die dem Fünfseit a_{13456} eingeschriebene K^2 eindeutig bestimmen; die 4 gemeinsamen Tangenten a_3, a_4, a_5, a_6 dieser beiden eindeutig bestimmten K^2 ergänzen das gegebene Geradenpaar a_1, a_2 eindeutig zu einem Sechsseit a, welches Polarsechsseit von C^3, wie von C'^3 ist. Denn das Sechsseit besitzt zwei Seiten a_1 und a_2, welche Polargeraden in Bezug auf C^3, wie C'^3 der complementären K^2 sind, also ist (nach § 3, 9) a Polarsechsseit von C^3 und C'^3. Damit haben wir bewiesen:

Ein beliebiges Geradenpaar lässt sich auf nur eine Weise zu einem Polarsechsseit zweier beliebiger Curven dritter Ordnung ergänzen. Da,

wie wir gezeigt, 2 beliebige cubische ternäre Formen sich nicht gleichzeitig aus denselben *fünf* Cuben linearer Formen linear und homogen zusammensetzen lassen, so gilt: *Zwei beliebige cubische ternäre Formen sind als Summe von denselben* 6 *Cuben linearer Formen darstellbar, dagegen ist es im Allgemeinen unmöglich zwei beliebige cubische ternäre Formen durch weniger als* 6 *Cuben linearer Formen gleichzeitig homogen und linear zusammenzusetzen, zwei der Cuben sind beliebig annehmbar, die* 4 *weiteren sind sodann eindeutig bestimmt.* —

Zwei Curven dritter Ordnung besitzen demnach eine vierfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarsechsseite. — Es gilt schliesslich noch:

Die 11 *Seiten zweier gemeinsamer Polarsechsseite zweier Curven dritter Ordnung* C^3 *und* C'^3, *welche eine Seite gemeinsam haben, berühren eine Curve dritter Classe.* Denn bezeichnen wir dieselben mit $a_i\,(1, 2, \ldots, 11)$, so bestehen 2 Identitäten von der Form:

$$\sum_1^{11}{}^i\, k_i a_i(x)^3 = 0, \qquad \sum_1^{11}{}^i\, l_i a_i(x)^3 = 0;$$

eliminiren wir aus diesen zunächst a_{10}, sodann a_{11}, so folgt, dass die durch $a_1 \ldots a_9$ bestimmte K^3 (nach § 1, 8) auch a_{10} und a_{11} berührt. —

§ 5.

Der Ort derjenigen Geraden, welche Polargeraden derselben K^2 in Bezug auf drei Curven dritter Ordnung sind.

Es soll weiterhin untersucht werden, ob drei Curven dritter Ordnung und daher das ganze von diesen gebildete Netz gemeinsame Polarsechsseite besitzen. Dazu ist nothwendig, dass jede Seite eines solchen Sechsseits Polargerade der complementären K^2 in Bezug auf die drei C^3 ist, also, wie wir uns ausdrücken wollen, Polargerade der complementären K^2 in Bezug auf das C^3-Netz. Es ist demnach zuvor zu untersuchen, welche Geraden der Ebene Polargeraden einer K^2 in Bezug auf ein C^3-Netz sind, und ob überhaupt solche Geraden existiren. Sei also das von drei Curven dritter Ordnung gebildete Netz (C^3, C'^3, C''^3) gegeben und seien die rsp. Gleichungen von C^3, C'^3, C''^3:

$$f(xxx) = \sum_{i,k,l} a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0, \qquad f'(xxx) = \sum_{i,k,l} a'_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0,$$

$$f''(xxx) = \sum_{i,k,l} a''_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0, \quad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

Zu jeder K^2:

$$\varphi(uu) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

gehört in Bezug auf $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ je eine Polargerade, diese 3 Geraden haben die Gleichungen:

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl}\alpha_{ik}x_l=0,$$

$$\sum_{i,k,l} a'_{ikl}\alpha_{ik}x_l=0,$$

$$\sum_{i,k,l} a''_{ikl}\alpha_{ik}x_l=0 \qquad (i,k,l=1,2,3).$$

Wir erkannten, dass alle K^2, welchen in Bezug auf zwei C^3: $f=0$, $f'=0$, ein und dieselbe Gerade u zur Polargeraden haben, eine zweigliedrige K^2-Gruppe bilden; soll diese Gerade u auch noch in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung $f''=0$ Polargerade einer K^2 jener zweigliedrigen K^2-Gruppe sein, so muss diese K^2 gleichzeitig jener zweigliedrigen K^2-Gruppe und derjenigen viergliedrigen K^2-Gruppe angehören, welche alle K^2 enthält, die u in Bezug auf $f''=0$ zur Polargeraden haben. Eine zweigliedrige und eine viergliedrige K^2-Gruppe haben aber im Allgemeinen keine K^2 gemeinsam, so dass wir erkennen, dass eine beliebige Gerade u nicht Polargerade einer K^2 in Bezug auf ein Curvennetz dritter Ordnung sein kann, sondern dass dazu eine specielle Lage der Geraden u erforderlich ist. Alle diese Geraden u werden daher eine gewisse Curve umhüllen. Damit nun eine Gerade u Polargerade einer K^2: $\varphi(uu)=\sum_{i,k=1,2,3}\alpha_{ik}u_iu_k=0$ in Bezug auf die 3 Curven dritter Ordnung: $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ sei, haben wir folgende 9 Gleichungen zu erfüllen (ϱ, σ, τ sind Proportionalitätsfactoren):

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\varrho u_1&=\sum_{i,k}a_{ik1}\alpha_{ik}, & \sigma u_1&=\sum_{i,k}a'_{ik1}\alpha_{ik}, & \tau u_1&=\sum_{i,k}a''_{ik1}\alpha_{ik},\\
\varrho u_2&=\sum_{i,k}a_{ik2}\alpha_{ik}, & \sigma u_2&=\sum_{i,k}a'_{ik2}\alpha_{ik}, & \tau u_2&=\sum_{i,k}a''_{ik2}\alpha_{ik},\\
\varrho u_3&=\sum_{i,k}a_{ik3}\alpha_{ik}, & \sigma u_3&=\sum_{i,k}a'_{ik3}\alpha_{ik}, & \tau u_3&=\sum_{i,k}a''_{ik3}\alpha_{ik},
\end{aligned}$$

$$(i,k=1,2,3)\ (\alpha_{ik}=\alpha_{ki};\ a_{ikl}=a_{ilk}=\cdots\ a'_{ikl}=a'_{ilk}=\cdots\ a''_{ikl}=a''_{ilk}=\cdots)$$

Wir haben hier 9 lineare homogene Gleichungen für die 9 Grössen:

$$\varrho,\ \sigma,\ \tau;\ \alpha_{ik}(i,k=1,2,3);\quad \alpha_{ik}=\alpha_{ki}.$$

Damit diese 9 Gleichungen mit einander vereinbar sind, ist nothwendig und hinreichend das Verschwinden von:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 & a_{111} & a_{221} & a_{331} & a_{231} & a_{311} & a_{121} \\ u_2 & 0 & 0 & a_{112} & a_{222} & a_{332} & a_{232} & a_{312} & a_{122} \\ u_3 & 0 & 0 & a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{233} & a_{313} & a_{123} \\ 0 & u_1 & 0 & a'_{111} & a'_{221} & a'_{331} & a'_{231} & a'_{311} & a'_{121} \\ 0 & u_2 & 0 & a'_{112} & a'_{222} & a'_{332} & a'_{232} & a'_{312} & a'_{122} \\ 0 & u_3 & 0 & a'_{113} & a'_{223} & a'_{333} & a'_{233} & a'_{313} & a'_{123} \\ 0 & 0 & u_1 & a''_{111} & a''_{221} & a''_{331} & a''_{231} & a''_{311} & a''_{121} \\ 0 & 0 & u_2 & a''_{112} & a''_{222} & a''_{332} & a''_{232} & a''_{312} & a''_{122} \\ 0 & 0 & u_3 & a''_{113} & a''_{223} & a''_{333} & a''_{233} & a''_{313} & a''_{123} \end{vmatrix} = \Lambda(u,u,u).$$

Die Geraden u, welche Polargeraden einer K^2 in Bezug auf ein C^3-Netz sind, erfüllen somit eine Curve dritter Classe (K^3), deren Gleichung $\Lambda(uuu) = 0$ ist. Zu jeder Geraden u dieser K^3: $\Lambda = 0$ gehört eine aus den Gleichungen (1) eindeutig bestimmbare K^2:

$$\varphi(vv) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} v_i v_k = 0,$$

welche in Bezug auf das C^3-Netz die Gerade u zur Polargeraden hat. Es ist daher den einfach unendlich vielen Geraden $\Lambda(uuu) = 0$ je eine K^2 zugeordnet, von welcher sie Polargerade in Bezug auf das Netz ist, und es bilden daher alle diese K^2 eine einfache Mannigfaltigkeit, ein K^2-System erster Stufe. Es giebt somit eine einfache Mannigfaltigkeit von K^2, welche in Bezug auf ein C^3-Netz dieselbe Polargerade haben und es sind die K^2 dieses Systems eindeutig bezogen, auf die Geraden u von $\Lambda(uuu) = 0$; wir wollen in der Folge dieses K^2-System als das System Σ bezeichnen.

Wir erhalten die 6 Coordinaten α_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$; $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) der zu einer Geraden u von $\Lambda = 0$ gehörigen K^2:

$$\varphi(vv) = \sum_{i,k=1,2,3} \alpha_{ik} v_i v_k = 0$$

durch Auflösung des alsdann auflösbaren Gleichungssystems (1) nach α_{ik} als diejenigen Subdeterminanten 8^{ter} Ordnung von $\Lambda(uuu)$, welche zu den 6 letzten Elementen irgend einer Horizontalreihe von Λ gehören; welche Horizontalreihe wir wählen, ist gleichgültig, da für die von uns betrachteten Werthe von u, für welche $\Lambda = 0$ ist, die entsprechenden Subdeterminanten der einzelnen Zeilen proportional werden. Es ist demnach:

$$\alpha_{ik} = \tau_l \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ikl}} = \tau_l' \frac{\partial \Lambda}{\partial a'_{ikl}} = \tau_l'' \frac{\partial \Lambda}{\partial a''_{ikl}} = \varphi_{ik}(uuu) \quad \text{für } l = 1, 2, 3,$$

(wobei τ_l, τ_l', τ_l'' Proportionalitätsfactoren bedeuten).

Die Grössen $a_{ik} = \varphi_{ik}(uuu)$ sind demnach von der Dimension 3 und wir erhalten so zu jeder Geraden u von $\Lambda = 0$ eindeutig eine K^2 mit der Gleichung:

$$\varphi(vv) = \sum_{i,k=1,2,3} \varphi_{ik}(uuu) v_i v_k = 0,$$

deren Polargerade in Bezug auf das C^3-Netz genau u ist. Nur in dem Falle, welcher, wie wir sofort sehen werden, in der That eintritt, dass alle Subdeterminanten der 6 letzten Elemente einer Horizontalreihe für eine bestimmte Gerade u von $\Lambda = 0$ gleichzeitig verschwinden, werden alle $\varphi_{ik}(uuu) = 0$ und daher die Gleichung der zugehörigen K^2 unbestimmt; in diesem Falle hat man aber statt der Subdeterminanten der betrachteten Zeile diejenigen irgend einer anderen Zeile zu benutzen, da diese für dasselbe Werthsystem von u nicht sämmtlich verschwinden können, weil sonst die sämmtlichen Subdeterminanten 8^{ter} Ordnung von Λ für ein bestimmtes Werthsystem von u verschwinden würden, was bei einem Curvennetz im Allgemeinen nicht eintritt, wie man sich an der Betrachtung specieller Fälle überzeugen kann.

Wir werden daher *stets* zu jeder Geraden u von $\Lambda = 0$ eine ganz bestimmte K^2 erhalten, von welcher sie Polargerade des Netzes ist.

Die Gleichung der zu u gehörigen K^2 des Systems Σ erhält man, wenn wir in Λ irgend eine Horizontalreihe durch die Elemente: $0, 0, 0, v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_1 v_2$ ersetzen. Wir erhalten so 9 Formen dieser Curvengleichung, je nachdem wir die eine oder die andere der 9 Zeilen von Λ durch die obigen Elemente ersetzen; wir können auch, um keine der 9 Reihen von Λ zu bevorzugen, eine lineare Verbindung dieser 9 Gleichungsformen unserer K^2 wählen, und gelangen so unter gleichmässiger Benutzung der einzelnen Zeilen zu folgender symmetrischen Form der Gleichung der zu u gehörigen K^2 des Systems:

$$(3) \qquad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2 v_3 & v_3 v_1 & v_1 v_2 \\ \lambda_1 & u_1 & 0 & 0 & a_{111} & a_{221} & a_{331} & a_{231} & a_{311} & a_{121} \\ \lambda_2 & u_2 & 0 & 0 & a_{112} & a_{222} & a_{332} & a_{232} & a_{312} & a_{122} \\ \lambda_3 & u_3 & 0 & 0 & a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{233} & a_{313} & a_{123} \\ \lambda_4 & 0 & u_1 & 0 & a'_{111} & a'_{221} & a'_{331} & a'_{231} & a'_{311} & a'_{121} \\ \lambda_5 & 0 & u_2 & 0 & a'_{112} & a'_{222} & a'_{332} & a'_{232} & a'_{312} & a'_{122} \\ \lambda_6 & 0 & u_3 & 0 & a'_{113} & a'_{223} & a''_{333} & a'_{233} & a'_{313} & a'_{123} \\ \lambda_7 & 0 & 0 & u_1 & a''_{111} & a''_{221} & a''_{331} & a''_{231} & a''_{311} & a''_{121} \\ \lambda_8 & 0 & 0 & u_2 & a''_{112} & a''_{222} & a''_{332} & a''_{232} & a''_{312} & a''_{122} \\ \lambda_9 & 0 & 0 & u_3 & a''_{113} & a'_{223} & a''_{333} & a''_{233} & a''_{313} & a''_{123} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,k=1,2,3} \alpha_{ik} v_i v_k = \sum_{i,k=1,2,3} \varphi_{ik}(uuu) v_i v_k = \varphi(uuu, vv).$$

Die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_9$ sind Unbestimmte; ist $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$, so erhalten wir für $\lambda_i = \delta_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ die obigen 9 Gleichungsformen, die den einzelnen Horizontalreihen von Λ entsprechen.

Lassen wir hierin u alle Werthsysteme durchlaufen, wofür $\Lambda = 0$ ist, so erhalten wir alle K^2 des Systems und es ist mithin (3) in Verbindung mit (2) die Gleichung des K^2-Systems Σ, welches alle K^2 enthält, welche in Bezug auf das Netz dieselbe Polargerade besitzen.

Es ist nun von Wichtigkeit zu erkennen, wieviel K^2 unseres K^2-Systems Σ eine gegebene Gerade a berühren; diese Anzahl werden wir — in Uebereinstimmung mit Herrn Reye*) — als die Ordnung des K^2-Systems bezeichnen dürfen.

Die Gleichung einer K^2 unseres Systems war (nach (3)):

$$\sum_{i,k=1,2,3} \varphi_{ik}(uuu) v_i v_k = 0,$$

wo die u der Gleichung $\Lambda = 0$ genügen mussten; damit eine K^2 dieses Systems die Gerade a berühre, muss:

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik}(uuu) a_i a_k = 0$$

sein für Werthe von u, welche die Gleichung $\Lambda(uuu) = 0$ befriedigen. Die Anzahl der Werthe u, welche den beiden Gleichungen:

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik}(uuu) a_i a_k = 0, \quad \Lambda(uuu) = 0$$

gleichzeitig genügen, wird uns die gewünschte Anzahl liefern; die beiden Gleichungen für u_1, u_2, u_3 sind nun aber beide vom dritten Grade, so dass 9 Werthsysteme von u_1, u_2, u_3 existiren, welche beiden Gleichungen gemeinsam sind. Von diesen 9 Werthsystemen sind jedoch auszuscheiden alle etwa auftretenden Werthsysteme u_1, u_2, u_3 von der Art, dass für sie gleichzeitig $\Lambda(uuu)$ und die sämmtlichen 6 Grössen $\varphi_{ik}(uuu)$ verschwinden. Jedes derartige Werthsystem nämlich wird, da es von der speciellen Annahme der Geraden a völlig unabhängig ist, als unbrauchbar auszuschliessen sein.

Wir haben nun zu untersuchen, ob Werthsysteme u existiren, welche die 7 Gleichungen:

$$\Lambda(uuu) = 0, \; \varphi_{ik}(uuu) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; \; \varphi_{ik} = \varphi_{ki})$$

gleichzeitig befriedigen, wir finden, dass in der That 3 derartige Werthsysteme u vorhanden sind. Bezeichnen wir nämlich in (3) die Subdeterminanten der ersten Zeile der Reihe nach mit $\Lambda(uuu)$, $\varrho(uu)$,

*) cf. Reye: Crelles Journ. Bd. 82.

$\sigma(uu)$, $\tau(uu)$; $\alpha_{ik} = \varphi_{ik}(uuu)$ $(i, k = 1, 2, 3)$, und ersetzen wir in (3) der Reihe nach die erste Zeile durch die 9 übrigen, so erhalten wir folgende 9 in u_1, u_2, u_3 identischen Gleichungen:

$$
(4)\qquad \begin{cases}
\lambda_1 \Lambda(uuu) + u_1 \varrho(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a_{ik1}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_2 \Lambda(uuu) + u_2 \varrho(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a_{ik2}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_3 \Lambda(uuu) + u_3 \varrho(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a_{ik3}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_4 \Lambda(uuu) + u_1 \sigma(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a'_{ik1}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_5 \Lambda(uuu) + u_2 \sigma(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a'_{ik2}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_6 \Lambda(uuu) + u_3 \sigma(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a'_{ik3}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_7 \Lambda(uuu) + u_1 \tau(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a''_{ik1}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_8 \Lambda(uuu) + u_2 \tau(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a''_{ik2}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0, \\
\lambda_9 \Lambda(uuu) + u_3 \tau(uu) + \sum\limits_{i,k=1,2,3} a''_{ik3}\, \varphi_{ik}(uuu) = 0,
\end{cases}
$$

Berechnen wir aus 7 dieser 9 Identitäten die 7 Grössen $\Lambda(uuu)$, $\varphi_{ik}(uuu)$ und setzen die gefundenen Werthe in die beiden übrigen Identitäten ein, so erhalten wir zwei lineare Gleichungen für $\varrho(uu)$, $\sigma(uu)$, $\tau(uu)$, deren Coefficienten lineare Functionen von u_1, u_2, u_3 sein werden. Eliminiren wir Λ und φ_{ik} z. B. aus den 8 ersten Gleichungen in der angegebenen Weise, so erhalten wir als Resultante:

$$
\begin{vmatrix}
u_1\varrho(uu) & \lambda_1 & a_{111} & a_{221} & a_{331} & a_{231} & a_{311} & a_{121} \\
u_2\varrho(uu) & \lambda_2 & a_{112} & a_{222} & a_{332} & a_{232} & a_{312} & a_{122} \\
u_3\varrho(uu) & \lambda_3 & a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{233} & a_{313} & a_{123} \\
u_1\sigma(uu) & \lambda_4 & a'_{111} & a'_{221} & a'_{331} & a'_{231} & a'_{311} & a'_{121} \\
u_2\sigma(uu) & \lambda_5 & a'_{112} & a'_{222} & a'_{332} & a'_{232} & a'_{312} & a'_{122} \\
u_3\sigma(uu) & \lambda_6 & a'_{113} & a'_{223} & a'_{333} & a'_{233} & a'_{313} & a'_{123} \\
u_1\tau(uu) & \lambda_7 & a''_{111} & a''_{221} & a''_{331} & a''_{231} & a''_{311} & a''_{121} \\
u_2\tau(uu) & \lambda_8 & a''_{112} & a''_{222} & a''_{332} & a''_{232} & a''_{312} & a''_{123}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Eine analoge Gleichung werden wir erhalten, wenn wir die ersten

sieben und die 9[te] Gleichung benutzen, nur die letzte Zeile der dann erhaltenen Gleichung wird sich von der vorigen unterscheiden. So erhalten wir zwei Gleichungen von der Form:

$$\begin{cases} a_1(u)\varrho(uu) + b_1(u)\sigma(uu) + c_1(u)\tau(uu) = 0, \\ a_2(u)\varrho(uu) + b_2(u)\sigma(uu) + c_2(u)\tau(uu) = 0. \end{cases}$$

Darin bedeuten die linearen Functionen $a_1(u)$, $a_2(u)$, $b_1(u)$, $b_2(u)$, $c_1(u)$, $c_2(u)$ gewisse Subdeterminanten 8[ter] Ordnung der Determinante (3). Demnach sind $\varrho(uu)$, $\sigma(uu)$, $\tau(uu)$ proportional den Subdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_1(u) & b_1(u) & c_1(u) \\ a_2(u) & b_2(u) & c_2(u) \end{vmatrix}.$$

Drei quadratische Formen $\varrho(uu)$, $\sigma(uu)$, $\tau(uu)$, welche den Subdeterminanten einer solchen Matrix proportional sind, haben stets 3 und nur 3 gemeinsame Nullstellen. Mithin erkennt man, dass es 3 Werthsysteme von u_1, u_2, u_3 giebt, für welche $\varrho(uu)$, $\sigma(uu)$, $\tau(uu)$ gleichzeitig verschwinden. Für diese 3 Werthsysteme von u_1, u_2, u_3 verschwinden aber auch offenbar $\Lambda(uuu)=0$ und $\varphi_{ik}(uuu)$ $(i,k=1,2,3)$, denn setzen wir in die Gleichungen (4) für u_1, u_2, u_3 eines dieser Werthsysteme ein, so erhalten wir aus (4) für die 7 Grössen Λ und φ_{ik} 9 Gleichungen; entweder müssen nun alle Subdeterminanten 7[ter] Ordnung von (3) verschwinden, das ist aber unmöglich*), oder — und dieser Fall tritt also ein — es müssen für die genannten Werthsysteme $\Lambda = 0$, $\varphi_{ik} = 0$ sein. Somit erkennen wir, dass es stets 3 Werthsysteme u_1, u_2, u_3 giebt, für welche die 7 cubischen ternären Formen $\Lambda(uuu)$ und $\varphi_{ik}(uuu)$ $(i,k=1,2,3)$ gleichzeitig verschwinden. Mehr als 3 Gerade dieser Art können aber nicht existiren, da für jede weitere solche Gerade — wegen (4) — auch $\varrho = 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 0$ wird, wir aber erkannten, dass diese 3 Formen nur 3 gemeinsame Nullstellen besassen. Es ergiebt sich demnach, dass wir von den 9

---

*) Denn z. B. die Subdeterminante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{111} & \cdots & a_{121} \\ \lambda_2 & a_{112} & \cdots & a_{122} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_6 & a'_{113} & \cdots & a'_{123} \\ \lambda_7 & a''_{111} & \cdots & a''_{121} \end{vmatrix}$$

ist, da die $\lambda_1 \ldots \lambda_7$ Unbestimmte sind, nur dann $= 0$, wenn alle Coefficienten von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ verschwinden: der Coefficient von λ_7 ist offenbar nicht Null, da sonst f und f' gemeinsame Polarfünfseite (nach § 2, 12) besässen. —

gemeinsamen Nullstellen von $\sum \varphi_{ik}(uuu)\, a_i a_k = 0$ und $\Lambda(uuu) = 0$ diese 3 Werthsysteme von u_1, u_2, u_3 in Abzug bringen müssen, wenn wir die Anzahl derjenigen K^2 unseres Systems Σ erhalten wollen, welche die gegebene Gerade a berühren. Wir finden also, dass genau 6 K^2 unseres K^2-Systems erster Stufe eine gegebene Gerade a berühren, dass also unser K^2-System von der *sechsten* Ordnung ist. Wir sind somit zu folgenden Resultaten gelangt:

Alle K^2, welche in Bezug auf alle C^3 eines Curvennetzes dritter Ordnung dieselbe Polargerade haben, bilden ein K^2-System 1^{ter} Stufe 6^{ter} Ordnung, so dass jede Gerade u der Ebene von 6 K^2 des Systems berührt wird.

Diejenigen Geraden u, welche die Polargeraden der K^2 des obigen K^2-Systems in Bezug auf das C^3-Netz sind, umhüllen eine Curve dritter Classe $\Lambda(uuu) = 0$.

Die symbolische Darstellung der Curve $\Lambda(uuu) = 0$.

Der Zielpunkt unserer Untersuchung ist die Aufsuchung der eventuell in einem C^3-Netze vorhandenen Polarsechsseite. Wir sahen, dass jede Seite eines solchen Polargerade der complementären K^2 in Bezug auf das ganze C^3-Netz war, und da wir im vorigen Abschnitt erkannten, dass alle Geraden, welche Polargeraden für das ganze Netz sind, die Curve $\Lambda = 0$ umhüllen, so wird nothwendig ein Polarsechsseit des Netzes, falls ein solches überhaupt existirt, der Curve $\Lambda = 0$ umgeschrieben sein. Es ist daher für die Existenz der Polarsechsseite des Netzes jedenfalls erforderlich (nach § 1, 7), dass die K^3: $\Lambda = 0$, zu den 3 gegebenen C^3, welche das Netz constituiren, conjugirt ist. Um zu zeigen, dass diese Bedingung in der That erfüllt ist, wenden wir uns zu der symbolischen Darstellung der Gleichung unserer K^3: $\Lambda = 0$. Sind $f(xxx) = 0$, $f'(xxx) = 0$, $f''(xxx) = 0$ die 3 unser Netz constituirenden C^3, so werden wir auch folgendermassen zu unserer K^3: $\Lambda = 0$ gelangen können. Eine Gerade (yz), welche die Punkte y und z enthält, wird der K^3: $\Lambda = 0$ dann und nur dann angehören können, wenn ihre drei Polarkegelschnittbüschel:

$$\varrho f(yxx) + \sigma f(zxx) = 0, \quad \varrho f'(yxx) + \sigma f'(zxx) = 0,$$
$$\varrho f''(yxx) + \sigma f''(zxx) = 0$$

derselben fünfgliedrigen Gruppe angehören; denn nur dann wird eine K^2 existiren, welche diesen 3 Büscheln conjugirt ist, und welche daher die Gerade (yz) zur Polargeraden hat. Damit diese 5 Büschel derselben fünfgliedrigen Gruppe angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(y) & f_{22}(y) & f_{33}(y) & f_{23}(y) & f_{31}(y) & f_{12}(y) \\ f_{11}(z) & f_{22}(z) & f_{33}(z) & f_{23}(z) & f_{31}(z) & f_{12}(z) \\ f'_{11}(y) & f'_{22}(y) & f'_{33}(y) & f'_{23}(y) & f'_{31}(y) & f'_{12}(y) \\ f'_{11}(z) & f'_{22}(z) & f'_{33}(z) & f'_{23}(z) & f'_{31}(z) & f'_{12}(z) \\ f''_{11}(y) & f''_{22}(y) & f''_{33}(y) & f''_{23}(y) & f''_{31}(y) & f''_{12}(y) \\ f''_{11}(z) & f''_{22}(z) & f''_{33}(z) & f''_{23}(z) & f''_{31}(z) & f''_{12}(z) \end{vmatrix},$$

dabei ist:

$$f_{ik}(y) = \left(\frac{1}{6}\,\frac{\partial f(xxx)}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{x=y};$$

die Grössen $f_{ik}(y)$ sind die Coordinaten der conischen Polaren:

$$f(yxx) = \sum_{(i,k=1,2,3)} f_{ik}(y)\, x_i x_k = 0$$

von y in Bezug auf $f = 0$.

Diese Determinante gleich Null gesetzt liefert also ebenfalls die Gleichung unserer K^3, wofern darin $u_1 : u_2 : u_3$ den Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ proportional gesetzt wird. Sei nun in symbolischer Form:

$$f(xxx) = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3, \quad f'(xxx) = a_x'^3 = b_x'^3 = c_x'^3,$$
$$f''(xxx) = a_x''^3 = b_x''^3 = c_x''^3;$$

dann wird die symbolische Form der Gleichung unserer K^3: $\Lambda = 0$, welche die Geraden enthält, welche Polargeraden des Netzes sind:

$$\begin{vmatrix} a_y a_1 a_1 & a_y a_2 a_2 & a_y a_3 a_3 & a_y a_2 a_3 & a_y a_3 a_1 & a_y a_1 a_2 \\ b_z b_1 b_1 & b_z b_2 b_2 & b_z b_3 b_3 & b_z b_2 b_3 & b_z b_3 b_1 & b_z b_1 b_2 \\ a'_y a'_1 a'_1 & a'_y a'_2 a'_2 & a'_y a'_3 a'_3 & a'_y a'_2 a'_3 & a'_y a'_3 a'_1 & a'_y a'_1 a'_2 \\ b'_z b'_1 b'_1 & b'_z b'_2 b'_2 & b'_z b'_3 b'_3 & b'_z b'_2 b'_3 & b'_z b'_3 b'_1 & b'_z b'_1 b'_2 \\ a''_y a''_1 a''_1 & a''_y a''_2 a''_2 & a''_y a''_3 a''_3 & a''_y a''_2 a''_3 & a''_y a''_3 a''_1 & a''_y a''_1 a''_2 \\ b''_z b''_1 b''_1 & b''_z b''_2 b''_2 & b''_z b''_3 b''_3 & b''_z b''_2 b''_3 & b''_z b''_3 b''_1 & b''_z b''_1 b''_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$a_y b_z a'_y b'_z a''_y b''_z \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ a_1'^2 & a_2'^2 & a_3'^2 & a'_2 a'_3 & a'_3 a'_1 & a'_1 a'_2 \\ b_1'^2 & b_2'^2 & b_3'^2 & b'_2 b'_3 & b'_3 b'_1 & b'_1 b'_2 \\ a_1''^2 & a_2''^2 & a_3''^2 & a''_2 a''_3 & a''_3 a''_1 & a''_1 a''_2 \\ b_1''^2 & b_2''^2 & b_3''^2 & b''_2 b''_3 & b''_3 b''_1 & b''_1 b''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vertauschen wir die gleichwerthigen Symbole a und b und addiren die beiden so entstehenden Gleichungen, und verfahren nachher analog mit a' und b', und a'' und b'', so wird unsere Gleichung zu:

$$(abu)(a'b'u)(a''b''u)\,\Delta = 0,$$

wo Δ die in der letzten Gleichung auftretende Determinante bedeutet. Nun ist noch Δ umzuformen. Dies geschieht mittels der folgenden Identität, bei welcher die $a, b, \ldots$ nicht nothwendig Symbole zu bedeuten brauchen:

$$\begin{aligned}\Delta &= (aba'')\ (a'b'a'')(aa'b'')(bb'b'') - (aa'a'')(bb'a'')(abb'')\ (a'b'b'')\\ &= (a'b'a)\ (a''b''a)(a'a''b)(b'b''b) - (a'a''a)(b'b''a)(a'b'b)\ (a''b''b)\\ &= (a''b''a')(aba')\ (a''ab')(b''bb') - (a''aa')(b''ba')(a''b''b')(abb').\end{aligned}$$

Die Ausdrücke rechts drücken sämmtlich, ebenso wie die Determinante Δ, durch ihr Verschwinden aus, dass die 6 Punkte a, b, a', b', a'', b'' auf einem und demselben Kegelschnitt sich befinden; sie stimmen sämmtlich in der Dimension und auch z. B. im Diagonalglied überein, sind also identische Grössen. Demnach wird unsere Gleichung:

$$\begin{aligned}(abu)(a'b'u)(a''b''u)\,\{&(aba'')(a'b'a'')(aa'b'')(bb'b'')\\ &- (aa'a'')(bb'a'')(abb'')(a'b'b'')\} = 0.\end{aligned}$$

Vertauschen wir die beiden gleichwerthigen Symbole a'' und b'', so geht das erste Glied der linken Seite in das zweite über, so dass wir zu folgender symbolischer Gleichung unserer K^3: $\Lambda(uuu) = 0$ gelangen:

$$\begin{cases}(abu)(a'b'u)(a''b''u)(aba'')(a'b'a'')(aa'b'')(bb'b'') = 0,\\ \text{und analog:}\\ (a'b'u)(a''b''u)(abu)(a'b'a)(a''b''a)(a'a''b)(b'b''b) = 0,\\ (a''b''u)(abu)(a'b'u)(a''b''a')\,(aba')\,(a''ab')(b''bb') = 0,\end{cases}$$

d. i. die gesuchte symbolische Darstellung der K^3: $\Lambda = 0$.

An dieser Darstellung tritt in der That in Evidenz, dass diese K^3 zu den 3 C^3: $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$ conjugirt ist; dazu ist nämlich nothwendig, dass, wenn man in die Gleichung der K^3 statt der Variabeln u ein Symbol z. B. der Form $f''(xxx) = c_x''^3$ setzt, der entstehende Ausdruck identisch verschwindet. In der That wird dann erhalten:

$$(abc'')\,(a'b'c'')\,(a''b''c'')\,(aba'')\,(a'b'a'')\,(aa'b'')\,(bb'b''),$$

und durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole a'' und c'' wird dies zu:

$$\begin{aligned}&(aba'')\,(a'b'a'')\,(c''b''a'')\,(abc'')\,(a'b'c'')\,(aa'b'')\,(bb'b'')\\ &= -(abc'')\,(a'b'c'')\,(a''b''c'')\,(aba'')\,(a'b'a'')\,(aa'b'')\,(bb'b''),\end{aligned}$$

geht also in seinen negativen Werth über, woraus das Verschwinden dieser Invariante, wie behauptet, einleuchtet. Analog folgt aus der zweiten und dritten Gleichung für die K^3: $\Lambda = 0$, dass dieselbe auch zu $f = 0$ und $f' = 0$ conjugirt ist. —

§ 6.

Die Polarsechsseite eines Curvennetzes dritter Ordnung.

1) Wir stellen uns die Aufgabe zu untersuchen, ob es möglich ist, 6 Gerade $a_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ so aufzufinden, dass dieselben ein gemeinschaftliches Polarsechsseit dreier Curven dritter Ordnung:

$$f = \sum a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0, \qquad f' = \sum a'_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0,$$

$$f'' = \sum a''_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$$

bilden und mithin auch ein solches des von f, f', f'' constituirten C^3-Netzes. Im Falle der Möglichkeit ist die Anzahl dieser Polarsechsseite aufzufinden, und ihre Construction zu leisten.

Damit ein Sechsseit a_i $(1, 2, \ldots, 6)$ Polarsechsseit einer C^3 sei, hat dasselbe, wie wir sahen, 4 Bedingungen zu erfüllen; damit $a_i(1, 2, \ldots. 6)$ Polarsechsseit von 3 Curven dritter Ordnung sei, sind demnach 12 Bedingungen zu erfüllen nöthig. Nun existirt in der Ebene eine genau 12-fache Mannigfaltigkeit von Sechsseiten, daher giebt die Abzählung an, dass in einem C^3-Netz eine endliche Anzahl von Polarsechsseiten vorhanden sind. Wir haben jedoch schon bei den gemeinsamen Polarfünfseiten zweier C^3 erkannt, dass derartige von der Abzählung gelieferte Resultate durchaus nicht immer exacter Natur sind, sondern dass sie nur als Wegweiser für eine strenge Untersuchung zu benutzen sind. Wir suchen also die Coordinaten:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

von 6 Geraden a_i, so dass:

$$f(xxx) = \sum_1^6 {}^i k_i a_i(x)^3, \quad f'(xxx) = \sum_1^6 {}^i k_i' a_i(x)^3, \quad f''(xxx) = \sum_1^6 {}^i k_i'' a_i(x)^3.$$

Damit ein Sechsseit a Polarsechsseit von f sei, war nothwendig, dass jede seiner Seiten a_i Polargerade der complementären K^2 in Bezug auf f sei. Damit also a Polarsechsseit des Netzes (f, f', f'') sei, ist nothwendig, dass jede seiner Seiten Polargerade der complementären K^2 in Bezug auf das Netz (f, f', f'') sei. Wir haben aber p. 568 gezeigt, dass alle Geraden u, welche Polargeraden einer K^2 in Bezug auf ein C^3-Netz sind, eine K^3: $\Lambda(uuu) = 0$ umhüllen, so dass wir erkennen:

Besitzt ein Curvennetz dritter Ordnung (f, f', f'') ein Polarsechsseit, so muss dasselbe der Λ-Curve des Netzes umgeschrieben sein.

2) *Die Correspondenz* (6, 6) *auf* $\Lambda = 0$. Zu jeder Geraden u der K^3: $\Lambda = 0$ gehört eine K^2, von welcher u Polargerade in Bezug auf das Netz ist. Diese K^2 hat mit der K^3: $\Lambda = 0$: 6 Geraden gemein, so dass zu jeder Geraden u von Λ die 6 gemeinsamen Geraden von $\Lambda = 0$ und der zu u gehörigen polaren K^2 als entsprechend gesetzt werden können. Es wird daher auf $\Lambda = 0$ eine Correspondenz constituirt, vermöge deren jeder Geraden u von $\Lambda = 0$ die 6 gemeinsamen Tangenten von $\Lambda = 0$ und der zu u polaren K^2 entsprechen. Da wir andererseits aber gezeigt haben (p. 567), dass stets 6 K^2 des K^2-Systems Σ existiren, welche eine gegebene Gerade u von $\Lambda = 0$ berühren, so werden die 6 Polargeraden dieser 6 K^2 diejenigen Geraden von $\Lambda = 0$ sein, von welchen u entsprechende Gerade ist; es ergiebt sich also, dass u entsprechende Gerade von genau 6 Geraden von $\Lambda = 0$ ist. Wir erkennen also: *In unserer Correspondenz auf $\Lambda = 0$ entsprechen jeder Geraden u von Λ 6 andere Geraden auf Λ, und andererseits ist jede Gerade u von Λ von 6 anderen Geraden die entsprechende.*

Wir haben demnach — der üblichen Bezeichnungsweise folgend*) — unsere Correspondenz als Correspondenz (6, 6) zu bezeichnen. Diese Correspondenz hat im Sinne von Herrn Brill**) die Werthigkeit „*Null*“, da keine der einer beliebigen Geraden u entsprechenden Geraden im Allgemeinen mit u zusammenfällt. Wir bezeichneten die Gleichung der zu u polaren K^2 mit: $\varphi(uuu, vv) = 0$, wobei $\varphi(uuu, vv)$ die auf p. 566 ausgeschriebene Determinante bedeutet; dieselbe war in u vom dritten, in v vom zweiten Grade. Die Gleichung $\varphi(uuu, vv) = 0$ ist nun als die Correspondenzgleichung unserer Correspondenz zu betrachten, denn dieselbe vermittelt auf $\Lambda = 0$ die von uns betrachtete Correspondenz (6, 6); jeder Geraden $u = a$ entspricht die K^2: $\varphi(aaa, vv) = 0$, deren 6 gemeinsame Tangenten $b_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ mit $\Lambda = 0$ die 6 zu a correspondirenden Geraden sind. Umgekehrt entspricht jeder Geraden b von $\Lambda = 0$ die K^3: $\varphi(uuu, bb)$ $\sum_{i,k} \varphi_{ik}(uuu)\, b_i b_k = 0$; dieselbe hat mit der K^3: $\Lambda = 0$ 9 Geraden gemein, von denen jedoch 3 für jeden Werth von $v = b$ fest sind, da wir gesehen haben, dass alle $\varphi_{ik}(uuu) = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ drei gemeinsame Geraden auf $\Lambda = 0$ besitzen (cf. § 5). Die 6 mit b beweglichen gemeinsamen Tangenten von $\varphi(uuu, bb) = 0$ und $\Lambda(uuu) = 0$ sind es daher, welchen in

*) cf. Brill: Math. Ann. Bd. 6, 7, 31; vgl. auch Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie Bd. I, p. 441 ff.

**) cf. Brill l. c.

unserer Correspondenz die Gerade b entspricht, so dass wir es mit einer Correspondenz mit festen Punkten*) zu thun haben. Unsere Correspondenz ist daher eine solche, wo alle einer Geraden u von $\Lambda = 0$ entsprechenden Geraden die mit u beweglichen gemeinsamen Tangenten einer K^2 mit $\Lambda = 0$ sind, und wo im Allgemeinen keine derselben mit u zusammenfällt. Die Geraden, von welchen u die entsprechende ist, bilden das bewegliche gemeinsame Tangentensystem einer K^3 mit $\Lambda = 0$, welche ausserdem auf $\Lambda = 0$ noch 3 feste Geraden berührt. —

3) Soll a_1 Seite eines Polarsechsseits des Netzes (f, f', f'') sein, so müssen die 5 übrigen Seiten: a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 die polare K^2 von a_1 berühren, ausserdem aber nach 1 p. 571 müssen diese 5 Geraden die K^3 $\Lambda = 0$ berühren, so dass wir erkennen, dass a_2, a_3, a_4, a_5 zu den 6 in der Correspondenz (6, 6) der Geraden a_1 entsprechenden Geraden gehören; es gilt daher: *Besitzt ein Netz ein Polarsechsseit, so ist jedes Geradenpaar desselben ein entsprechendes Geradenpaar der Correspondenz* (6, 6) *auf* $\Lambda = 0$.

4) Die bisherigen Bedingungen (1) und (3), welche ein Polarsechsseit des Netzes zu erfüllen hat, waren nothwendig aber nicht hinreichend. Zu einer hinreichenden Bedingung gelangen wir auf folgende Weise. Es muss nicht nur jedes Geradenpaar a_i, a_k des Sechsseits ein entsprechendes Paar der Correspondenz (6, 6) sein, d. h. es muss nicht nur a_k zu den 6 in (6, 6) der Geraden a_i entsprechenden Geraden gehören, sondern *es müssen zwei Geraden z. B. a_1 und a_2 auf $\Lambda = 0$ existiren, derart dass die polare K^2 von a_1 die Gerade a_2 berührt d. h. a_2 der Geraden a_1 entspricht, aber auch die polare K^2 von a_2 die Gerade a_1 berührt, d. h. auch umgekehrt a_1 zu den* 6 *der Geraden a_2 entsprechenden Geraden gehört. Ist das der Fall und sind ferner a_1 und a_2 von einander verschieden, so lässt sich das Geradenpaar a_1, a_2 auf eindeutige Weise zu einem Polarsechsseit des Netzes ergänzen.*

In der That ergänzen, wenn wir mit K_1^2 die polare K^2 von a_1, mit K_2^2 die von a_2 bezeichnen, die 4 gemeinsamen Tangenten a_3, a_4, a_5, a_6 von K_1^2 und K_2^2 das Geradenpaar a_1, a_2 zu einem Polarsechsseit des Netzes. Denn in dem so entstandenen Sechsseit $a_i (i=1,2,3,4,5,6)$ sind 2 Seiten a_1, a_2 die Polargeraden der complementären K^2 in Bezug auf das Netz, da K_1^2 nach seiner Construction a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 und K_2^2 die Geraden a_1, a_3, a_4, a_5, a_6 berührt. Da wir ferner a_1 und a_2 als von einander verschieden angenommen haben, so sind auch K_1^2 und K_2^2 von einander verschieden, so dass das entstandene Sechsseit nicht einem Kegelschnitt umgeschrieben ist; es findet daher Satz 9 § 3 Anwendung, nach welchem jedes Sechsseit, dessen Seiten keinen

*) cf. Clebsch-Lindemann: Bd. II, p. 678 ff.

Kegelschnitt berühren, und in welchem 2 Seiten die Polargeraden der complementären K^2 sind, ein Polarsechsseit ist. Hier sind a_1 und a_2 in Bezug auf das ganze Netz Polargeraden der complementären K^2, also ist das Sechsseit auch Polarsechsseit des ganzen Netzes. —

5) *Die iterirte Correspondenz.* Wir haben in (4) erkannt, dass jedes Geradenpaar a_i, a_k, welches die Eigenschaft hat, dass es erstens ein distinctes Geradenpaar ist, und zweitens a_k der Geraden a_i und a_i der Geraden a_k in der Correspondenz (6, 6) entspricht, so dass also: $\varphi(a_i a_i a_i, a_k a_k) = 0$, und $\varphi(a_k a_k a_k, a_i a_i) = 0$ ist, auf eindeutige Weise zu einem Polarsechsseit von (f, f', f'') ergänzt werden kann. Wir wollen die für a_i, a_k gewünschten Eigenschaften noch anders folgendermassen fassen. Jeder Geraden a entsprechen mittels der Correspondenz (6, 6) 6 Geraden b_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ jeder dieser 6 Geraden b_i $(i = 1 \ldots 6)$ entsprechen hinsichtlich (6, 6) je 6 weitere Geraden $b_{ik} (k = 1, \ldots, 6)$, so dass allen 6 Geraden b_i im Ganzen 36 Geraden b_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, 6)$ entsprechen. Durch zweimalige Anwendung der Correspondenz (6, 6) werden daher zu jeder Geraden a 36 Geraden $b_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots, 6)$ zugeordnet, so dass die zweimalige Anwendung der Correspondenz (6, 6) eine neue Correspondenz giebt, welche wir *die iterirte Correspondenz* nennen und mit (36, 36) bezeichnen wollen. In der That gehören nicht nur zu jeder Geraden a von $\Lambda = 0$ genau 36 entsprechende Geraden, welche die gemeinsamen Tangenten von 6 K^2 mit $\Lambda = 0$ sind, also der bewegliche Durchschnitt einer (in 6 K^2 zerfallenden) K^{12}, sondern auch umgekehrt existiren 36 Gerade $c_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots, 6)$, von welchen a die entsprechende ist; denn jede Gerade a entspricht in (6, 6) genau 6 Geraden c_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und jede dieser 6 Geraden z. B. c_i entspricht ebenfalls in (6, 6) genau 6 weiteren Geraden $c_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots, 6)$; also existiren 36 Gerade c_{ik} von der Art, dass sie sämmtlich in (36, 36) die Gerade a als eine der 36 ihnen entsprechenden Geraden besitzen. Diese 36 Geraden c_{ik} sind die beweglichen gemeinsamen Tangenten von 6 K^3 mit der Curve $\Lambda = 0$; jede dieser 6 K^3 hat, wie früher (§ 5) gezeigt, 3 feste gemeinsame Tangenten mit $\Lambda = 0$, also genau 6 bewegliche gemeinsame Tangenten, so dass im ganzen 36 bewegliche gemeinsame Tangenten $c_{ik} (i, k = 1, \ldots, 6)$ resultiren, von welchen a entsprechende Gerade in (36, 36) ist. Die iterirte Correspondenz ist daher in der That eine Correspondenz (36, 36); jede der 36 Geraden, welche einer gegebenen Geraden entsprechen, sind im Allgemeinen von dieser verschieden und bilden dieselben den beweglichen Durchschnitt einer K^{12} mit $\Lambda = 0$, ebenso wie die 36 Geraden, welchen eine gegebene Gerade u von $\Lambda = 0$ entspricht, im Allgemeinen von u verschieden sind, und den beweglichen Durchschnitt

einer K^{18} mit $\Lambda = 0$ bilden, welche K^{18} noch 18 weitere *feste* Gerade mit $\Lambda = 0$ gemein hat. —

6) *Wir beweisen nun: Die Coincidenzen der Correspondenz* (36, 36), *welche nicht Coincidenzen der Correspondenz* (6, 6) *sind, liefern die gesuchten Geradenpaare.* Jede Coincidenz der ursprünglichen Correspondenz (6, 6) — d. i. jede Gerade, die mit einer der 6 ihr entsprechenden Geraden zusammenfällt — ist auch Coincidenz der Correspondenz (36, 36); denn entspricht der Geraden a in (6, 6) wieder die Gerade a, so gehört auch bei nochmaliger Anwendung von (6, 6) die Gerade a zu den correspondirenden Geraden, so dass wir erkennen, dass a auch von (36, 36) Coincidenz ist. Die Coincidenzen von (36,36) zerfallen also in solche, welche Coincidenzen von (6,6) sind und solche, welche dies nicht sind. Betrachten wir eine der letzteren a_i, so entsprechen der Geraden a_i in (6, 6) 6 Geraden, von denen eine a_k — von a_i verschieden — so beschaffen ist, dass unter den 6 dieser in (6,6) entsprechenden Geraden sich eine befindet, welche mit a_i identisch ist, da ja a_i eine Coincidenz der iterirten Correspondenz sein soll. Wir erkennen daher, dass a_i, a_k ein Geradenpaar der Art ist, dass in (6, 6) a_k der Geraden a_i entspricht, und ebenso a_i der Geraden a_k. Also gilt: *Jede Coincidenz a_i der iterirten Correspondenz* (36, 36), *die nicht Coincidenz der ursprünglichen Correspondenz* (6, 6) *ist, bildet mit derjenigen völlig bestimmten Geraden a_k, welche ihr in* (6, 6) *entspricht, und welcher ihrerseits in* (6, 6) *die Gerade a_i entspricht, ein Geradenpaar a_i, a_k, von der in* 4. *p.* 573 *geforderten Beschaffenheit, welches eindeutig zu einem Polarsechsseit des Netzes ergänzt werden kann.* Es ist daher nun unsere Aufgabe: *Die Coincidenzen der iterirten Correspondenz* (36, 36) *aufzufinden, welche nicht Coincidenzen der ursprünglichen Correspondenz* (6, 6) *sind.* —

Zuvor ist jedoch noch folgender Satz zu beweisen:

7) *Jede Coincidenz der iterirten Correspondenz* (36, 36), *welche nicht Coincidenz der ursprünglichen Correspondenz* (6, 6) *ist, ist fünffach zu zählen*, d. h. fällt von den 36 in (36, 36) einer Geraden u entsprechenden Geraden eine mit u zusammen, so fallen stets noch 4 weitere mit u zusammen; die K^{12}, welche auf $\Lambda = 0$ die 36 Geraden, welche der Geraden u entsprechen, ausschneidet, hat in einer Coincidenzstelle eine fünffache Gerade, indem 5 von den 6 K^2, welche K^{12} bilden, die Gerade u berühren. In der That: Ist a_1 eine Coincidenzstelle der iterirten Correspondenz, ohne eine solche der ursprünglichen zu sein, so existirt nach 6. eine Gerade a_2, für welche

$$\varphi(a_1 a_1 a_1,\ a_2 a_2) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(a_2 a_2 a_2,\ a_1 a_1) = 0,$$

welche also mit a_1 ein Geradenpaar bildet, welches sich durch 4 weitere Geraden a_3, a_4, a_5, a_6 zu einem Polarsechsseit des Netzes ergänzen

lässt. Nun haben aber auch die Geradenpaare $a_1 a_3$, $a_1 a_4$, $a_1 a_5$, $a_1 a_6$ des Polarsechsseits die Eigenschaft, dass nicht nur a_3, a_4, a_5, a_6 in (6, 6) der Geraden a_1 entsprechen, sondern auch umgekehrt a_1 zu den entsprechenden Geraden von a_3, von a_4, von a_5, von a_6 gehört, da jedes Geradenpaar eines Polarsechsseits nach 4) p. 573 diese Eigenschaft hat. Also enthält jede der den rsp. Geraden a_3, a_4, a_5, a_6 entsprechende K^2 die Gerade a_1, so dass, wie behauptet wurde, von den $6K^2$ der zu a_1 in (36, 36) gehörigen K^{12} stets 5 nämlich die zu a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 in (6, 6) gehörigen K^2 die Gerade a_1 enthalten, so dass wir in der That erkennen, dass, wenn *eine* von den 36 in (36, 36) einer Geraden a_1 entsprechenden Geraden mit a_1 zusammenfällt, jedesmal noch *4* weitere mit a_1 zusammenfallen müssen, so dass eine jede Coincidenz der iterirten Correspondenz, welche nicht eine solche der ursprünglichen ist, *fünffach* gezählt werden muss. —

8. Wir gehen nun darauf aus die Anzahlen der Coincidenzen für die Correspondenz (6, 6) und deren iterirte Correspondenz (36, 36) zu bestimmen. Wir machen diese Bestimmung mit Hilfe des Correspondenzprincips und wenden dazu folgende Formulirung desselben an, welche von Herrn Bobek*) herrührt und welche genau den vorliegenden Fall unserer Correspondenz auf $\Lambda = 0$ behandelt; dasselbe lautet: *Entsprechen jedem Punkte x einer algebraischen Curve C_m^p vom Grade m und vom Geschlechte p ($p = 0$ inbegriffen) a Punkte y, die alle mit x veränderlich sind, und von denen im Allgemeinen keiner mit x zusammenfällt, so aber, dass diese a Punkte den beweglichen Schnitt einer algebraischen Curve X mit C_m^p bilden, so werden jedem Punkte y eine endliche Anzahl b von Punkten x entsprechen, deren zugehörige Curven X durch y gehen, und es werden diese b Punkte x der variable Schnitt einer algebraischen Curve Y mit C_m^p sein, die mit y sich ändert und den Punkt y im Allgemeinen nicht enthält. Es sind auf C_m^p nur $(a + b)$ Punkte x (rsp. y) vorhanden, die auf den ihnen entsprechenden Curven X (rsp. Y) liegen, oder die Coincidenzpunkte der Correspondenz (a, b) sind.* Wenden wir nun diesen Satz auf unsere Correspondenzen (6, 6) und (36, 36) an, so erkennen wir zunächst, dass sämmtliche Voraussetzungen des Satzes für beide Correspondenzen erfüllt sind. Mithin besitzt die Correspondenz (6, 6), für welche $a = 6$, $b = 6$ ist, 12 *Coincidenzen*, während die iterirte Correspondenz, für welche $a = 36$, $b = 36$ ist, deren 72 besitzt. Unter diesen treten aber nach 6. p. 575 die 12 Coincidenzen von (6, 6) auf, es ergiebt sich also: *Es existiren genau 60 Coincidenzen der iterirten Correspondenz, welche nicht Coincidenzen der ursprünglichen Correspondenz sind.* Nach Satz 7)

*) cf. Bobek: Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Sitzungsber. der k. Academie der Wissenschaften in Wien; 1886.

p. 575 fallen jedoch stets 5 dieser Coincidenzen in ein und dieselbe Gerade, so dass wir erkennen, dass 12 *distincte* Geraden existiren, welche Coincidenzen von (36,36) sind, ohne solche von (6,6) zu sein. —

Auf Grund dieser Thatsachen gelangen wir zu dem für unsere Untersuchung fundamentalen Schlussresultat:

9) *Jedes allgemeine Curvennetz dritter Ordnung besitzt genau zwei Polarsechsseite.* Sei nämlich a_1 eine der 12 nach (8) vorhandenen Geraden, welche Coincidenzen von (36, 36), aber nicht von (6, 6) sind, so existiren nach (7) unter den 6 ihr in (6, 6) entsprechenden Geraden stets 5 a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 von der Art, dass die zu diesen rsp. polaren K^2 sämmtlich die Gerade a_1 enthalten. Diese 5 Geraden ergänzen nach 7) a_1 zu einem Polarsechsseit des Netzes, und sind daher ihrerseits zu den 12 Geraden gehörig, die Coincidenzen von (36, 36) lieferten. Jede der 6 übrigen von diesen 12 Geraden z. B. a_7 wird durch die 5 *letzten* Geraden zu einem zweiten Polarsechsseit des Netzes ergänzt, da keine der früheren 6 Geraden es zu einem solchen ergänzen kann, indem dann zwei Polarsechsseite des Netzes entständen, welche Seiten gemeinsam haben und dies ist, wie leicht ersichtlich, unmöglich. Wir erkennen somit, dass ein allgemeines Netz in der That genau zwei Polarsechsseite besitzt, wodurch dann die Frage nach den gemeinsamen Polarsechsseiten von 3 C^3 erledigt ist.

Herr O. Schlesinger hat mich auf folgende eigenthümliche Beziehung der Polarsechsseite des Netzes zu den auf unserer Curve $\Lambda = 0$ liegenden gemeinsamen Polarsechsseiten der Büschel des Netzes in einer brieflichen Mittheilung aufmerksam gemacht. Nach einem von Herrn Schlesinger aufgestellten Satze*) existiren genau 3 Polarsechsseite eines C^3-Büschels, welche einer gegebenen dem Büschel conjugirten K^3 umgeschrieben sind. Mithin besitzt jedes der doppelt unendlich vielen C^3-Büschel des Netzes auf unserer K^3: $\Lambda = 0$ genau 3 Polarsechsseite. Andererseits ist jedes Polarsechsseit des Netzes auch Polarsechsseit eines jeden Büschels des Netzes, woraus, weil alle Polarsechsseite des Netzes auf $\Lambda = 0$ liegen, folgt, dass *höchstens* 3 Polarsechsseite des Netzes existiren können, was mit unseren Resultaten übereinstimmt. Wir fanden, dass genau 2 Polarsechsseite des Netzes vorhanden sind; daraus folgt folgende merkwürdige Gruppirung der auf $\Lambda = 0$ vorhandenen Polarsechsseite der C^3-Büschel des Netzes.

Es sind nämlich für jedes der doppelt unendlich vielen Büschel des Netzes 2 *der* 3 *auf* $\Lambda = 0$ *vorhandenen Polarsechsseite des Büschels (nämlich die Polarsechsseite des Netzes) fest, das dritte Polarsechsseit des Büschels variirt von Büschel zu Büschel.* —

*) cf. Schlesinger: Ueber die Verwerthung der Θ-Functionen etc. Math. Ann. Bd. 31, § 3, 26, pag. 212.

10. Die Polarsechsseite des Netzes haben weiter keine specielle Lagenbeziehung, als dass sie einer Curve dritter Classe umgeschrieben sind. Wir zeigen dies dadurch, dass wir für irgend 2 Sechsseite S_1 und S_2, welche einer K^3 umgeschrieben sind, nachweisen, dass ein eindeutig bestimmbares Netz existirt, von welchem sie Polarsechsseite sind. Es bilden nämlich die sämmtlichen dem Sechsseit S_1 eingeschriebenen K^3 eine 4-gliedrige K^3-Gruppe, ebenso die dem Sechsseit S_2 eingeschriebenen K^3. Jeder dieser beiden K^3-Gruppen steht je eine sechsgliedrige, conjugirte C^3-Gruppe gegenüber, welche rsp. S_1, S_2 zum gemeinsamen Polarsechsseit haben. Diese beiden 6-gliedrigen C^3-Gruppen gehören aber derselben 9-gliedrigen Gruppe an, da sie beide zu derjenigen K^3 conjugirt sind, welcher S_1 und S_2 nach unserer Voraussetzung umschrieben ist, also beide der dieser K^3 conjugirten 9-gliedrigen C^3-Gruppe angehören. Zwei 6-gliedrige C^3-Gruppen, die derselben 9-gliedrigen C^3-Gruppe angehören, haben aber genau ein C^3-Netz gemeinsam, und dieses eindeutig bestimmte Netz hat also sowohl S_1, wie S_2 zum Polarsechsseit. Hieraus ergiebt sich einmal, dass unsere Λ-Curve des Netzes keinerlei Singularitäten aufweist, da, wie wir sehen, zu jeder beliebigen K^3 ein Netz gefunden werden kann, von dem sie Λ-Curve ist; zweitens erkennt man, dass die 2 Polarsechsseite des Netzes keine weiteren speciellen Lagenbeziehungen zu besitzen brauchen, als dass sie einer K^3 umgeschrieben sind. — Gleichzeitig ist mit den vorstehenden Ausführungen bewiesen, *dass 3 allgemeine cubische ternäre Formen genau auf 2 verschiedene Arten sich aus denselben 6 Cuben linearer Formen linear und homogen zusammensetzen lassen.* —

Es ist nicht schwer bei dem folgenden speciellen C^3-Netz sich von der Existenz der beiden Polarsechsseite zu überzeugen. Betrachten wir nämlich das specielle Netz, welches gebildet wird aus $2C^3$: $f=0$ und $f'=0$, welche ein gemeinsames Polarvierseit haben, und einer dritten beliebigen C^3: $f''=0$, so lässt sich ein Polarsechsseit dieses Netzes sofort angeben. Ergänzt man nämlich das Polarvierseit von $f=0$, $f'=0$ durch ein eindeutig bestimmbares Geradenpaar zu einem Polarsechsseit von $f''=0$, so ist das so entstandene Sechsseit offenbar Polarsechsseit des Netzes, da jedes Polarvierseit einer C^3 durch ein beliebiges Geradenpaar zu einem Polarsechsseit der C^3 ergänzt wird. Das zweite noch existirende Sechsseit ist dann eindeutig bestimmt, und lässt sich bei etwas eingehenderem Studium ebenfalls leicht auffinden. —

§ 7.

Die Polarsiebenseite einer Curve dritter Ordnung.

Seien $a_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ die Gleichungen der 7 Seiten a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ des Siebenseits a, so wird dieses Polarsiebenseit der C^3: $f(xxx) = 0$ sein, wofern sich 7 Constanten K_i $(i = 1, \ldots, 7)$ so hinzufinden lassen, dass:

$$f = \sum_1^7{}^i k_i\, a_i\,(x)^3$$

wird. Wir wollen uns im Folgenden, da die Betrachtungen und Methoden den früheren analog sind, auf kürzere Andeutungen in der Beweisführung beschränken. Zu jeder Ecke a_{12} nennen wir *complementär* das Fünfseit a_{34567}, das von den 5 übrigen, a_{12} nicht enthaltenden Seiten gebildet wird; wir wollen die diesem Fünfseit eingeschriebene K^2 die zur Ecke a_{12} complementäre K^2 nennen; dann gilt:

1. *Ist a Polarsiebenseit von der C^3: $f = 0$, so bildet jede Ecke von a zusammen mit der complementären K^2 eine zu $f = 0$ conjugirte K^2* nach § 1, 7. Daraus folgt nach § 1, 4: *Die den Fünfseiten eines Polarsiebenseits eingeschriebenen K^2 sind den conischen Polaren der complementären Ecken conjugirt.*

2. *Bilden drei Ecken eines Siebenseits mit ihren rsp. complementären K^2 drei linear unabhängige, zerfallende K^3 und sind diese $3K^3$ zu einer gegebenen C^3: $f = 0$ conjugirt, so ist das Siebenseit Polarsiebenseit von $f = 0$ und auch die übrigen Ecken bilden mit den complementären K^2 zu $f = 0$ conjugirte K^3.* (*Nach* § 1, 7). Dass es in der That möglich ist, drei Ecken anzugeben, welche zusammen mit ihren rsp. complementären K^2 drei linear unabhängige K^3 bilden, erkennt man z. B. an den drei folgenden Ecken: a_{12}, a_{13}, a_{23}. Denn nennen wir $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{13} = 0$, $\varphi_{23} = 0$ die Gleichungen der 3 zu diesen Ecken complementären K^2, so gehören diese 3 K^2 ein und demselben Büschel an, da sie die 4 Geraden 4, 5, 6, 7 berühren, also ist: $\varphi_{23} = \varrho\varphi_{12} + \sigma\varphi_{13}$. Die $3K^3$, welche von diesen 3 Ecken und den rsp. complementären K^2 gebildet werden, haben somit die Gleichungen:

$$(u a^1 a^2)\, \varphi_{12} = 0, \qquad (u a^1 a^3)\, \varphi_{13} = 0,$$

$$(u a^2 a^3)\, \varphi_{23} = (u a^2 a^3)\,(\varrho\varphi_{12} + \sigma\varphi_{13}) = 0;$$

wären dieselben in linearer Abhängigkeit, so wäre:

$$k_1(u a^1 a^2)\, \varphi_{12} + k_2(u a^1 a^3)\, \varphi_{13} + k_3(u a^2 a^3)\, \varphi_{23} = 0,$$

oder:

$$k_1(u a^1 a^2)\, \varphi_{12} + k_2(u a^1 a^3)\, \varphi_{13} + k_3(u a^2 a^3)\,(\varrho\varphi_{12} + \sigma\varphi_{13}) = 0,$$

mithin:

$$\varphi_{12}\big(k_1(ua^1a^2) + k_3\varrho(ua^2a^3)\big) + \varphi_{13}\big(k_2(ua^1a^3) + k_3\sigma(ua^2a^3)\big) = 0,$$

es wäre dann aber $\varphi_{12} = \varphi_{13}$ d. h. die 6 Geraden 2, 3, 4, 5, 6, 7 würden ein und denselben Kegelschnitt berühren, was wir bei einem allgemeinen Siebenseit nicht voraussetzen dürfen. Mithin sind unsere 3 K^3 linear unabhängig; sind dieselben zu einer gegebenen C^3: $f = 0$ conjugirt, so ist das Siebenseit Polarsiebenseit dieser C^3, daraus ergiebt sich:

Damit ein Siebenseit Polarsiebenseit einer gegebenen C^3 sei, sind 3 Bedingungen zu erfüllen nöthig.

3. *Construction der Polarsiebenseite einer C^3*: Nach dem letzten Satze lehrt uns die Abzählung, dass eine 11-fache Mannigfaltigkeit von Polarsiebenseiten einer gegebenen C^3 existirt, so dass wir noch über eine 11-fache Willkürlichkeit verfügen können. Nehmen wir z. B. ein Fünfseit eines Polarsiebenseits willkürlich an, so ist dadurch über eine 10-fache Mannigfaltigkeit verfügt und es wird sich demnach durch eine einfache Anzahl von Geradenpaaren das Fünfseit zu einem Polarsiebenseit einer gegebenen C^3 ergänzen lassen. Seien also die 5 Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gegeben und ein Geradenpaar a_6, a_7 gesucht, so dass $a_1, \ldots, a_7$ Polarsiebenseit der gegebenen C_3: $f = 0$ wird. Zunächst wird die Ecke a_{67} mit der dem gegebenen Fünfseit eingeschriebenen K^2 eine zu C^3 conjugirte K^3 bilden d. h. es wird nach § 1, 4 a_{67} auf der Polargeraden der dem Fünfseit eingeschriebenen K^2 liegen. Wählen wir auf dieser bekannten Geraden den Punkt a_{67} willkürlich, so ist über die eine noch disponible Willkürlichkeit verfügt. Nun bildet die zu a_{12} complementäre K^2, welche a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 berührt, mit a_{12} eine zu $f = 0$ conjugirte K^3, d. h. es ist nach 1) diese K^2 conjugirt zu der conischen Polaren von a_{12}; alle dieser conischen Polaren conjugirten K^2 bilden aber eine fünfgliedrige K^2-Gruppe, dieser gehört somit unsere K^2 an; dieselbe berührt ferner die 3 Geraden a_3, a_4, a_5, alle K^2 einer fünfgliedrigen Gruppe, welche 3 gegebene Geraden berühren, bilden eine bestimmte zweigliedrige Gruppe, eine K^2-Schaar; es gehört somit die zu a_{12} complementäre K^2 einer bekannten K^2-Schaar an und es ist demnach das gesuchte Geradenpaar a_6, a_7 unter den Tangentenpaaren enthalten, welche man von dem bekannten Punkte a_{67} an die K^2 dieser bekannten Schaar legen kann. Diese Tangentenpaare bilden aber die Strahlenpaare einer Strahleninvolution, so dass das Geradenpaar a_6, a_7 einer bekannten Strahleninvolution angehört. Analog ergiebt sich, dass die complementäre K^2 von a_{13} einer zweiten bestimmten K^2-Schaar angehört, so dass das Geradenpaar a_6, a_7, welches den Tangentenpaaren von a_{67} auch an die K^2 dieser Schaar angehört, Strahlenpaar einer zweiten

uns bekannten Involution ist. Zwei Involutionen besitzen genau ein gemeinsames Paar, so dass sich eindeutig ein Geradenpaar hinzufügen lässt, welches $a_1, \ldots, a_5$ zu einem Polarsiebenseit von $f=0$ ergänzt und dessen Schnittpunkt der auf der Polargeraden willkürlich gewählte Punkt a_{67} ist. Also gilt:

Es giebt eine einfache Mannigfaltigkeit von Geradenpaaren, welche ein gegebenes Fünfseit zu einem Polarsiebenseit von $f=0$ ergänzt. Dass in der That das entstandene Siebenseit Polarsiebenseit der C^3 ist, ergiebt sich daraus, dass, wenn wir mit $\varphi_{ik}(uu)=0$ die Gleichung der zur Ecke a_{ik} complementären K^2 bezeichnen, die 3 K^3:

$$(ua^6a^7)\,\varphi_{67}(uu)=0, \qquad (ua^1a^2)\,\varphi_{12}(uu)=0, \qquad (ua^1a^3)\,\varphi_{13}(uu)=0,$$

die dem Siebenseit eingeschrieben sind, zu $f=0$ conjugirt sind. Die lineare Unabhängigkeit dieser 3 K^3 beweist man analog, wie früher bei den Polarsechsseiten. —

4. *Die Polarfigur:* Bilden wir die Polargeraden der 21 K^2, welche man den 21 Fünfseiten eines Polarsiebenseits einschreiben kann, so gehen diese 21 Geraden durch die rsp. complementären Ecken des Siebenseits (nach 1)) und es ist daher diese aus 21 Geraden gebildete Figur dem Siebenseit umgeschrieben. Diese 21 Geraden bilden eine wohlbekannte Configuration, sie schneiden sich zu je dreien nämlich in einem Punkte, da je 3 der K^2 demselben Büschel angehören und die Polargeraden dreier K^2 desselben Büschels durch einen Punkt gehen. Es giebt solcher Configurationspunkte genau 35, da jedem der 35 Vierseite des Siebenseits ein solches Büschel entspricht. Diese 35 Configurationspunkte liegen zu je 5 auf den 21 Geraden der Configuration; denn jede K^2 des Siebenseits gehört fünf derartigen Büscheln an (z. B. die durch $a_1a_2a_3a_4a_5$ gehende K^2 den 5 Büscheln, die den 5 Vierseiten $a_1a_2a_3a_4$, $a_1a_2a_3a_5$, $a_1a_2a_4a_5$, $a_1a_3a_4a_5$, $a_2a_3a_4a_5$ eingeschrieben sind.) Daher befinden sich auf jeder Configurationsgeraden 5 Configurationspunkte. Wir haben also eine Configuration von 21 und 35 Punkten derart, dass durch jeden Punkt 3 Gerade gehen und auf jeder Geraden 5 Punkte liegen; wir haben also diese Configuration in der üblichen Weise mit $(35_3, 21_5)$ zu bezeichnen, wir wollen sie *die Polarfigur* des Siebenseits nennen. Man erhält diese Configuration durch Projection eines räumlichen Siebenflachs auf die Ebene, sie gehört also zu der Classe der sogenannten polyedralen Configurationen*)

---

*) cf. Jung: Rendiconti d. Reale Istituto Lomb. Ser. II, tom. XVIII; ferner Jan de Vries: Math. Ann. Bd. 34, p. 226 ff. Herr Vries nennt die dualen Figuren der hier betrachteten „polyedrale Configurationen", welche durch Schneiden eines räumlichen n-Ecks mit einer Ebene entstehen; doch dürfte die Uebertragung dieses Namens auch auf die dualen Figuren gerechtfertigt erscheinen.

und wäre als π_7 zu bezeichnen. Also gilt: *Die Polarfigur eines Polarsiebenseits einer C^3 bildet die polyedrale Configuration π_7 und ist dieselbe dem Polarsiebenseit umgeschrieben, da ihre 21 Seiten die 21 complementären Ecken desselben enthalten.*

Jedes Polarsiebenseit bildet zusammen mit seiner Polarfigur π_7 eine weitere Configuration derselben Art. Zu den 21 Geraden der Polarfigur treten noch die 7 Geraden des Siebenseits, so dass die aus beiden Gebilden zusammengesetzte Configuration 28 Geraden besitzt; ferner treten zu den 25 Punkten der Polarfigur π_7 die 21 Ecken des Siebenseits, so dass die zusammengesetzte Configuration aus 28 Geraden und 56 Punkten besteht; auf jeder Geraden liegen 6 Punkte, durch jeden Punkt gehen 3 Gerade, so dass die auftretende Configuration mit $(56_3, 28_6)$ zu bezeichnen ist; auch diese Configuration ist eine polyedrale, sie wird durch Projection eines Achtflachs auf die Ebene erhalten, und ist somit als π_8 zu bezeichnen. Betrachten wir ein Sechsseit eines Polarsiebenseits, so ist dessen Polarfigur — d. i. die von den Polargeraden der den 6 Fünfseiten des Sechsseits eingeschriebenen K^2 gebildete Figur — wieder ein Sechsseit. Die Schnittpunkte entsprechender Geraden der beiden Sechsseite liegen auf einer Geraden d. h. die beiden Sechsseite befinden sich in *linealer* Lage. In der That, betrachten wir z. B. das Sechsseit $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, so gehen die Polargeraden der 6 K^2, welche berühren:

$$a_1a_2a_3a_4a_5,\quad a_1a_2a_3a_4a_6,\quad a_1a_2a_3a_5a_6,\quad a_1a_2a_4a_5a_6,\quad a_1a_3a_4a_5a_6,\quad a_2a_3a_4a_5a_6,$$

rsp. durch:

$$a_{67},\qquad a_{57},\qquad a_{47},\qquad a_{37},\qquad a_{27},\qquad a_{17};$$

demnach schneiden diese 6 Polargeraden die entsprechenden Seiten des Sechsseits in 6 Punkten, welche sämmtlich auf der Geraden a_7 liegen. Die beiden Sechsseite befinden sich also in linealer Lage, die Gerade, welche die Schnittpunkte entsprechender Seiten enthält, ist die Gerade a_7, welche das Sechsseit zum Polarsiebenseit a ergänzt. Jedes Sechsseit liegt demnach mit seiner Polarfigur lineal. Wir können alle diese Resultate folgendermassen zusammenfassen: *Jedes Polarsiebenseit einer C^3 bildet mit seiner Polarfigur die polyedrale Configuration π_8, welche durch Projection eines Achtflachs entsteht. Jedes Sechsseit eines Polarsiebenseits befindet sich mit seiner Polarfigur in linealer Lage d. h. die Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen in einer Geraden, diese Gerade ist die letzte Seite des Polarsiebenseits.*

Es ist hier wohl der Ort auf die vollkommene Analogie der eben hergeleiteten Sätze über das Polarsiebenseit einer C^3 mit den Eigenschaften eines Polarvierseits einer C^2 hinzuweisen. Für dieses nämlich gilt: *Jedes Polarvierseit einer C^2 bildet mit seiner Polarfigur die polyedrale Configuration π_5, welche durch Projection eines Fünfflachs*

entsteht. Jedes Dreiseit eines Polarvierseits befindet sich mit seiner Polarfigur in linealer Lage d. h. die Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen auf ein und derselben Geraden, welche die letzte Seite des Polarvierseits ist. —

Von den gemeinsamen Polarsiebenseiten mehrerer Curven dritter Ordnung seien kurz nur noch folgende Resultate ohne Beweis angeführt:

Zwei Curven dritter Ordnung besitzen eine 8-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarsiebenseite.

Drei Curven dritter Ordnung besitzen eine 5-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarsiebenseite.

§ 8.

Die Polarachtseite der Curven dritter Ordnung.

Ein Achtseit a mit den Seiten a_i ist nach § 1, 7 Polarachtseit einer C^3: $f=0$, wenn 2 zu $f=0$ conjugirte K^3 dem Achtseit eingeschrieben sind. Wählen wir also 2 beliebige zu $f=0$ conjugirte K^3: $\varphi=0$, $\varphi'=0$ aus und seien $a_1, \ldots, a_8$ acht von ihren neun gemeinsamen Tangenten, so sind die 9 C^3: $f=0$, $a_i(x)^3$ $(i=1,\ldots,8)$ zu $\varphi=0$, $\varphi'=0$ conjugirt; alle zu $\varphi=0$, $\varphi'=0$ conjugirten C^3 gehören aber einer zweigliedrigen C^3-Gruppe an, also sind unsere 9 Formen f, $a_i(x)^3$ $(i=1,\ldots,8)$ linear abhängig, mithin:

$$f=\sum_1^8{}^i k_i a_i(x)^3$$

d. h. a ist Polarachtseit der C^3: $f=0$. Wählen wir ein Siebenseit beliebig $a_1, \ldots, a_7$, so giebt es genau ein Büschel von K^3, welches zu $f=0$ conjugirt ist und $a_1, \ldots, a_7$ berührt, jede der beiden weiteren gemeinsamen Tangenten des Büschels ergänzt $a_1 \ldots a_7$ zu je einem Polarachtseit von $f=0$. Also gilt: *Jede C^3 besitzt eine 14-fache Mannigfaltigkeit von Polarachtseiten; jedes Siebenseit lässt sich auf 2 Arten zu einem Polarachtseit von C^3 ergänzen.* Analog findet man:

2 C^3 besitzen eine 12-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jedes Sechsseit lässt sich auf $\binom{3}{2}=3$ Arten zu einem solchen ergänzen;

3 C^3 besitzen eine 10-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jedes Fünfseit lässt sich auf $\binom{4}{3}=4$ Arten zu einem solchen ergänzen;

4 C^3 besitzen eine 8-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jedes Vierseit lässt sich auf $\binom{5}{4} = 5$ Arten zu einem solchen ergänzen;

5 C^3 besitzen eine 6-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jedes Dreiseit lässt sich auf $\binom{6}{5} = 6$ Arten zu einem solchen ergänzen;

6 C^3 besitzen eine 4-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jedes Geradenpaar lässt sich auf $\binom{7}{6} = 7$ Arten zu einem solchen ergänzen;

7 C^3 besitzen eine 2-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarachtseite, jede Gerade lässt sich auf $\binom{8}{7} = 8$ Arten zu einem solchen ergänzen.

8 C^3 besitzen genau 9 gemeinsame Polarachtseite; denn diesen 8 C^3 ist eine zweigliedrige K^3-Gruppe conjugirt, alle K^3 dieser Gruppe haben 9 gemeinsame Tangenten; je acht derselben bilden ein Polarachtseit der 8 C^3. —

§ 9.

Die Polarneunseite der Curven dritter Ordnung.

Ein Neunseit $a_1, \ldots, a_9$ ist Polarneunseit einer C^3, wenn die dem Neunseit eingeschriebene K^3 zu der C^3 conjugirt ist nach § 1, 7. Demnach bilden irgend welche 9 Tangenten irgend einer zu C^3 conjugirten K^3 ein Polarneunseit von C^3. Wählen wir 8 Geraden willkürlich, so existirt genau eine K^3, welche zu einer gegebenen C^3: $f = 0$ conjugirt ist und die 8 Geraden berührt, jede weitere Tangente dieser K^3 ergänzt diese 8 Geraden zu einem Polarneunseit der C^3. Es giebt daher eine 17-fache Mannigfaltigkeit von Polarneunseiten einer C^3. Analog ergiebt sich, dass k Curven dritter Ordnung eine $(18 - k)$-fache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Polarsechsseite besitzen für $k = 1, 2, \ldots, 9$.

Was die Polarfiguren mit grösserer Anzahl betrifft, so haben wir bereits § 1, 6 gesehen, dass jedes Zehnseit Polarzehnseit jeder C^3 ist, also von hier an unsere Definition ihre Bedeutung verliert.

Breslau, den 12. September 1889.

Lineare Constructionen des neunten Schnittpunkts zweier Curven dritter Ordnung.

Von

FRANZ LONDON in Breslau.

Alle Curven dritter Ordnung durch 8 gegebene Punkte gehen bekanntlich auch sämmtlich durch einen bestimmten 9^{ten} Punkt, so dass zu 8 Punkten der Ebene stets ein von ihnen abhängiger 9^{ter} gehört, welcher zusammen mit jenen das vollständige Schnittpunktsystem eines C^3-Büschels bildet. Dieser 9^{te} Punkt, durch die 8 gegebenen *eindeutig* bestimmt, muss daher *allein mit Hilfe des Lineals* construirbar sein und die Aufgabe, den 9^{ten} gemeinsamen Schnittpunkt zweier und damit aller C^3 durch 8 gegebene Punkte linear zu construiren, ist schon verschiedentlich Gegenstand der Untersuchungen der Geometer gewesen. Jedoch scheinen die mir bekannten Lösungen dieser Aufgabe noch nicht denjenigen Grad der Einfachheit und Kürze zu besitzen, dessen das Problem fähig ist. Die vorangeschickte Arbeit über die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung*) giebt uns ein Mittel an die Hand dieses Problem in überraschend einfacher Weise zu lösen, und es mögen daher hier eine Anzahl lineare Constructionen dieses 9^{ten} Punktes, gestützt auf jene Theorie, folgen, die ihrerseits von der Verwendbarkeit der Polarfiguren für die Lösung constructiver Probleme eine Vorstellung geben mögen.

An Stelle der gewünschten Construction des 9^{ten} *Schnittpunkts* zweier Curven dritter *Ordnung* soll jedoch das dual gegenüberstehende Problem der linearen Construction der 9^{ten} gemeinsamen *Tangente* zweier Curven dritter *Classe* behandelt werden, da wir nur so die Sätze und Beziehungsweise der vorangehenden Untersuchung direct benutzen können, während im anderen Falle erst eine duale Ueberlegung auf die Polarfiguren der Curven dritter *Classe* erforderlich wäre. Die gewünschten Constructionen des 9^{ten} *Punktes* ergeben sich

---

*) Im Folgenden ist von den Sätzen der vorangehenden Arbeit nur ein Theil von denjenigen vorausgesetzt, die sich auf die Polarfiguren *einer einzigen* C^3 beziehen. Jene Arbeit werde fortan immer mit „P" citirt. —

dann aus dem Princip der Dualität und bedürfen weiter keiner Auseinandersetzung. —

Damit 9 Gerade a_i mit den Gleichungen

$$a_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 9)$$

das gemeinsame Tangentensystem zweier Curven dritter Classe bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass zwischen den 9 Cuben $a_i(x)^3$ eine lineare Identität bestehe (cf. P. § 1, 8,), so dass sich also stets 9 Constanten $k_1, \ldots, k_9$ so auffinden lassen, dass:

$$\sum_1^9 k_i a_i(x)^3 = 0.$$

Ist nun p eine ganze Zahl kleiner als 9, so lässt sich diese Identität schreiben:

$$(1) \qquad \sum_1^p k_i a_i(x)^3 = -\sum_{p+1}^9 k_i a_i(x)^3 = f(xxx)$$

d. h. es existirt eine Curve dritter Ordnung mit der Gleichung $f(xxx) = 0$ derart, dass $a_1, \ldots, a_p$ ein Polar-p-Seit, $a_{p+1}, \ldots, a_9$ ein Polar-$(9-p)$-Seit bilden. Die Construction der neunten gemeinsamen Tangente a_9 zweier Curven dritter Classe, welche die acht gegebenen Geraden $a_1, \ldots, a_8$ berühren, kommt also auf die folgende Aufgabe zurück: *Zu 8 Geraden $a_1, \ldots, a_8$ eine Gerade a_9 so hinzuzufinden, dass dieselben die Geraden $a_{p+1}, \ldots, a_8$ zu einem Polar-$(9-p)$-Seit derjenigen C^3 ergänzt, von welcher $a_1, \ldots, a_p$ ein Polar-p-Seit bilden.* Die gesuchte Construction ist also reducirt auf eine Construction von Polarfiguren und damit die ganze Betrachtung auf eine Betrachtung von Polareigenschaften; es werden uns die 3 hier in Betracht kommenden Fälle für $p = 4, 3, 2$ auf diesem Wege in der That zu äusserst einfachen Constructionen unseres Problems führen. — Gleichzeitig sei bemerkt, dass die hier skizzirte Methode der Ueberführung constructiver Probleme auf Constructionen von Polarfiguren in allen denjenigen so überaus zahlreichen Fällen stattfinden kann, wo die Abhängigkeit der zu construirenden Gebilde von den gegebenen durch lineare Identitäten zwischen den Potenzen linearer Formen ihren Ausdruck findet. Ich behalte mir vor, Resultate, die ich in dieser Richtung schon besitze resp. noch zu erlangen hoffe, in einiger Zeit zu veröffentlichen. —

Erste Construction.

Setzen wir in (1) $p = 4$, so erhalten wir für 9 gemeinsame Tangenten zweier C^3 folgende Beziehung:

$$\sum_1^4 k_i a_i(x)^3 = -\sum_5^9 k_i a_i(x)^3 = f(xxx)$$

d. h.: *Bilden* $a_1, \ldots, a_9$ *die* 9 *gemeinsamen Tangenten zweier* C^3, *so existirt eine eindeutig bestimmte* C^3: $f = 0$, *von welcher* $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ *Polarvierseit*, $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ *Polarfünfseit ist.* Sind also $a_1, \ldots, a_8$ gegeben, so ist a_9 so zu finden, dass a_9 die Geraden a_5, a_6, a_7, a_8 zu einem Polarfünfseit einer C^3 ergänzt, von welcher $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ Polarvierseit ist. Betrachten wir nun in Bezug auf diese C^3 die konische Polare P_{89} von a_{89}, so hat dieselbe (nach P. § 2, 3,) das Dreiseit $a_5 a_6 a_7$ zum Polardreiseit, und (nach P. § 1, 10) das Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit, da $a_1 a_2 a_3 a_4$ als Polarvierseit unserer C^3 auch Polarvierseit jedes Polarkegelschnitts derselben ist. Kennt man aber von einem Kegelschnitt ein Polardreiseit und ein Polarvierseit, so sind damit 5 conjugirte Punktepaare desselben gegeben, und damit der Kegelschnitt resp. sein Polarsystem vollständig bestimmt. Herr Schröter hat gelehrt*), wie man allein mit Hilfe des Lineals zu jedem Punkte die Polare finden kann in Bezug auf ein Polarsystem, von welchem, wie hier, ein Polardreiseit und ein Polarvierseit bekannt ist. — Ganz analog ist das Polarsystem der conischen Polaren P_{49} des Punktes a_{49} bekannt. Denn dasselbe hat zunächst $a_1\,a_2\,a_3$ zum Polardreiseit, da offenbar jedes Dreiseit eines Polarvierseits einer C^3 das gemeinsame Polardreiseit des Polarkegelschnittbüschels der vierten Seite ist; ferner ist $a_5\,a_6\,a_7\,a_8$ Polarvierseit von P_{49}, denn a_{49} ist auf a_9 gelegen und (nach P. § 2, 3,) ist jedes Vierseit eines Polarfünfseits Polarvierseit der conischen Polaren eines jeden Punktes der fünften Seite. Demnach kennt man auch von P_{49} ein Polardreiseit und ein Polarvierseit, so dass das Polarsystem von P_{49} ebenfalls vollständig bekannt ist, und man daher in Bezug auf P_{49}, wie auf P_{89}, allein mit Hilfe des Lineals zu jedem Punkte die Polare, zu jeder Geraden den Pol construiren kann. Betrachten wir nun die gemischte Polare u von a_{49}, a_{89} in Bezug auf unsere C^3: $f = 0$, so ist dieselbe die Polare von a_{49} in Bezug auf die conische Polare P_{89}; da a_{49} auf der bekannten Geraden a_4 sich befindet, so geht u durch den bekannten Pol α_4 von a_4 in Bezug auf P_{89}. Andererseits ist aber auch u die Polare von a_{89} in Bezug auf die conische Polare P_{49}, also geht u, da a_{89} auf der bekannten Geraden a_8 gelegen ist, durch den linear construirbaren Pol α_8 von a_8 in Bezug auf P_{49}. Demnach ist die gemischte Polare u des Punktepaares a_{49}, a_{89} bekannt als Verbindungslinie der beiden linear construirbaren Punkte α_4 und α_8. Nun ist a_{49} der Pol der bekannten Geraden u in Bezug auf P_{89} und a_{89} der Pol von u in Bezug auf P_{49};

*) Cf. Schröter: Construction des 8ten Schnittpunkts 3er Flächen II. Ordnung. Cr. J. Bd. 99, p. 134ff. Die daselbst angegebene Construction des achten Schnittpunkts ist auf ganz ähnlichen Principien basirt, wie die hier gegebenen, ebenso wie die dortige Construction mit ganz gleichen Mitteln, wie die unsrige, verfährt.

die beiden Punkte a_{49}, a_{89} sind somit als die Pole der bekannten Geraden u in Bezug auf die beiden bekannten Polarsysteme von P_{89}, P_{49} linear bestimmbar, also auch ihre Verbindungslinie a_9, das aber ist die gesuchte neunte Gerade. Wir gelangen also zu folgender

Construction: Wir construiren in Bezug auf denjenigen eindeutig bestimmten Kegelschnitt P_{89}, welcher das Dreiseit $a_5 a_6 a_7$ zum Polardreiseit und das Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit hat, den Pol α_4 von a_4 und in Bezug auf denjenigen eindeutig bestimmten Kegelschnitt P_{49}, welcher das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit und das Vierseit $a_5 a_6 a_7 a_8$ zum Polarvierseit hat, den Pol α_8 von a_8. Nennen wir u die Verbindungslinie von α_4 und α_8, so giebt die Verbindungslinie a_9 der beiden Pole a_{49}, a_{89} von u in Bezug auf P_{89} und P_{49} die gesuchte Gerade.

Beweis: Es existirt genau eine C^3: $f(xxx) = 0$, welche $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit und a_{89} und P_{89} zu Pol und Polarkegelschnitt hat; denn diejenige C^3, welche die Gleichung besitzt:

$$\begin{aligned}\varrho_1 (a_2 a_8 a_9)(a_3 a_8 a_9)(a_4 a_8 a_9) a_1 (x)^3 + \varrho_2 (a_3 a_8 a_9)(a_4 a_8 a_9)(a_1 a_8 a_9) a_2 (x)^3 \\ + \varrho_3 (a_4 a_8 a_9)(a_1 a_8 a_9)(a_2 a_8 a_9) a_3 (x)^3 \\ + \varrho_4 (a_1 a_8 a_9)(a_2 a_8 a_9)(a_3 a_8 a_9) a_4 (x)^3 = 0,\end{aligned}$$

{wo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die 4 Constanten bedeuten, mittels deren sich die Gleichung von P_{89} d. i.

$$\varrho_1 a_1 (x)^2 + \varrho_2 a_2 (x)^2 + \varrho_3 a_3 (x)^2 + \varrho_4 a_4 (x)^2 = 0$$

aus den Quadraten von $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$ linear zusammensetzt}, ist eine solche C^3, und wie man sich leicht überzeugt, die einzige C^3 dieser Art. In Bezug auf diese C^3 ist u die gemischte Polare des Punktepaars a_{49}, a_{89}, denn es ist a_{49} nach Construction der Pol von u in Bezug auf P_{89}; folglich ist a_{89} der Pol von u in Bezug auf die conische Polare von a_{49}; diese conische Polare hat ferner noch, da a_{49} auf a_4 gelegen ist, das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ des Polarvierseits $a_1 a_2 a_3 a_4$ der C^3 zum Polardreiseit. Nun hat aber auch unser Kegelschnitt P_{49} nach Construction das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit und a_{89} und u zu Pol und Polare. Es stimmen daher die conische Polare von a_{49} und P_{49} in 5 conjugirten Punktepaaren überein, folglich ist P_{49} die conische Polare von a_{49} in Bezug auf unsere C^3 und demnach hat diese conische Polare von a_{49} das Vierseit $a_5 a_6 a_7 a_8$ zum Polarvierseit, da P_{49} dieses Vierseit zum Polarvierseit besitzt. Es sind demnach die beiden K^3:

$$(u a^5 a^6)\,(u a^7 a^8)\,(u a^9 a^4) = 0,$$

und

$$(u a^5 a^7)\,(u a^6 a^8)\,(u a^9 a^4) = 0$$

zu C^3 conjugirt und dem Fünfseit $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ eingeschrieben. Ferner

ist nach unserer Construction $a_5 a_6 a_7$ Polardreiseit der conischen Polare P_{89} von a_{89}, so dass folgende 3 weiteren zu C^3 conjugirten K^3 dem Fünfseit $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ eingeschrieben sind:

$$(ua^5a^6)(ua^7a^8)(ua^8a^9) = 0, \quad (ua^5a^7)(ua^6a^8)(ua^8a^9) = 0,$$
$$(ua^5a^6)(ua^5a^7)(ua^8a^9) = 0;$$

Diese fünf zur C^3: $f = 0$ conjugirten dem Fünfseit $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ eingeschriebenen K^3 sind offenbar linear unabhängig, denn sonst würde eine Relation von folgender Form bestehen:

$$(ua^5a^6)(ua^7a^8)(ua^9\zeta) + (ua^5a^7)(ua^6a^8)(ua^9\eta)$$
$$+ (ua^5a^6)(ua^5a^7)(ua^8a^9) = 0,$$

wo ζ und η zwei bestimmte Geraden durch den Punkt a_{48} bedeuten; eine solche Relation müsste offenbar zur Folge haben, dass 3 der gegebenen 8 Geraden $a_1, \ldots, a_8$ durch einen Punkt gehen, was wir nicht voraussetzen dürfen. Demnach sind dem Fünfseit $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ 5 linear unabhängige zu $f = 0$ conjugirte K^3 eingeschrieben, mithin ist (nach P. § 1, 7) das Fünfseit Polarfünfseit von $f = 0$; es war aber auch $a_1 a_2 a_3 a_4$ Polarvierseit von $f = 0$, mithin bilden $a_1, a_2, \ldots, a_9$ nach dem Satze auf p. 587 das vollständige System der 9 gemeinsamen Tangenten zweier K^3, also ist a_9 die gesuchte neunte Gerade.

Zweite Construction.

Wir haben p. 587 gesehen, dass die 9 gemeinsamen Tangenten $a_1, \ldots, a_9$ zweier K^3 sich in 2 Gruppen zu 4 resp. 5 Geraden so theilen lassen, dass die 4 Geraden der ersten Gruppe ein Polarvierseit, die 5 Geraden der zweiten Gruppe ein Polarfünfseit einer eindeutig bestimmten C^3 bilden. Es existirt demnach eine C^3: $f = 0$, von welcher z. B. $a_1 a_2 a_3 a_4$ Polarvierseit, $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ Polarfünfseit ist. Die conische Polare P_{89} von a_{89} hat (nach P. § 2, 3) das Dreiseit $a_5 a_6 a_7$ zum Polardreiseit und (nach P. § 1, 10) das Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit, demnach ist — genau, wie p. 587, — das Polarsystem von P_{89} vollständig bestimmt und man kann, allein mit Hilfe des Lineals zu jedem Punkte die Polare in Bezug auf P_{89} finden. Genau ebenso ist uns das Polarsystem der konischen Polare P_{79} von a_{79} bekannt, da wir in $a_5 a_6 a_8$ ein Polardreiseit, in $a_1 a_2 a_3 a_4$ ein Polarvierseit derselben kennen. Betrachten wir nun die gemischte Polare u von a_{79}, a_{89}, so enthält dieselbe offenbar den Punkt a_{56}, da die aus den 3 Punkten a_{79}, a_{89}, a_{56} bestehende K^3 dem Polarfünfseit $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ eingeschrieben ist, also zu unserer C^3: $f = 0$ conjugirt ist. Dann bilden nämlich die 3 Punkte a_{79}, a_{89}, a_{56} ein conjugirtes Dreieck der C^3: $f = 0$ d. h. a_{56} liegt auf der gemischten Polare u

von a_{79}, a_{89}. Es enthält demnach die Gerade a_9 die Pole a_{79}, a_{89} von u in Bezug auf resp. P_{89}, P_{79}, so dass die Geraden a_9 und u conjugirte Geraden in Bezug auf P_{89} und P_{79} sind. Die Gerade a_9 hat mithin die Eigenschaft, dass die mit ihr in Bezug auf P_{89} und P_{79} conjugirte Gerade u den Punkt a_{56} enthält. Nun umhüllen*) aber diejenigen Geraden, welche zu den sämmtlichen durch einen Punkt a_{56} gehenden Geraden in Bezug auf zwei Kegelschnitte P_{79} und P_{89} conjugirt sind, einen bestimmten Kegelschnitt, die zum Punkte a_{56} in Bezug auf P_{79}, P_{89} correspondirende Curve zweiter Classe K^2. Dieser Kegelschnitt K^2 wird auch die gesuchte Gerade a_9 berühren, da die in Bezug auf P_{79} und P_{89} conjugirte Gerade u von a_9 durch a_{56} geht. Ferner werden auch die Geraden a_5, a_6, a_7, a_8 ebenfalls diesen Kegelschnitt berühren, da, wie man sich leicht überzeugt, die 5 in Bezug auf P_{79} und P_{89} zu diesen Geraden conjugirten Geraden sämmtlich den Punkt a_{56} enthalten. Es sind uns daher 4 Tangenten a_5, a_6, a_7, a_8 dieses Kegelschnitts bekannt; eine beliebige Anzahl weiterer Tangenten desselben erhält man, wenn man zu einer beliebigen Geraden durch a_{56} die beiden Pole in Bezug auf P_{79} und P_{89} aufsucht, was auf linearem Wege möglich ist; die Verbindungslinie dieser beiden Pole giebt eine weitere Tangente. Dieser Kegelschnitt ist uns also vollständig bekannt, und alle seine Tangenten sind allein mit Hilfe des Lineals construirbar, wenn uns 8 von den 9 gemeinsamen Tangenten zweier K^3 gegeben sind. Dieser Kegelschnitt ist offenbar der dem Polarfünfseit $a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ eingeschriebene, zu der $C^3 : f = 0$ apolare Kegelschnitt. Wir besitzen also in diesem uns bekannten Kegelschnitt einen ersten Ort für die gesuchte neunte Gerade a_9.

Nun theilen wir die 9 Geraden $a_1, \ldots, a_9$ wiederum in 2 Gruppen zu je 4 resp. 5 Geraden und zwar folgendermassen: a_1, a_2, a_3, a_5 und a_4, a_6, a_7, a_8, a_9; es existirt dann eine zweite eindeutig bestimmte $C^3 : f' = 0$, von welcher $a_1 a_2 a_3 a_5$ Polarvierseit, $a_4 a_6 a_7 a_8 a_9$ Polarfünfseit ist. Die dem Polarfünfseit $a_4 a_6 a_7 a_8 a_9$ eingeschriebene K^2 werden wir genau ebenso bestimmen, wie bei der vorigen Betrachtung, sie berührt ebenfalls die gesuchte Gerade a_9, und hat mit der vorigen K^2 die 3 bekannten Tangenten a_6, a_7, a_8 gemeinsam. Die gesuchte Gerade a_9 wird demnach als vierte gemeinsame Tangente zweier Kegelschnitte, von welchen 3 gemeinsame Tangenten bekannt sind, sich auf linearem Wege**) bestimmen lassen. Wir gelangen also zu folgender zweiten linearen

Construction: In Bezug auf denjenigen Kegelschnitt P_{89}, welcher $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit und $a_5 a_6 a_7$ zum Polardreiseit

*) cf. Schröter: Theorie der Kegelschnitte p. 323.

**) cf. Cremona: Curve piane Art. 64.

besitzt, sowie für denjenigen Kegelschnitt P_{79}, welcher $a_1 a_2 a_3 a_4$ zum Polarvierseit und $a_5 a_6 a_8$ zum Polardreiseit besitzt, suchen wir die beiden Pole einer beliebigen Geraden v, welche den Punkt a_{56} enthält. Die Verbindungslinie dieser beiden Pole heisse v'. Ebenso suchen wir die Pole von v in Bezug auf folgende zwei Kegelschnitte: Erstens denjenigen Kegelschnitt, welcher $a_1 a_2 a_3 a_5$ zum Polarvierseit, $a_4 a_6 a_7$ zum Polardreiseit besitzt; zweitens denjenigen, welcher $a_1 a_2 a_3 a_5$ zum Polarvierseit, $a_4 a_6 a_8$ zum Polardreiseit besitzt. Die Verbindungslinie dieser beiden Pole heisse v''. Construiren wir die vierte gemeinsame Tangente*) a_9 der beiden Kegelschnitte, welche resp. $a_5 a_6 a_7 a_8 v'$ und $a_4 a_6 a_7 a_8 v''$ berühren, so ist diese die gesuchte neunte Gerade. —

Dritte Construction.

Setzen wir in der Gleichung (1) pag. 586: $p = 3$, so erhalten wir als nothwendige und hinreichende Relation für 9 gemeinsame Tangenten $a_1, \ldots, a_9$ zweier K^3:

$$\sum_1^3 k_i a_i(x)^3 = -\sum_4^9 k_i a_i(x)^3 = f(xxx)$$

d. h. 9 Geraden $a_1, \ldots, a_9$ sind dann und nur dann die 9 gemeinsamen Tangenten zweier K^3, wenn sich eine $C^3: f = 0$ finden lässt, von welcher $a_1 a_2 a_3$ Polardreiseit ist, für welche also die Invariante S verschwindet, und welche $a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ zum Polarsechsseit hat. Auch auf diesen Satz werden wir eine Construction der 9^{ten} gemeinsamen Tangente a_9 gründen, welche sich im Princip von der ersten von uns gegebenen Construction wenig unterscheidet, in der Ausführung aber einige Modificationen bietet. Wir suchen also eine Gerade a_9 so zu finden, dass dieselbe die Geraden a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 zu einem Polarsechsseit einer C^3 ergänzt, von welcher a_1, a_2, a_3 Polardreiseit ist. Die conische Polare P_{89} von a_{89} in Bezug auf diese C^3 hat (nach P. § 3, 5,) das Vierseit $a_4\, a_5\, a_6\, a_7$ zum Polarvierseit und — wie jeder Polarkegelschnitt unserer C^3 — das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit. Ebenso hat die conische Polare P_{79} von a_{79} das Vierseit $a_4 a_5 a_6 a_8$ zum Polarvierseit und das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit. Es ist demnach das Polarsystem von P_{89}, wie von P_{79} vollkommen bekannt (cf. p. 587) und man kann auf linearem Wege zu jedem Punkte der Ebene sowohl in Bezug auf P_{89}, wie auf P_{79} die Polare finden. Betrachten wir nun die gemischte Polare u des Punktepaares a_{89}, a_{79}; dieselbe ist die Polare von a_{79} in Bezug auf P_{89}, und andererseits die Polare von a_{89} in Bezug auf P_{79}. Nun liegt aber a_{79} auf a_7, also

*) cf. Cremona: Curve piane Art. 64.

geht u durch den Pol α_7 von a_7 in Bezug auf P_{89}; ferner liegt a_{89} auf a_8, also geht u durch den Pol α_8 von a_8 in Bezug auf P_{79}; die beiden Punkte α_7 und α_8 sind linear construirbar, es ist demnach die gemischte Polare u bekannt als Verbindungslinie von α_7 und α_8. Nun ist a_{79} der Pol von u in Bezug auf P_{89}, a_{89} der Pol von u in Bezug auf P_{79}, also sind diese beiden Punkte resp. auf a_7 und a_8 gelegen und linear construirbar. Die Verbindungslinie beider a_9 ist die gesuchte 9te Gerade. Wir gelangen so zu folgender dritten linearen:

Construction: Wir construiren in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt P_{89}, welcher $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit, $a_4 a_5 a_6 a_7$ zum Polarvierseit besitzt, den Pol α_7 der gegebenen Geraden a_7, und in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt P_{79}, welcher $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit und $a_4 a_5 a_6 a_8$ zum Polarvierseit besitzt, den Pol α_8 von a_8. Sodann construiren wir die beiden Pole a_{79}, a_{89} der Verbindungslinie u von α_7, α_8 in Bezug auf P_{89} und P_{79}, die Verbindungslinie derselben a_9 ist die gesuchte neunte Gerade. —

Beweis: Es existirt eine eindeutig bestimmte C^3: $f=0$, welche $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit und a_{89} und P_{89} zu Pol und Polarkegelschnitt hat. Die Gleichung derselben ist, wenn wir die Gleichung des Kegelschnitts P_{89}, der $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit hat, mit:

$$\varrho_1 a_1(x)^2 + \varrho_2 a_2(x)^2 + \varrho_3 a_3(x)^2 = 0$$

bezeichnen:

$$f(xxx) = \varrho_1 (a_2 a_8 a_9)(a_3 a_8 a_9) a_1(x)^3 + \varrho_2 (a_3 a_8 a_9)(a_1 a_8 a_9) a_2(x)^3 \\ + \varrho_3 (a_1 a_8 a_9)(a_2 a_8 a_9) a_3(x)^3 = 0.$$

In Bezug auf diese C^3: $f=0$ ist u die gemischte Polare von a_{79}, a_{89}, denn es ist nach unserer Construction u die Polare von a_{79} in Bezug auf die conische Polare P_{89} von a_{89}; folglich ist u auch die Polare von a_{89} in Bezug auf die conische Polare von a_{79}. Diese conische Polare von a_{79} gehört dem Kegelschnittnetze an, welches das Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit hat, und hat a_{89} und u zu Pol und Polaren; es giebt aber nur einen einzigen Kegelschnitt, welcher $a_1 a_2 a_3$ zum Polardreiseit und a_{89} und u zu Pol und Polaren hat; nach unserer Construction ist aber P_{79} ein solcher Kegelschnitt, mithin ist P_{79} die conische Polare von a_{79}. Das Sechsseit $a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ ist also so beschaffen, dass die conischen Polaren P_{79}, P_{89} der Ecken a_{79}, a_{89} die complementären Vierseite $a_4 a_5 a_6 a_8$ und $a_4 a_5 a_6 a_7$ resp. zu Polarvierseiten haben, mithin ist (nach P. § 3, 7) das Sechsseit $a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ Polarsechsseit der C^3: $f=0$. Von dieser C^3 ist aber $a_1 a_2 a_3$ Polardreiseit; die 9 Seiten eines Polardreiseits und eines Polarsechsseits einer C^3 bilden aber die 9 gemeinsamen Tangenten zweier K^3, folglich ist a_9 die gesuchte neunte Gerade.

Vierte Construction.

Vorbemerkungen: Ist ein Geradenpaar a_1, a_2 und ein Fünfseit $a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7$ gegeben, so existirt ein im Allgemeinen eindeutig bestimmtes Geradenpaar a, b, welches mit $a_1\,a_2$ harmonisch liegt, und ein conjugirtes Geradenpaar der dem Fünfseit eingeschriebenen Curve zweiter Classe K^2: $\varphi(uu) = \sum a_{ik}\,u_i u_k = 0$ bildet. Dasselbe ist das zu a_1, a_2 und zu dem Tangentenpaare b_1, b_2 von a_{12} an $\varphi = 0$ gleichzeitig harmonische Strahlenpaar a, b durch a_{12}. Wir wollen dieses Geradenpaar als das zu dem Geradenpaar a_1, a_2 und dem Fünfseit $a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7$ *polare Geradenpaar* bezeichnen. Die Gleichung dieses polaren Geradenpaares erhält man folgendermassen. Es existiren 7 Constanten $k_1, \ldots, k_7$ derart, dass die Identität:

$$k_1\,a_1(x)^2 + k_2\,a_2(x)^2 = \sum_3^7 k_i\,a_i(x)^2$$

besteht. Der Kegelschnitt, dessen Gleichung:

$$F(xx) = k_1\,a_1(x)^2 + k_2\,a_2(x)^2 = 0,$$

ist, ist offenbar ein Geradenpaar a, b, welches zu a_1, a_2 harmonisch ist, so dass:

$$F(x\,x) = a(x)\,b(x) = k_1\,a_1(x)^2 + k_2\,a_2(x)^2;$$

folglich ist auch:

$$a(x)\,b(x) = \sum_3^7 k_1\,a_i(x)^2;$$

nun ist $\varphi(a_\varrho a_\varrho) = \sum a_{ik}\,a_{\varrho i}\,a_{\varrho k} = 0$ für $\varrho = 3, 4, 5, 6, 7$, also ist auch $\varphi(a, b) = \sum a_{ik}\,a_i b_k = 0$ d. h. das Geradenpaar a, b ist zu der dem Fünfseit $a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ eingeschriebenen K^2: $\varphi = 0$ conjugirt.

Das polare Geradenpaar a, b ist Doppelstrahlenpaar einer Strahleninvolution durch a_{12}, welcher das Strahlenpaar a_1, a_2 sowie das Tangentenpaar b_1, b_2 von a_{12} an $\varphi = 0$ angehören. Von dieser Involution kennt man das Strahlenpaar a_1, a_2; kennt man ferner die 5 Tangenten a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 der K^2: $\varphi = 0$, so ist diese Involution linear construirbar d. h. es ist — allein mit Hilfe des Lineals — zu jedem Strahl der entsprechende zu finden möglich. In der That, legt man von den Punkten a_{31} und a_{42} die beiden zweiten Tangenten b_3, b_4 an $\varphi = 0$, so erhalten wir das der K^2: $\varphi = 0$ umgeschriebene Vierseit $a_3 b_3 a_4 b_4$. Die Verbindungslinien von a_{12} mit den 3 Gegeneckenpaaren dieses Vierseits liefern 3 Strahlenpaare der gewünschten Involution, denn diejenige Involution, welcher diese 3 Strahlenpaare angehören, enthält

bekanntlich*) auch das Tangentenpaar b_1, b_2 aus a_{12}, so dass diese Involution mit der gesuchten, welche durch a_1, a_2, und b_1, b_2 bestimmt wurde, identisch ist, und, da hier 3 Strahlenpaare derselben gegeben sind, vollkommen linear construirbar wird. Fassen wir das gefundene zusammen, so gelangen wir zu folgendem

Hilfssatz: *Ist ein Geradenpaar a_1, a_2 und ein Fünfseit $a_3a_4a_5a_6a_7$ gegeben, so existirt ein eindeutig bestimmtes Geradenpaar a, b, welches mit a_1, a_2 harmonisch und mit der dem Fünfseit eingeschriebenen K^2: $\varphi = 0$ conjugirt ist. Dieses Geradenpaar nennen wir das zu dem Geradenpaar a_1a_2 und zum Fünfseit a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 polare Geradenpaar. Seine Gleichung ist:*

$$a(x)b(x) = \varkappa_1 a_1(x)^2 + k_2 a_2(x)^2 = k_3 a_3(x)^2 + k_4 a_4(x)^2 + k_5 a_5(x)^2 + k_6 a_6(x)^2 + k_7 a_7(x)^2 = 0.$$

Diejenige Involution, von welcher a, b Doppelstrahlenpaar ist, lässt sich, wenn die 7 Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 gegeben sind, linear construiren.

Setzen wir nun in (1) pag. 586 für p den Werth 2, so werden wir zu folgender Construction der neunten Geraden a_9 geführt. Es ergiebt sich für 9 gemeinsame Tangenten zweier K^3 die Relation:

$$k_1 a_1(x)^3 + k_2 a_2(x)^3 = -\sum_3^9 k_i a_i(x)^3 = f(xxx),$$

d. h. es existirt eine C^3: $f = 0$, welche in 3 Gerade durch a_{12} zerfällt (nach P. § 1, 9), und welche $a_3, \ldots, a_9$ zum Polarsiebenseit hat. Betrachten wir in Bezug auf diese C^3 die conische Polare von a_{89}, so besitzt dieselbe die Gleichung:

$$k_1 (a_1 a_8 a_9)\, a_1(x)^2 + k_2 (a_2 a_8 a_9)\, a_2(x)^2 \equiv -\sum_3^7 k_i (a_i a_8 a_9)\, a_i(x)^3 = 0.$$

Es ist demnach nach dem vorangeschickten Hilfssatz die conische Polare von a_{89} das polare Geradenpaar von a_1a_2 und $a_3a_4a_5a_6a_7$, und wir können daher nach dem oben bewiesenen Satze in derjenigen Involution, in welcher dieses polare Geradenpaar das Doppelstrahlenpaar ist, und die wir fortan „*die zu a_{89} gehörige Involution*" nennen wollen, zu jedem Strahl durch a_{12} den entsprechenden linear construiren. Genau analoges gilt für die conische Polare von a_{79}, dieselbe ist das polare Geradenpaar von a_1, a_2 und von a_3, a_4, a_5, a_6, a_8. Sei nun u die gemischte Polare von a_{89} und a_{79} in Bezug auf unsere C^3: $f = 0$, so ist einerseits u die Polare von a_{79} in Bezug auf die conische Polare von a_{89}

*) cf. Reye: Geometrie der Lage Bd. I, p. 126.

d. h. sie ist der entsprechende Strahl von $\overline{(a_{12}\,a_{79})}$ in der zu a_{89} gehörigen Involution, deren Doppelstrahlenpaar also das polare Geradenpaar von $a_1 a_2$ und $a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ ist. Andererseits aber ist u die Polare von a_{89} in Bezug auf die conische Polare von a_{79} d. h. es ist u der entsprechende Strahl des Strahls $\overline{(a_{12}, a_{89})}$ in der zu a_{79} gehörigen Involution. Die beiden Strahlen $\overline{(a_{12}, a_{89})}$ und $\overline{(a_{12}, a_{79})}$ sind demnach die entsprechenden Strahlen eines und desselben Strahles u in Bezug auf die resp. zu a_{79} und a_{89} gehörigen Involutionen. Es bilden aber die Strahlenpaare, welche ein und derselben Geraden in unseren beiden Involutionen entsprechen, zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel; diesen beiden projectiven Strahlenbüscheln gehören die beiden Strahlen $\overline{(a_{12}, a_{89})}$ und $\overline{(a_{12}, a_{79})}$ als entsprechende Strahlen an. Auf den beiden Geraden a_7 und a_8 werden durch diese beiden projectiven Strahlenbüschel zwei projective Punktreihen herausgeschnitten, von denen daher a_{79} und a_{89} entsprechende Punkte sind. Der von diesen projectiven Punktreihen erzeugte Kegelschnitt enthält demnach die Gerade a_9, als Verbindungslinie entsprechender Punkte a_{79}, a_{89}, als Tangente. Dieser Kegelschnitt ist uns vollständig bekannt und linear construirbar; da uns die beiden auf a_7 und a_8 gelegenen, den Kegelschnitt erzeugenden, projectiven Punktreihen bekannt sind. Man erhält nämlich zu einem Punkt ξ auf a_7 den ihm auf a_8 in dieser Projectiviät entsprechenden Punkt η, indem man zu $\overline{a_{12}, \xi}$ in der zu a_{89} gehörigen, uns bekannten Involution die entsprechende Gerade construirt, und zu dieser die entsprechende Gerade in der zu a_{79} gehörigen Involution; diese letzte Gerade schneidet offenbar a_8 in dem zu ξ gehörigen Punkte η. Demnach erkennen wir, dass wir zu jedem Punkt ξ auf a_7 den entsprechenden Punkt η auf a_8 linear finden können, so dass alle Tangenten des durch diese Projectivität erzeugten Kegelschnitts linear construirbar sind. Dieser Kegelschnitt berührt offenbar auch die Geraden a_1, a_2, da, wie man sich leicht überzeugt, der dem Punkte a_{17} entsprechende Punkt auf a_8 der Punkt a_{18} ist, und der dem Punkte a_{27} entsprechende Punkt der Punkt a_{28}. Ferner berührt dieser Kegelschnitt auch die Geraden a_7, a_8, als die Träger der ihn erzeugenden, projectiven Punktreihen, so dass derselbe die 4 bekannten Geraden a_1, a_2, a_7, a_8 berührt und man weitere Tangenten desselben in beliebiger Anzahl linear construiren kann. Dieser Kegelschnitt ist also ein erster Ort, auf welchem die gesuchte Gerade a_9 liegt.

Eine ganz analoge Betrachtung kann man nun an das Punktepaar a_{79}, a_{69} knüpfen. Dasselbe wird in gleicher Weise entsprechendes Punktepaar sein zweier auf a_6 und a_7 gelegenen, bekannten projectiven Punktreihen. Diese beiden projectiven Punktreihen werden uns einen zweiten bekannten Kegelschnitt erzeugen, welcher a_1, a_2, a_6, a_7 berührt, und von dem man beliebig viele weitere Tangenten linear construiren

kann. Dieser Kegelschnitt wird demnach auch a_9 berühren, und somit ist a_9 als die vierte gemeinsame Tangente dieser beiden Kegelschnitte, deren drei übrigen gemeinsamen Tangenten die 3 bekannten Geraden a_1, a_2, a_7 sind, linear construirbar. Wir gelangen also hier zu folgender vierten linearen

Construction. Wir wählen auf a_8 einen Punkt ζ beliebig und construiren zu dem Strahl $a_{12}\zeta$ den entsprechenden Strahl u in derjenigen (nach p. 594) bekannten Involution, deren Doppelstrahlenpaar das polare Geradenpaar von $a_1 a_2$ und $a_3 a_4 a_5 a_6 a_8$ ist. Zu u construiren wir den entsprechenden Strahl v in derjenigen bekannten Involution, deren Doppelstrahlenpaar das polare Geradenpaar von $a_1 a_2$ und $a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ ist; dieser Strahl v schneide a_7 in η, die Verbindungslinie von ζ und η heisse A. Sodann construiren wir zu dem Strahl v den entsprechenden Strahl w in derjenigen bekannten Involution, deren Doppelstrahlenpaar das polare Geradenpaar von $a_1 a_2$ und $a_3 a_4 a_5 a_7 a_8$ ist, und schliesslich zu w den entsprechenden Strahl in derjenigen Involution, von welcher das polare Geradenpaar von $a_1 a_2$ und $a_3 a_4 a_5 a_6 a_8$ Doppelstrahlenpaar ist; diese Gerade schneide a_6 in ζ. Nennen wir noch B die Verbindungslinie von η und ζ, so ist die gesuchte Gerade a_9 die vierte gemeinsame Tangente der beiden Kegelschnitte, welche resp. a_1, a_2, a_7, a_8, A und a_1, a_2, a_6, a_7, B berühren.

(Der Beweis wird analog, wie bei den früheren Constructionen geführt). Diese letzte Construction scheint bei der practischen Ausführung am raschesten zum Ziele zu führen, obwohl die Herleitung derselben complicirter als bei den übrigen Constructionen erscheint.

Breslau, den 13. October 1889.

Ueber zwei covariante Formen aus der Theorie der Abel'schen Integrale auf vollständigen, singularitätenfreien Schnittcurven zweier Flächen.

Von

H. S. White in Cazanovia.

Im Zusammenhang mit den Vorlesungen des Hrn. Prof. F. Klein im mathematisch-physikalischen Seminar der Universität Göttingen während der Zeit von Ostern 1888 bis Herbst 1889 sind die Fragen nach der Erweiterung schon bekannter Resultate entstanden, deren Beantwortung ich hier in gedrängter Weise mittheilen möchte. Es handelt sich zunächst um die Darstellung Abel'scher Integrale überhaupt auf einer besonderen Classe von Raumcurven, dann aber um den wirklichen Aufbau gewisser zwei ganzer algebraischer Covarianten, die durch bestimmte Eigenschaften definirt sind. Behufs zweckmässiger Ausdrucksweise sowie einer Erläuterung des Zusammenhangs dieser speciellen Aufgaben mit der allgemeinen Theorie der Abel'schen Integrale verweise ich auf die in Bd. 36 dieser Annalen enthaltene Arbeit des Hrn. Klein: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen."

Eine Curve der in Betracht kommenden Classe ist eine jede Curve im R_3 ohne singulären Punkt, welche sich als der vollständige Durchschnitt zweier algebraischen Flächen darstellen lässt. Sie wird also durch zwei Gleichungen definirt:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_x^{m_1} = 0,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_x^{m_2} = 0.$$

Ich bezeichne jede solche (einfach überdeckt gedachte) Curve als eine *Elementarcurve*. Von ihr gilt vor allen Dingen der Satz:

Jede Elementarcurve ist eine kanonische Curve;

wobei die Bezeichnung: *kanonisch* die von Herrn Klein festgesetzte Bedeutung hat. Zum Beweise dieses Satzes genügt die Angabe des folgenden schon von Clebsch gebrauchten „zur Curve gehörigen Differentials": $d\omega_z$. Sind $U = u_z = 0$ und $V = v_z = 0$ zwei beliebige Hilfsebenen, so erhält $d\omega_z$ die von den Grössen u, v ganz unabhängige Darstellung:

$$d\omega_z = \frac{(u_z v_{dz} - u_{dz} v_z)}{|U V F f|} = \frac{(u_z v_{dz} - u_{dz} v_z)}{(u v a \alpha) \cdot a_z^{n_1 - 1} \cdot \alpha_z^{n_2 - 1}}.$$

Von besonderer Wichtigkeit sind dann folgende zwei Eigenschaften der Elementarcurven, die man oft benutzt aber nur unvollständig bewiesen hat:

Das Differential eines jeden Integrales erster Gattung lässt sich in der Form

$$dw_i = \varphi_i \,.\, d\omega_z$$

darstellen; d. h.

$$\frac{dw_i}{d\omega_z} = \varphi_i(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

wo φ_i eine ganze rationale Form $(m_1 + m_2 - 4)^{\text{ten}}$ Grades der z_1, z_2, z_3, z_4 ist.

Jede auf der Curve eindeutige algebraische Function stellt sich durch den Quotienten zweier ganzen rationalen Formen der z_1, z_2, z_3, z_4 dar:

$$E(z) = \frac{G(z_1, z_2, z_3, z_4)}{G'(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

In der von Hrn. Klein benutzten Ausdrucksweise fasst man diese beiden Sätze so zusammen, dass man sagt:

Auf der elementaren Curve des R_3 bilden die gewöhnlichen homogenen Coordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 ein volles Formensystem.

Erst durch diesen Satz wird für den Aufbau der beiden Anfangs erwähnten Covarianten eine bestimmte Grundlage gegeben.

Der Versuch, das Integral dritter Gattung auf algebraischem Wege zu normiren, führt auf die eine Form Ψ. Die Differentialform dritter Gattung

$$\frac{\partial^2 P_{\zeta\eta}^{zy}}{\partial\omega_z \cdot \partial\omega_\zeta} = \frac{\Psi(z, \zeta; u, v)}{(u_z v_\zeta - u_\zeta v_z)^2} + \sum_1^p{}^i \sum_1^p{}^k c_{i,k} \cdot \varphi_i(z) \cdot \varphi_k(z)$$

hat zunächst p^2 willkürliche Constanten, wo p des Geschlecht der Curve. Auf einer niedrigsten elementaren Curve, der ebenen Curve ohne Doppelpunkt:

$$\left\{\begin{aligned} a_z^m = b_z^m &= 0, \\ z_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

hat nun Herr G. Pick (Math. Ann. Bd. XXIX: Zur Theorie der Abel'schen Functionen) eine Normalform $\Psi(z, \zeta; u, v)$ durch drei Bedingungen definirt. Er verlangt: dass $\frac{\Psi(z, \zeta; u, v)}{(u_z v_\zeta - u_\zeta v_z)^2}$ von den Hilfsgrössen u, v unabhängig sei; dass das zugehörige Integral in den Unstetigkeitspunkten das logarithmische Residuum $+1$ resp. -1 aufweise; endlich, dass Ψ eine auch in den Coefficienten der Grundcurve ganze Covariante derselben sein soll. Ganz entsprechende Bedingungen schreibe ich der zu bestimmenden Normalform Ψ auf der allgemeinen

elementaren Curve des R_3: $\left\{\begin{matrix} a_z^{m_1} = b_z^{m_1} = 0 \\ \alpha_z^{m_2} = \beta_z^{m_2} = 0 \end{matrix}\right\}$ vor und füge (vorbehaltlich weiterer Untersuchungen) noch zwei Bedingungen hinzu. Dieselben lauten: Erstens soll Ψ durch Vertauschung von z und ζ nicht geändert werden; zweitens soll Ψ in der von mir festzuhaltenden Schreibweise keinen Bestandtheil besitzen, welcher den Factor $(u_z v_\zeta - u_\zeta v_z)^2$ explicite enthält. Ich gebe nun zum Vergleich sowohl a) die von Hrn. Pick für die elementare Curve der Ebene, als auch b) die von mir für die elementare Curve des R_3 entwickelte Normalform Ψ an:

$$\text{a)} \quad m \cdot \Psi(z, \zeta; u, v) = (uva) \cdot (uvb) \frac{D_m}{D_1}(a_z, b_\zeta) - (uvb)^2 \cdot a_z a_\zeta \cdot \frac{D_{m-1}}{D_1}(a_z b_\zeta),$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\ m_1 \cdot m_2 \cdot \Psi(z, \zeta; u, v) = {} & (uva\alpha)(uvb\beta) \cdot \frac{D_{m_1}}{D_1}(a_z, b_\zeta) \cdot \frac{D_{m_2}}{D_1}(\alpha_z, \beta_\zeta) \\ & - (uvb\alpha)(uvb\beta) \cdot a_z a_\zeta \frac{D_{m_1-1}}{D_1}(a_z, b_\zeta) \cdot \frac{D_{m_2}}{D_1}(\alpha_z, \beta_\zeta) \\ & - (uva\beta)(uvb\beta) \cdot \alpha_z \alpha_\zeta \cdot \frac{D_{m_1}}{D_1}(a_z, b_\zeta) \cdot \frac{D_{m_2-1}}{D_1}(\alpha_z, \beta_\zeta) \\ & + (uvb\beta)^2 \cdot a_z a_\zeta \cdot \alpha_z \alpha_\zeta \cdot \frac{D_{m_1-1}}{D_1}(a_z, b_\zeta) \cdot \frac{D_{m_2-1}}{D_1}(\alpha_z, \beta_\zeta). \end{aligned}$$

Hierbei wird in beiden Formeln die Abkürzung gebraucht:

$$\frac{D_r}{D_1}(a_z, b_\zeta) = \frac{\begin{vmatrix} a_z^r & b_z^r \\ a_\zeta^r & b_\zeta^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_\zeta & b_\zeta \end{vmatrix}} = a_z^{r-1} b_\zeta^{r-1} + a_z^{r-2} a_\zeta \cdot b_z b_\zeta^{r-2} + \cdots + a_\zeta^{r-1} \cdot b_z^{r-1}, -$$

das eine mal ternär, das andere Mal quaternär zu verstehen. Die Formel b) lässt sich freilich erst durch längere Processe in dieser Form ableiten; zweierlei Controle hat man aber für ihre Richtigkeit. Einerseits reducirt sie sich bei $\alpha_z^{m_2} = \beta_z^{m_2} = z_4 = 0$ auf die von Hrn. Pick gefundene Form a); andererseits ist es nicht schwer, die Identität:

$$\Psi(z, \zeta; u, v) \cdot (u'_z v'_\zeta - u'_\zeta v'_z)^2 = \Psi(z, \zeta; u', v') \cdot (u_z v_\zeta - u_\zeta v_z)^2$$

vermöge der Relationen:

$$a_z^{m_1} = a_\zeta^{m_1} = \alpha_z^{m_2} = \alpha_\zeta^{m_2} = 0$$

als richtig zu erkennen, womit die gewollte Unabhängigkeit des Ψ von den Hilfsgrössen u, v dargethan wird. Des Weiteren leuchtet der invariante Charakter des Ψ aus seiner Bauart unmittelbar hervor.

Die zweite von mir in Betracht gezogene covariante Form ist der Hauptfactor der von Hrn. Klein in seiner Abhandlung mit

$$\text{Alg.}\,(x, y;\ t, t', \ldots, t^p)$$

bezeichneten rationalen Form auf der elementaren Curve des R_3. Indem

ich an die Entstehung dieser Form erinnere, schreibe ich zugleich eine besondere Darstellungsweise derselben durch Formen $X_0, X_1, \ldots, X_p$ vor. Der Kürze halber beschränke ich mich auf die Raumcurve vom Geschlecht $p = 4$:

$$a_z^3 = 0; \quad \alpha_z^2 = 0.$$

$Z_{(t)}^{xy}$ ist irgend ein darauf bezügliches Integral zweiter Gattung, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$ sind vier linear unabhängige Formen erster Gattung. Es ist dann:

$$\begin{vmatrix} Z_t^{xy} & Z_{t'}^{xy} & Z_{t''}^{xy} & Z_{t'''}^{xy} & Z_{t^{IV}}^{xy} \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \varphi_1(t^{IV}) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \varphi_4(t) & \varphi_4(t') & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \varphi_4(t^{IV}) \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \ldots X_4 \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \ldots \varphi_1(t^{IV}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_4(t) & \varphi_4(t') & \ldots \varphi_4(t^{IV}) \end{vmatrix}}{\prod\limits_0^4 {}_i (u_x v_{t^i} - u_{t^i} v_x)(u_y v_{t^i} - u_{t^i} v_y)}$$

und es ergiebt sich Folgendes:

> Jede der Formen $X_0, \ldots, X_4$ ist eine rationale ganze Covariante der Grundformen: a_x^3, α_x^2, vom Grade 1 in den resp. Coefficienten derselben. Zwischen den X besteht die Relation:
>
> $$X_k(t^i \ldots t^k) = X_i(t^k \ldots t^i);$$
>
> d. h., sie entstehen aus einander durch blosse Vertauschung der entprechenden t^i, t^k.

Demzufolge brauche ich nur die Form X_0 hinzuschreiben. Evidentermassen wechselt X_0 nothwendig sein Vorzeichen bei Vertauschung von x und y. Ich theile X_0 daher in 7 Glieder:

$$2 \cdot 3 \cdot X_0 = \mathsf{A}_1(x, y) + \mathsf{A}_2(x, y) + \mathsf{A}_3(x, y) + \mathsf{A}_4(x, y) \\ - \mathsf{A}_2(y, x) - \mathsf{A}_3(y, x) - \mathsf{A}_4(y, x),$$

wo A_1 an und für sich diese alternirende Eigenschaft besitzt, die andern A aber nicht. Es sei mir nun gestattet, statt $(u_x v_t - u_t v_x)$, (xt) zu schreiben, u. s. w. Dann sind zunächst A_1 und A_2 folgende Formen:

$$\mathsf{A}_1(xy) = 1 \cdot (uva\alpha) a_t^2 \cdot \alpha_t \cdot (xy) \cdot \prod_1^4 {}_i (xt^i) \cdot \prod_1^4 {}_i (yt^i),$$

$$\mathsf{A}_2(x,y) = 1 \cdot (uva\alpha) \cdot (a_x a_t \cdot \alpha_t + a_t^2 \cdot \alpha_x) \cdot (yt) \cdot \prod_1^4 {}_i (xt^i) \cdot \prod_1^4 {}_i (yt^i).$$

Verstehe ich nun unter D_{tx} den polarisirenden Operator:

$$D_{tx} = \left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + t_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + t_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

so schreibt sich leicht A_3 bez. A_4 folgendermassen:

$$\mathsf{A}_3(x,y) = \frac{1}{5}\cdot(uv\,a\,\alpha)\,(a_x^2\alpha_t + a_x a_t\cdot\alpha_x)\cdot(yt)\cdot\prod_1^4{}_i(yt^i)\cdot D_{tx}\prod_1^4{}_i(xt^i),$$

$$\mathsf{A}_4(x\,y) = \frac{1}{10}\cdot(uv\,a\,\alpha)\cdot a_x^2\cdot\alpha_x\cdot(yt)\cdot\prod_1^4{}_i(yt^i)\cdot D_{tx}^2\prod_1^4{}_i(xt^i).$$

Durch Angabe dieser Formen $\mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_4$ ist X_0 bekannt, also auch alle Formen $X_1 \ldots X_4$. Man sieht nun, dass sich die entsprechenden Formen $X_0 \ldots X_p$ für eine beliebige elementare Curve des R_3 auf ganz dieselbe Weise entwickeln lassen. An Stelle der numerischen Coefficienten 2.3 resp. $1, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ treten dann:

$$m_1 . m_2 \text{ resp. } 1,\ 1,\ \frac{1}{p+1},\ \frac{1}{\binom{p+1}{2}},\ \frac{1}{\binom{p+1}{3}},\ \ldots$$

wo $m_1 . m_2$ den Grad, p das Geschlecht der Curve

$$p = \frac{m_1 . m_2}{2}(m_1 + m_2 - 4) + 1$$

bedeuten.

Die hier kurz skizzirten Untersuchungen, auf „elementare" Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes verallgemeinert, sind der Gegenstand einer ausführlichen Dissertation, welche a. a. O. veröffentlicht werden soll.

Göttingen, den 8. März 1890.

Eine Berichtigung zum ersten Bande meiner Algebra der Logik.

Von

Ernst Schröder in Karlsruhe.

Als ich begann, mich mit dem auch geometrisch und combinatorisch interessanten Probleme zu beschäftigen, welches Jevons gestellt, jedoch nur unvollständig gelöst hatte, und welches die Typenzahl der Ausdrücke betrifft, die aus drei gegebenen Begriffen oder Classen a, b, c mittelst der Partikeln „*und*", „*oder*" und „*nicht*" aufgebaut oder construirt werden können, war es meinem Gedächtnisse völlig entschwunden, dass auch Miss Ladd (nachmals Frau Franklin) eben dieses Problem besprochen hatte, und zwar am Schluss eines Aufsatzes „On the algebra of logic" — siehe „Studies in logic, by members of the Johns Hopkins University", Boston, Little, Brown & Co., 1883, 203 Seiten — den ich vordem nach andern Richtungen vielfältig schon durchgearbeitet. So kam es, dass auf S. 671 in Bd. 1 meiner „Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)", Leipzig, Teubner 1890, 717 Seiten, der Umstand *unerwähnt* geblieben ist, dass die 22 *Typen*, in welche (anstatt der 15 von Jevons gegebenen) gedachte 256 Ausdrücke, wie sich zeigte, zerfallen, l. c. pag. 67 und 68 *schon vollständig von* Miss Ladd *sich aufgestellt finden*. Und zwar besteht sogar Uebereinstimmung auch in der Anordnung aller Typen, abgesehen von den drei zuletzt von der Verfasserin angeführten, die in der Reihenfolge 14, 12, 13 bei ihr erscheinen. Ebenso hatte sie p. 64 das niedrere, auf zwei Classen bezügliche Problem bereits gelöst.

Nach beendigter Untersuchung bin ich sicher, die Literatur doch verglichen zu haben. Hierbei fiel mein Blick auf den *Fehler* p. 67: „In three terms the number of types ... is twenty-*six*", was mich verleitet hat, die weitere Darlegung unbeachtet zu lassen.

Ich werde natürlich in dem unter der Presse befindlichen Bd. 2 meiner Vorlesungen das Unrecht thunlichst gut zu machen suchen. Da aber das Erscheinen des Bandes immerhin noch einige Monate anstehen kann, beeile ich mich, inzwischen den Sachverhalt hier schon richtig zu stellen.

So sehr ich stolz darauf sein dürfte, mit jener ausgezeichneten und verdienstvollen Forscherin in einem Theil ihrer Resultate zusammengetroffen zu sein, hätte doch kaum ein Uebersehen mich schmerzlicher treffen können, als gerade dieses mir begegnete.

Karlsruhe, 17. Juni 1890.